译 者 的 话

本书系根据苏联"世界出版社"出版的《复变函数论习题集》(Problems in the Theory of Functions of a Complex Variable)的第二版(1977 年)译出. 原著者是利奥·沃尔科维斯基(LEO VOLKOVYSKY)、格雷戈里·伦茨 (GREGORY LUNTS) 和伊萨克·阿拉马诺维奇 (ISAAC ARAMANOVICH), 由维克多·希菲尔 (VICTOR SHIFFER)将 1975 年的俄文版译成英文.

本书共分十一章, 前九章的内容包括了复变函数基础理论的习题, 第十章是复变函数在流体力学、静电学和平面热传导问题中的应用, 第十一章是解析函数的推广(拟保角变换, 广义解析函数等). 全书共有习题 1425 道, 其中多数是基本题, 也有部分难题, 还有相当数量的习题涉及复变函数在平面场论等方面的应用. 我们认为, 本书选题难易兼顾, 理论和应用兼备, 不失为一本较好的教学参考书, 适用于综合性大学和高等师范院校的数学力学系、物理系和工科院校中设有高等数学课程的有关系科, 可供教师、学生以及有关的工程技术人员参考.

在翻译过程中, 我们尽量做到尊重原著, 对个别含义似乎不够明确的地方, 加译者注予以说明. 对于原书中的印刷错误以及著者明显的疏忽之处, 凡是所发现的, 都加以纠正, 在译文中不再一一加注指出了. 但限于水平, 译稿中不足之处在所难免, 望读者批评指正.

李锐夫教授在百忙中指导了本书的翻译工作并为本书审校，我们表示衷心的感谢．张奠宙和戴崇基两位同志也审阅了部分原稿，提出了具体的修改意见．我们于此一并致谢。

译者　1980年5月

引　言

本书主要是为大学的力学数学系、物理数学系、高等师院和技术学院的学生学习高等数学课程而准备的．内容也包括一些超出标准教学大纲的习题．

我们相信，本书对于专攻流体动力学、弹性理论和电子工程学的学生也是适用的．

为了掌握必要的理论基础知识，学生必须学完有关的教科书，如阿·斯维什尼柯夫(A. Sveshnikov)与阿·季霍诺夫(A. Tikhonov)著的«复变函数论»，莫斯科，世界出版社，1971．

解题的提示都在正文中给出。最难的习题标以星号，在本书的最后部分给予解答。

目　录

第三章 积分与幂级数

第四章　劳伦级数. 单值解析函数的奇点. 残数及其应用

第五章　各种函数项级数. 参数积分

第六章　无穷乘积. 整函数与亚纯函数

第七章　柯西型积分．泊松与许瓦尔兹积分公式

第八章　解析延拓．具有多值特征的奇点、黎曼面

第九章　保形映射(续)

第十章　在力学和物理学上的应用

第十一章　解析函数的推广

答案和解法

第一章

复数与复变函数

本章以及全书除另行说明外，采用以下记号：$z=x+iy=re^{i\varphi}$，$w=u+iv=\rho e^{i\theta}$（x，y，u，v，ρ，φ 与 θ 都为实数，$r\geqslant 0$，$\rho\geqslant 0$），$\operatorname{Re}z=x$，$\operatorname{Im}z=y$，$\operatorname{Arg}z=\varphi$，$|z|=r$，$\bar{z}=x-iy$。如不附加说明，则幅角 $\arg z$ 的主值由不等式 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 给出；其点用复数 z 来表示的复平面称为 z-平面；通常，术语"复数 z"与"点 z"是同义的。

§1. 复　　数

复数的几何解释

1. 完成下列运算：

1) $\dfrac{1}{i}$; 2) $\dfrac{1-i}{1+i}$; 3) $\dfrac{2}{1-3i}$; 4) $(1+i\sqrt{3})^3$.

2. 求出下列复数（a 与 b 为实数）的模与幅角：

1) $3i$; 2) -2; 3) $1+i$; 4) $-1-i$; 5) $2+5i$;

6) $2-5i$; 7) $-2+5i$; 8) $-2-5i$; 9) $bi\,(b\neq 0)$;

10) $a+bi\,(a\neq 0)$.

3. 解方程 $\bar{z}=z^{n-1}$（n 为自然数，$n\neq 2$）.

4. 求出下列根式所有的值，并用图解标出：

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[4]{-1}$; 4) $\sqrt[6]{-8}$; 5) $\sqrt[8]{1}$;

6) $\sqrt{1-i}$; 7) $\sqrt{3+4i}$; 8) $\sqrt[3]{-2+2i}$;

9) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

5. 证明 $\sqrt{z^2-1}$ 的两个值位于一条通过坐标原点的直

线上，此直线平行于以 $-1, 1$ 与 z 为顶点的三角形中过顶点 z 的内角平分线.

6. 设 n, m 为整数. 证明 $(\sqrt[n]{z})^m$ 有 $n/(n, m)$ 个不同的值，其中 (n, m) 是数 m 与 n 的最大公约数. 证明，当且仅当 $(n, m)=1$，即 n 与 m 互质时，$(\sqrt[n]{z})^m$ 与 $\sqrt[n]{z^m}$ 的值集相同.

7. 用几何方法证明下列不等式：

1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$； 2) $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

试用代数方法证明同样的不等式. 在每个不等式中确定等号何时成立.

8. 用几何方法证明下列不等式：

1) $\left|\dfrac{z}{|z|}-1\right|\leqslant|\arg z|$；

2) $|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$.

9. 证明恒等式：

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

并说明其几何意义.

10. 证明恒等式：

$$|1-\bar{z}_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2).$$

11. 证明不等式：

$$|z_1+z_2|\geqslant\frac{1}{2}(|z_1|+|z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|}+\frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

12. 设 z_1 与 z_2 为任意复数，a_1 与 a_2 为实数 $(a_1^2+a_2^2\neq0)$，证明不等式：

$$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1^2+z_2^2|\leqslant2\frac{|a_1z_1+a_2z_2|^2}{a_1^2+a_2^2}\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1^2+z_2^2|.$$

提示：引进辅助角 α 使 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a_1}{a_2}$；将表达式写成形如

$A+B\sin 2\alpha+C\cos 2\alpha$ 的估计式，并求出其极大值与极小值.

13. 证明下列恒等式：

1) $(n-2)\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2+\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum_{1\leqslant k<s\leqslant n}|a_k+a_s|^2$;

2) $n\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2-\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^2=\sum_{1\leqslant k<s\leqslant n}|a_k-a_s|^2$。

14. 证明：

1) 若 $z_1+z_2+z_3=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，则点 z_1，z_2，z_3 为一内接于单位圆的等边三角形的顶点；

2) 若 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$，则点 z_1，z_2，z_3，z_4 或者为一矩形的顶点，或者两两重合.

15. 若一正 n 边形的中心位于点 $z=0$ 上，其一个顶点 z_1 为已知，试求此正 n 边形的诸顶点.

16. 点 z_1 与 z_2 为一正 n 边形的两个相邻顶点，试求与 z_2 相邻的顶点 $z_3(z_3\neq z_1)$.

17. 已知一平行四边形的三个顶点 z_1，z_2，z_3，试求与 z_2 相对的第四个顶点 z_4.

18. 在什么条件下，两两不相重合的三点 z_1，z_2，z_3 为共线？

19. 在什么条件下，两两不相重合的四点 z_1，z_2，z_3，z_4 位于一个圆周上或一条直线上？

20*. 点 z_1，z_2，…，z_n 都位于一条通过坐标原点的直线一侧.证明：点 $1/z_1$，$1/z_2$，…，$1/z_n$ 也具有同样性质(试指出满足此性质的有关直线是哪一条)，且有

$$z_1+z_2+\cdots+z_n\neq 0,\quad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\cdots+\frac{1}{z_n}\neq 0.$$

21. 证明：若 $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$，则通过坐标原点的任何直线都将点 z_1，z_2，…，z_n 隔开，只要这些点不落在此直线上.

22. 设质点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 分别带有质量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$，则通过此质点系重心的任何直线将这些点隔开，只要它们不落在此直线上.

在题 **23** 至 **34** 中，要求说明所述关系式的几何意义.

23. $|z-z_0|<R$; $|z-z_0|>R$; $|z-z_0|=R$.

24. $|z-2|+|z+2|=5$.

25. $|z-2|-|z+2|>3$.

26. $|z-z_1|=|z-z_2|$.

27. 1) $\operatorname{Re} z \geqslant C$; 2) $\operatorname{Im} z<C$.

28. $0<\operatorname{Re}(iz)<1$.

29. $\alpha<\arg z<\beta$; $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta \quad (-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi)$.

30. $|z|=\operatorname{Re} z+1$.

31. $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$.

32. $\operatorname{Im}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$; $\operatorname{Re}\dfrac{z-z_1}{z-z_2}=0$.

33. $|2z|>|1+z^2|$.

34. 1) $|z|<\arg z$, 若 $0\leqslant\arg z<2\pi$;

2) $|z|<\arg z$, 若 $0<\arg z\leqslant 2\pi$.

在题 **35** 至 **38** 中，要求确定 z-平面上由所述方程给出的曲线族.

35. 1) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=C$; 2) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=C \quad (-\infty<C<\infty)$.

36. 1) $\operatorname{Re} z^2=C$; 2) $\operatorname{Im} z^2=C \quad (-\infty<C<\infty)$.

37. $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda \quad (\lambda>0)$.

38. $\arg\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\alpha \quad (-\pi<\alpha\leqslant\pi)$.

39. 1) z-平面上的一曲线族由下述方程给出：

$$|z^2-1|=\lambda \quad (\lambda>0),$$

当λ为何值时，族中的曲线由一条简单曲线组成？又当λ为何值时，族中的曲线分解为若干条低次曲线？

2) 关于下述曲线族回答同样的问题：

$$|z^2+az+b|=\lambda \quad (\lambda>0).$$

40. 确定从坐标原点到所给曲线的各点之间的最大与最小距离($a>0$)：

1) $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$； 2) $\left|z+\frac{b}{z}\right|=a$.

41. 若令$|z|-2\pi<\arg z\leqslant|z|$，则在任何点$z\neq0$唯一地定义函数$\arg z$. 试问使函数$\arg z$连续性不成立的点的轨迹是什么？

42. 由不等式$\ln|z|-2\pi<\arg z<\ln|z|$，在任何点$z\neq0$上唯一定义了函数$\arg z$，试问使其连续性不成立的点的轨迹是什么？

43. $\operatorname{Arg} f(z)$在$z=2$的初始值假定等于0. 点z绕以原点为心的圆运动一周(逆时针方向)又回到点$z=2$. 假设$\operatorname{Arg} f(z)$当z变动时连续变化，试对下列函数$f(z)$指出，当z沿上述回路走一周后$\operatorname{Arg} f(2)$的值：

1) $f(z)=\sqrt{z-1}$； 2) $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$；

3) $f(z)=\sqrt{z^2-1}$； 4) $f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$；

5) $f(z)=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$.

球极平面射影

44. 试导出球极平面射影公式：将直径为1、在原点与z-平面相切的球面上点P的坐标(ξ,η,ζ)用对应点z的坐标

(x, y)来表示．同样，用ξ, η, ζ来表示x与y(假定ξ轴和η轴分别与x轴和y轴重合)．

注．题**44**中，对应是在复平面的点z与半径为$\frac{1}{2}$切于此平面的球面上的点之间建立的．另一种对应的方法取球面半径为1，z-平面通过球面中心．

45．点1，-1，i，$(1-i)/\sqrt{2}$在球面上的象是什么？

46．纬线$\beta\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$在平面上的象是什么？“北极”与“南极”对应于什么？

47．求出 1) 射线$\arg z=\alpha$, 2) 圆$|z|=r$在球面上的象．

48．1) 关于点$z=0$, 2) 关于实轴，3) 关于单位圆对称的点对，在球面上象的位置是什么？

49．在什么条件下，点z_1和z_2是球面上一直径两端点的球极平面射影？

50．在球面的什么变换下，点z的象变到点$\frac{1}{z}$的象？

51．试求由下列不等式所定义的区域在球面上的象：

1) $\operatorname{Im} z>0$; 2) $\operatorname{Im} z<0$; 3) $\operatorname{Re} z>0$; 4) $\operatorname{Re} z<0$;

5) $|z|<1$; 6) $|z|>1$.

52．平面上一族平行直线在球面上对应于什么曲线族？

53．证明：在球极平面射影下，球面上的圆射影成平面上的圆或直线．球面上的什么圆对应于直线？

54．设K为平面上对应于球面上圆K'的圆，N为球面的北极，S为沿K'(假设K'非大圆)与球面相接的圆锥的顶点．证明：圆K的中心位于射线NS上．试考虑K'为大圆的情形．

55. 证明：在球极平面射影下，球面上两条曲线的夹角等于它们在平面上的象的夹角.

56. 联接球面上对应于点 z 和 a 的两点间的弦，试求此弦的长度 $k(z, a)$. 再考虑当 a 为无穷远点的情形.

57. 已知：点 z_1 与 z_2(两者之一可为无穷远点). 试求 z-平面上点的轨迹，使它在球面上对应于一个与已知点 z_1, z_2 之象等距的圆.

§2. 初等超越函数

按定义：

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i\sin y);$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\quad \mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z};\quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z+e^{-z}}{2};\quad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^z-e^{-z}}{2};\quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z};\quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

58. 应用 e^z 的定义证明：

1) $e^{z_1}\times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; 2) $e^{z+2\pi i} = e^z$;

3) 若 $e^{z+\omega} = e^z$ 对任何 z 成立，则 $\omega = 2k\pi i$ ($k=0$, ± 1, ± 2, $\cdots$).

关系式 $\exp i\varphi = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (欧拉(Euler)公式) 使我们可用复数的指数形式 $z = re^{i\varphi}$ 代替其三角形式 $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. 从现在起，$\varphi$ 通常理解为幅角的主值，即 $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

59. 写出下列各数的指数形式：1, -1, i, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$.

60. 求 $e^{\pm\pi i/2}$; $e^{k\pi i}$ ($k=0$, ± 1, ± 2, $\cdots$).

61. 求出下列复数的模与幅角的主值：

e^{2+i}; e^{2-3i}; e^{3+4i}; e^{-3-4i}; $-ae^{i\varphi}$ ($a>0$, $|\varphi|\leqslant\pi$);

$e^{-i\varphi}$ ($|\varphi|\leqslant\pi$); $e^{i\alpha}-e^{i\beta}$ ($0\leqslant\beta<\alpha\leqslant 2\pi$).

62. 求出下列和:

1) $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$;

2) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$;

3) $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x$;

4) $\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x$;

5) $\sin x-\sin 2x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin nx$.

63. 求出下列和:

1) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)$;

2) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)$.

64. 从相应的函数定义出发,证明:

1) $\sin^2 z+\cos^2 z=1$; 2) $\sin z=\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$;

3) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$;

4) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$;

5) $\operatorname{tg} 2z=\frac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$;

6) $\operatorname{ch}(z_1+z_2)=\operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2+\operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2$.

65. 证明: 若对任何 z 有 $\cos(z+\omega)=\cos z$, 则 $\omega=2\pi k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

66. 证明:

1) $\sin iz=i\operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz=\operatorname{ch} z$;

3) $\operatorname{tg} iz=i\operatorname{th} z$; 4) $\operatorname{ctg} iz=-i\operatorname{cth} z$.

67. 试用实变量三角函数与双曲函数表示下列函数的实部、虚部与模:

1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

68. 求出下列函数值的实部和虚部:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\operatorname{tg}(2-i)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$; 5) $\operatorname{cth}(2+i)$;

6) $\operatorname{th}\left(\ln 3+\frac{\pi i}{4}\right)$.

69. 对每一个函数 e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z$ 找出点 z 的一个集合，使函数在此集合上取

1) 实数值; 2) 纯虚数值.

70. 求出满足 1) $|\operatorname{tg} z|=1$; 2) $|\operatorname{th} z|=1$ 的一切 z 值.

按定义，$\operatorname{Ln} z=\ln r+i\varphi+2\pi ik$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, $\ln z=\ln r+i\varphi$ $(-\pi<\varphi\leqslant\pi)$ ($\ln z$ 称为量 $\operatorname{Ln} z$ 的主值).

71. 求下列各值:

1) $\operatorname{Ln} 4$, $\operatorname{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$;

3) $\operatorname{Ln}\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $\operatorname{Ln}(-2+3i)$.

72. 找出导致伯努利 (Bernoulli) 诗论的推理错误: $(-z)^2=z^2$, 故 $2\operatorname{Ln}(-z)=2\operatorname{Ln} z$; 因此 $\operatorname{Ln}(-z)=\operatorname{Ln} z$!

73. $\operatorname{Im} f(z)$ 在 $z=2$ 的初始值取为零. 点 z 绕以 $z=0$ 为圆心的圆依逆时针方向运动一周又回到点 $z=2$. 假设 $f(z)$ 当 z 变动时为连续变化，试对下列函数 $f(z)$ 求出在绕所述回路后 $\operatorname{Im} f(z)$ 的值:

1) $f(z)=2\operatorname{Ln} z$; 2) $f(z)=\operatorname{Ln}\frac{1}{z}$;

3) $f(z)=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln}(z+1)$; 4) $f(z)=\operatorname{Ln} z+\operatorname{Ln}(z+1)$.

按定义，对任何复数 $a\neq 0$ 与 α,

$$a^\alpha=\exp\{\alpha\operatorname{Ln} a\} \tag{1}$$

或者如通常那样[1]，假定 $\exp z$ 即为 e^z, 则 $a^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln} a}$.

74. 求出下列幂的一切值:

1) 按照(1), $e^z=\exp\{z\operatorname{Ln} e\}=\exp\{z(1+2\pi ik)\}$. 然而，除另行说明外，我们将假定 $k=0$, 即如通常那样，$e^z=\exp z$.

1) $1^{\sqrt{2}}$; 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; 3) 2^i; 4) 1^{-i}; 5) i^i;

6) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$; 7) $(3-4i)^{1+i}$; 8) $(-3+4i)^{1+i}$.

75. 证明：对有理指数($\alpha=m/n$)，幂 z^α 的一般定义与通常的定义

$$z^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{z})^m$$

相一致(亦可参见题**6**).

76. 下列值集是否重合：

$$a^{2\alpha},\ (a^\alpha)^2,\ (a^2)^\alpha?$$

按定义，等式 $w=\operatorname{Arc}\cos z$ 等价于等式 $z=\cos w$. 函数 $\operatorname{Arc}\sin z$, $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z$, $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z$ 以及反双曲函数 $\operatorname{Ar}\operatorname{ch} z$, $\operatorname{Ar}\operatorname{sh} z$, $\operatorname{Ar}\operatorname{th} z$, $\operatorname{Ar}\operatorname{cth} z$ 类似地定义.

77. 证明下列等式(根的一切值都取到)：

1) $\operatorname{Arc}\cos z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;

2) $\operatorname{Arc}\sin z=-i\operatorname{Ln}i(z+\sqrt{z^2-1})$;

3) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{i+z}{i-z}=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$;

4) $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+i}$;

5) $\operatorname{Ar}\operatorname{ch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;

6) $\operatorname{Ar}\operatorname{sh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$;

7) $\operatorname{Ar}\operatorname{th} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}$;

8) $\operatorname{Ar}\operatorname{cth} z=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}$.

78. 证明：对 $\operatorname{Arc}\cos z$ 的任何一个值都可选出 $\operatorname{Arc}\sin z$ 的一个值，使它们之和为 $\frac{\pi}{2}$. 试对 $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z$ 与 $\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z$ 证明同样的结论.

注. 等式 $\operatorname{Arc}\sin z+\operatorname{Arc}\cos z=\frac{\pi}{2}$ 与 $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z+\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z=\frac{\pi}{2}$ 总是理解为本题中所指出的意义.

79. 证明 $\operatorname{Arc}\cos z$ 的所有值都包含于公式

$$\operatorname{Arc}\cos z=\pm i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$$

之中，其中 $\sqrt{z^2-1}$ 为其两个值中的一个.

80. 1) 对哪些 z 值，函数 $\operatorname{Arc}\cos z$, $\operatorname{Arc}\sin z$ 与 $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z$ 的值分别都为实数?

2) 对哪些 z 值，函数 $\operatorname{Ar}\operatorname{sh} z$ 的值为纯虚数?

81. 求出下列函数的一切值:

1) $\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{Arc}\cos 2$;

4) $\operatorname{Arc}\sin i$; 5) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(1+2i)$; 6) $\operatorname{Ar}\operatorname{ch} 2i$;

7) $\operatorname{Ar}\operatorname{th}(1-i)$.

82. 求出下列方程的一切根:

1) $\sin z+\cos z=2$; 2) $\sin z-\cos z=3$;

3) $\sin z-\cos z=i$; 4) $\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z=1$;

5) $\operatorname{sh} z-\operatorname{ch} z=2i$; 6) $2\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z=i$.

83. 求出下列方程的一切根:

1) $\cos z=\operatorname{ch} z$; 2) $\sin z=i\operatorname{sh} z$; 3) $\cos z=i\operatorname{sh} 2z$.

§3. 序列与数项级数

84. 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为收敛级数且 $|\arg c_n|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$，则它为绝对收敛.

85. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ 为收敛级数. 证明: 若 $\operatorname{Re} c_n\geqslant 0$，则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ 也收敛.

86. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 具有下列性质：它的四个部分都收敛. 每一部分都由在同一闭象限内的项所组成. 证明此级数为绝对收敛.

87. 证明下述公式(阿贝耳(Abel)变换)：

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=\sum_{k=m}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})-S_{m-1}b_m+S_nb_n,$$

其中 $1\leqslant m\leqslant n$, $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k(k\geqslant1)$, $S_0=0$.

88. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$(其中 $b_n>0$) 为收敛的充分条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有界, 且数列 $\{b_n\}$ 单调趋于零(狄利克雷(Dirichlet)判别法).

提示：利用阿贝耳变换.

89. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛的充分条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 且数列$\{b_n\}$单调有界, 其中 b_n 为实数(阿贝耳判别法).

90. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 为收敛的充分条件是它满足下列条件：1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n=0$; 2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,|b_n-b_{n+1}|$ 收敛; 3) 序列$\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$有界, 其中 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$.

91. 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=q$. 证明：若 $q<1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 为一绝对收敛级数；若 $q>1$, 则为发散级数.

92. 以级数

$$1+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\beta}+\cdots\quad(1<\alpha<\beta),$$

$$\alpha+\beta^2+\alpha^3+\beta^4+\cdots \quad (0<\alpha<\beta<1)$$

为例说明，即使当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也可能收敛.

93. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 绝对收敛的充分条件是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,n\left(\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|-1\right)<-1$（拉贝(Raabe)判别法）.

94. 证明高斯(Gauss)判别法：若

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 a 与 n 无关，且 $a<-1$，则级数为绝对收敛.

在下列各题中(**95** 至 **104**)，检验级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的收敛性.

95. $c_n=\dfrac{n}{(2i)^n}$. **96.** $c_n=\dfrac{n!}{(in)^n}$. **97.** $c_n=e^{in}$.

98. $c_n=\dfrac{e^{in}}{n}$. **99.** $c_n=\dfrac{e^{in^2}}{n}$. **100.** $c_n=\dfrac{e^{in}}{n^2}$.

101. $c_n=\dfrac{1}{n}e^{\frac{\pi i}{n}}$.

102. $c_n=\dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$

（超几何级数），$\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$.

103. $c_n=\dfrac{\cos in}{2^n}$. **104.** $c_n=\dfrac{n\sin in}{3^n}$.

105. 求出下列集合的极限点：

1) $z=1+(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$；

2) $z=\dfrac{1}{m}+\dfrac{i}{n}$ （m, n 为任意整数）①；

3) $z=\dfrac{p}{m}+i\dfrac{q}{n}$ （m, n, p, q 为任意整数）①；

---

① 原文如此。——译者注

4) $|z|<1$.

106. 证明从无穷有界点列$\{z_n\}$中可选出收敛子列.

107. 证明:

1) 序列$\{z_n=x_n+iy_n\}$的收敛性等价于序列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$同时收敛.

2) 极限$\lim\limits_{n\to\infty} z_n\neq 0$存在的充要条件是极限$\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|\neq 0$与(对于适当定义的$\arg z_n$)$\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n$存在. 若$\lim\limits_{n\to\infty} z_n$不为负数,则不妨假设$-\pi<\arg z_n\leqslant\pi$.

在什么情形下,序列$\{z_n\}$的收敛性仅与序列$\{|z_n|\}$的收敛性等价?

108. 在**107**题论断的基础上,证明:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{z}-1)]=\ln r+i\varphi+2\pi ik$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

§4. 复变函数

实变量的复函数

在下列各题(**109** 至 **115**)中,确定由所述方程所表示的曲线.

109. $z=1-it$, $0\leqslant t\leqslant 2$. **110**. $z=t+it^2$, $-\infty<t<\infty$.

111. $z=t^2+it^4$, $-\infty<t<\infty$.

112. $z=a(\cos t+i\sin t)$, $\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{2}$, $a>0$.

113. $z=t+\frac{i}{t}$, $-\infty<t<0$.

114. 1) $z=t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1\leqslant t\leqslant 1$;

2) $z=-t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1\leqslant t<0$(取正的平方根).

115. 1) $z=a(t+i-ie^{-it})$, $-\infty<t<\infty$, $a>0$;

2) $z=ia+at-ibe^{-it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a>0$, $b>0$.

复 变 函 数

116. 对于映射 $w=z^2$, 要求:

1) 求出曲线 $x=C$, $y=C$, $x=y$, $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ 的象, 并确定其中哪些是一对一的变换;

2) 求出直线 $u=C$, $v=C$ $(w=u+iv)$ 的原象 (在 z-平面上).

117. 对于映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 求出:

1) 曲线 $x=C$, $y=C$, $|z|=R$, $\arg z=\alpha$, $|z-1|=1$ 的象;

2) 直线 $u=C$, $v=C$ 的原象.

118. 对于映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 与 $w=z-\dfrac{1}{z}$, 求出圆 $|z|=R$ 的象.

119. 对于变换 $w=z+\dfrac{1}{z}$, 求出 w-平面上的矩形网格 $(u=C,\ v=C)$ 在 z-平面上的原象.

120. 映射 $w=z/(1-z)^2$ 将圆 $|z|=1$ 变成什么曲线?

121. 对于映射 $w=e^z$, 求出:

1) 直线 $x=C$, $y=C$, $x=y$ 的象;

2) 曲线 $\rho=\theta\,(0\leqslant\theta<\infty)$ 的原象.

122. 求出在下列函数作用下, z-平面的矩形网格 $(x=C$, $y=C)$ 的象:

1) $w=z^2+z$; 2) $w=\operatorname{cth} z$; 3) $w=e^{z^2}$.

123. 在函数 $w=e^z+z$ 作用下，落在带形 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 内的直线 $x=C$ 与直线 $y=C$ 上的线段变换成什么曲线？

124. 在下列变换中，z-平面上的什么曲线对应于极网格 $|w|=R$, $\arg w=\alpha$:

1) $w=e^{\frac{1}{z}}$; 2) $w=e^{z^2}$?

连　续　性

125. 定义在点 z_0 邻域内的函数 $f(z)$，若对任意序列 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0，条件 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=f(z_0)$ 满足，则称为在该点海因(Heine)连续. 同样的函数，若对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得从不等式 $|z-z_0|<\delta$ 可推出 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，则称为柯西(Cauchy)连续. 证明这两个定义等价.

126. 函数 $\frac{\operatorname{Re} z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$, $\frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$ 当 $z\neq 0$ 时有定义，其中哪些函数可以在 $z=0$ 重新定义使之在该点上连续？

127. 在单位圆($|z|<1$)内，函数 1) $1/(1-z)$, 2) $1/(1+z^2)$ 是否为连续？是否为一致连续？

128. 1) 证明函数 $e^{-1/|z|}$ 在圆 $|z|\leqslant R$ 内(点 $z=0$ 除外)一致连续;

2) 函数 e^{-1/z^2} 是否在同样的区域内一致连续？

3) 函数 e^{-1/z^2} 是否在扇形 $0<|z|\leqslant R$, $|\arg z|\leqslant\pi/b$ 内一致连续？

129. 函数 $w=e^{-1/z}$ 除在点 $z=0$ 外处处有定义. 证明:

1) 在半圆 $0<|z|\leqslant 1$, $|\arg z|\leqslant\pi/2$ 内此函数有界但不连续;

2) 在同样的半圆内部函数连续，但不一致连续;

3) 在扇形 $0<|z|<1$, $|\arg z|\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ 内函数为一致连续.

130. 函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内一致连续. 证明对圆 $|z|=1$ 上任何点 ζ 以及任一序列 $z_n\to\zeta$, $|z_n|<1$, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)$. 并证明这个极限不依赖于数列 $\{z_n\}$ 的选取, 且由极限过程在圆的边界上重新定义的函数将在整个圆 $|z|\leqslant 1$ 上连续.

§5. 解析函数与调和函数

柯西-黎曼条件

131. 对函数 z^n, e^z, $\cos z$, $\operatorname{Ln} z$ 检验柯西-黎曼(Riemann)条件是否满足, 并证明

$$(z^n)'=nz^{n-1},\ (e^z)'=e^z,\ (\cos z)'=-\sin z,\ (\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{z}.$$

132. 求出常数 a, b, c, 使函数 $f(z)$ 为解析:

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$;

2) $f(z)=\cos x(\operatorname{ch} y+a\operatorname{sh} y)+i\sin x(\operatorname{ch} y+b\operatorname{sh} y)$.

133. 求出使函数 $f(z)=|x^2-y^2|+2i|xy|$ 为解析的区域.

134. $f(z)=u+iv=\rho e^{i\theta}$ 为解析函数. 证明: 若函数 u, v, ρ, θ 之一恒等于常数, 则函数 $f(z)$ 亦为常数.

135. 设 $z=re^{i\varphi}$ 以及 $f(z)=u(r,\ \varphi)+iv(r,\ \varphi)$. 试写出极坐标下的柯西-黎曼方程.

136. 证明: 若 $f(z)=u+iv$ 为解析函数, $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 为互相垂直的矢量, 矢量 $\boldsymbol{s}$ 按逆时针方向旋转一个直角到矢量 $\boldsymbol{n}$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n} \quad 与 \quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right.$与$\frac{\partial}{\partial n}$为二元实变量函数关于相应方向的导数$\Big)$.

137. 证明函数$f(z)=\bar{z}$处处不可导.

138. 证明函数$w=z\operatorname{Re}z$仅在点$z=0$可导;求出$w'(0)$.

139. 证明:对函数$f(z)=\sqrt{|xy|}$,柯西-黎曼条件在点$z=0$满足,可是导数不存在.

140. 证明下列论断:

1) 若在点z函数$w=f(z)$有极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left[\operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$,则偏导数$u_x$与$v_y$存在且相等;

2) 若极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left[\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right]$存在,则偏导数$u_y$与$v_x$存在且$u_y=-v_x$;

3) 先假设函数u与v可微,则上述极限(见1)与2))中任何一个的存在性可推出另一个极限的存在性,从而推出函数$f(z)$的可微性.

141. 函数$w=f(z)$在点z具有下述性质:1) u与v可微;2) 存在极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|$. 证明$f(z)$或$\overline{f(z)}$在点$z$可微.

142. 函数$w=f(z)$在点z具有下述性质:1) 函数u与v可微;2) 存在极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}$. 证明$f(z)$在点$z$可微.

143. 设$w=f(z)=u+iv$,且$u(x,y)$与$v(x,y)$在点z可微. 证明比值$\frac{\Delta w}{\Delta z}$当$\Delta z\to 0$时的一切可能的极限值的集合或为一点,或为一圆周.

形式柯西导数

若在关系式

$$w=w(z)=f(x,\ y)=f\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\ \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=\varphi(z,\ \bar{z})$$

中，z 与 $\bar{z}$ 视为自变量，则关于这两个变量的导数为

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

我们引进下述记号:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=w_z,\quad \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=w_{\bar{z}},\ 等等.$$

144. 证明下列关系式:

1) $dw=w_z dz+w_{\bar{z}} d\bar{z}$;

2) $w_z=\dfrac{1}{2}[(u_x+v_y)+i(-u_y+v_x)]$;

3) $w_{\bar{z}}=\dfrac{1}{2}[(u_x-v_y)+i(u_y+v_x)]$.

145. 证明柯西-黎曼方程等价于方程 $w_{\bar{z}}=0$.

146. 证明拉普拉斯（Laplace）方程 $\Delta u=0$ 可写成 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial \bar{z}}=0$ 的形式.

147. 证明 $\overline{dw}=d\bar{w}$, $\overline{w_z}=\bar{w}_{\bar{z}}$, $\overline{w_{\bar{z}}}=\bar{w}_z$(长划表示共轭在微分之后取).

148. 设 $z(w)$ 为 $w(z)$ 的逆函数. 证明

$$dz=\frac{\overline{w_z}}{|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2}dw+\frac{-w_{\bar{z}}}{|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2}d\bar{w}.$$

149. 证明变换 $w(z)$ 的雅可比(Jacobi)式为

$$J_{w/z}=\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(x,\ y)}=|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2.$$

150. 证明下列等式:

1) $\dfrac{dw}{dz}=w_z+w_{\bar{z}}e^{-2i\alpha}$, 其中 $\alpha=\arg dz$;

2) $\max\limits_{\alpha}\left|\dfrac{dw}{dz}\right|=|w_z|+|w_{\bar{z}}|$;

3) $\min\limits_{\alpha}\left|\dfrac{dw}{dz}\right|=\big||w_z|-|w_{\bar{z}}|\big|$.

151. 证明:若 $\alpha=\arg dz$, $\alpha'=\arg dw$, 则

1) $$\frac{d\alpha'}{d\alpha}=\frac{J_{w/z}}{(u_x\cos\alpha+u_y\sin\alpha)^2+(v_x\cos\alpha+v_y\sin\alpha)^2}$$
$$=\left|\frac{dz}{dw}\right|^2\frac{1}{J_{z/w}};$$

2) $\max\dfrac{d\alpha'}{d\alpha}=p$, $\min\dfrac{d\alpha'}{d\alpha}=\dfrac{1}{p}$, 其中

$$p=\frac{\max|dw/dz|}{\min|dw/dz|}=\frac{|w_z|+|w_{\bar{z}}|}{\big||w_z|-|w_{\bar{z}}|\big|}.$$

调 和 函 数

若函数 $u(x, y)$在某区域内有连续的一阶与二阶偏导数，且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,$$

则称为**调和函数**. 若两个调和函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

则称为**共轭调和函数**.

152. 证明下列命题:

1) 调和函数的线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_iu_i(x, y)$为调和函数;

2) 若调和函数 $u(x, y)$ 的自变量替换成 $x=\xi/(\xi^2+\eta^2)$, $y=\eta/(\xi^2+\eta^2)$ (反演变换), 则替换后的函数为调和函数;

3) 若调和函数 $u(x, y)$ 的自变量替换成 $x=\varphi(\xi, \eta)$, $y=\psi(\xi, \eta)$, 其中 φ 与 ψ 为共轭调和函数, 则替换后的函数为调和函数(特别, 由此即得前一论断);

4) 设 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 为共轭调和函数, 且设雅可比式 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ 在某区域内非零, 则逆函数 $x(u, v)$ 与 $y(u, v)$ 亦为共轭调和.

153. 1) 证明: 在单连通区域 G 内调和的任何函数 $u(x, y)$ 总有一族彼此差一常数项的共轭调和函数:

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C;$$

2) 证明: 若 G 为多连通区域, 由外围道 Γ_0 与内围道 Γ_1, Γ_2, $\cdots$, Γ_n 所界(图 1)(Γ_1, Γ_2, $\cdots$, Γ_n 中每一个都可退化为一点), 则函数 $v(x, y)$ 为多值的, 其取值的一般公式为

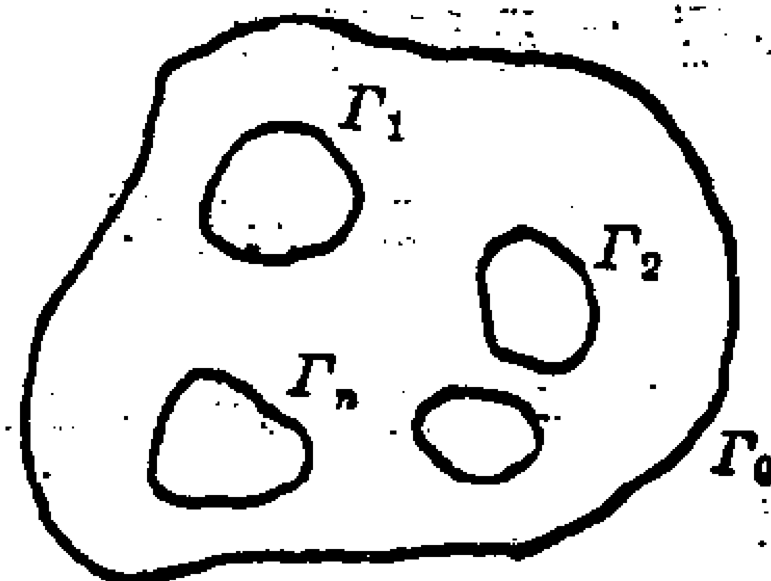


图 1

$$v(x, y)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+\sum_{k=1}^{n}m_k\pi_k+C.$$

积分是沿位于区域 G 内的路径所取, m_k 为整数, 而

$$\pi_k=\int_{\gamma_k}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

其中 γ_k 为简单闭围道, 每一条 γ_k 包含边界(Γ_k)的一个连通部分(数 π_k 称为积分周期或循环常数).

函数 $v(x, y)$ 为单值的充要条件是所有的数 π_k 都等于零.

注. 若函数 $u(x, y)$ 在无穷远点调和, 围道 Γ_0 可能不存在. 按定义, 这表明由反演变换从函数 $u(x, y)$ 得到的函数

$U(\xi, \eta)$在坐标原点调和(参见题152(2)). 在此情形下可证明 $\sum_{k=1}^{n}\pi_k=0$.

154. 因解析函数为无穷次可微,试由此证明下列定理:

1) 解析函数 $f(z)=u+iv$ 的实部与虚部为共轭调和函数;

2) 调和函数的(任意阶)导数也为调和函数.

155. 1) 若 u 调和, u^2 是否调和?

2) 设 u 为调和函数. 对什么函数 f, $f(u)$ 亦为调和函数?

156. 若 $f(z)$ 为解析函数,函数 $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\ln|f(z)|$ 是否为调和函数?

157. 试将拉普拉斯算子 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 变换到极坐标系 (r, φ) 上, 并求出拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的只依赖于 r 的解.

158. 对 $n=1, 2, 3, 4$ 写出由方程 $z^n=p_n+iq_n$ 定义的调和多项式 $p_n(x, y)$ 与 $q_n(x, y)$. 试给出在极坐标系中 p_n 与 q_n 的一般形式.

在下列各题(**159** 至 **163**)中, 用题 **153** 的公式, 求出在所述区域内已知调和函数的共轭调和函数.

159. $u(x, y)=x^2-y^2+x$, $0\leqslant|z|<\infty$.

160. $u(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $0<|z|\leqslant\infty$.

161. $u(x, y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, a) 平面上除去半轴 $y=0$, $-\infty<x\leqslant 0$ 后得到的区域; b) 除去原点的平面 $(0<|z|<\infty)$.

162. $u(x, y)=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+y^2)-\ln[(x-1)^2+y^2]\}$:

a) 除去 $z=0$ 与 $z=1$ 的平面; b) 除去实轴上线段 $y=0$, $0\leqslant x\leqslant 1$ 的平面; c) 除去射线 $y=0$, $1\leqslant x<\infty$ 的平面.

163. $u(x, y)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\ln[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2]$: a) 除去点 $z_1, z_2, \cdots, z_n(z_k=x_k+iy_k; z_i\neq z_j)$ 的平面; b) 除去联结已知点的简单折线(无自身交点的折线)的平面.

164. 是否存在解析函数 $f(z)=u+iv$ 使得

1) $u=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 2) $v=\ln(x^2+y^2)-x^2+y^2$;

3) $u=e^{y/x}$?

在下列各题 (**165** 至 **168**) 中, 从已知的实部或虚部求出解析函数 $f(z)=u+iv$。

165. $u=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}$.

166. $u=e^x(x\cos y-y\sin y)+2\sin x\,\mathrm{sh}\,y+x^3-3xy^2+y$.

167. $v=3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}$.

168. $v=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.

在题 **169** 至 **176** 中, 确定是否存在所述类型的(非常数)调和函数, 若存在的话,则求出之.

169. $u=\varphi(x)$. **170.** $u=\varphi(ax+by)$ (a 与 b 为实数).

171. $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **172.** $u=\varphi(xy)$. **173.** $u=\varphi(x^2+y^2)$.

174. $u=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$. **175.** $u=\varphi(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

176. $u=\varphi(x^2+y)$.

在题 **177** 至 **180** 中, 已知模或幅角, 证明解析函数 $f(z)$ 的存在性, 并求出之。

177. $\rho=(x^2+y^2)e^x$. **178**. $\rho=e^{r^2\cos 2\varphi}$.

179. $\theta=xy$. **180**. $\theta=\varphi+r\sin\varphi$.

181. 证明曲线族 $\varphi(x, y)=C$ 为某调和函数阶层曲线的充要条件是比值 $\Delta\varphi/(\mathrm{grad}\,\varphi)^2$ 只依赖于 φ，其中 φ 为二次连续可微函数.

提示：首先证明所求的调和函数具有 $u=f[\varphi(x, y)]$ 的形式.

在题 **182** 至 **186** 中，求出解析函数，使其实部，或虚部，或模，或幅角沿下述曲线族中任何曲线保持常数值.

182. $x=C$. **183**. $y=C$. **184**. $y=Cx$.

185. $x^2+y^2=C$. **186**. $x^2+y^2=Cx$.

导数的模与幅角的几何意义

187. 映射由函数 $w=z^2$ 与 $w=z^3$ 实现. 求出从点 z_0 出发的方向的旋转角 (θ)，以及在点 z_0 的伸长因子 (k)：

1) $z_0=1$; 2) $z_0=-\dfrac{1}{4}$; 3) $z_0=1+i$; 4) $z_0=-3+4i$.

188. 若映射由下列函数实现，试问平面上哪一部分收缩，哪一部分伸长：

1) $w=z^2$? 2) $w=z^2+2z$? 3) $w=\dfrac{1}{z}$? 4) $w=e^z$?

5) $w=\ln(z-1)$?

189. 区域 G 由函数 $f(z)$ 保形且一对一地映射到区域 G' 上. 求出计算 G' 面积 S 的公式，以及计算 G 内某条弧 l 映射到 G' 内弧 L 的长度公式.

190. 函数 e^z 将线段 $y=x$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 映射为一螺旋线. 试求螺旋线 L 的长度.

191. 函数 e^z 将矩形 $1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 4$ 映射到一区域上，试求此区域的面积.

192. 求出函数 e^z 将矩形 $1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 8$ 映射成的区域 D. 利用在解题**189**时得到的公式来计算区域 D 的面积，并解释为什么这个公式导致错误的结果.

第 二 章

与初等函数有关的保形映射

§1. 线性函数

整线性函数

193. 求出将顶点在点 0, 1 与 i 的三角形映射到顶点为 0, 2 与 $1+i$ 的相似三角形上的整线性函数.

194. 求出以 $1+2i$ 为不动点且将点 i 变到点 $-i$ 的整线性变换.

195. 对下列变换求出其有限的不动点 z_0(若存在的话), 关于该点的旋转角 θ 以及伸长因子 k. 试将这些变换化为典型形式 $w-z_0=\lambda(z-z_0)$.

1) $w=2z+1-3i$; 2) $w=iz+4$; 3) $w=z+1-2i$;

4) $w-w_1=a(z-z_1)\ (a\neq 0)$; 5) $w=az+b\ (a\neq 0)$.

196. 求出实现下列映射的整线性变换的一般形式:

1) 上半平面映射到自身;

2) 上半平面映射到下半平面;

3) 上半平面映射到右半平面;

4) 右半平面映射到自身.

试说明在所有这些情形中, 变换由给定对应的一对内点或两对边界点而唯一确定.

197. 求出实现下列映射的整线性变换的一般形式:

1) 带形 $0<x<1$ 映射到自身;

2) 带形 $-2<y<1$ 映射到自身；

3) 以直线 $y=x$ 与 $y=x-1$ 为边界的带形映射到自身.

求出在这些映射中哪些点对能互相对应，又在什么情形下这个对应唯一地定义了映射.

198. 求出整线性函数 $w(z)$，它将两条已知直线之间的带形区域映射到带形 $0<u<1$ 上，并满足给定的规范条件①：

1) $x=a,\ x=a+h;\ w(a)=0$;

2) $x=a,\ x=a+h$;

$$w\left(a+\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{2}+i, \operatorname{Im} w\left(a+\frac{h}{2}+i\right)<1.$$

3) $y=kx,\ y=kx+b;\ \ w(0)=0$;

4) $y=kx+b_1,\ y=kx+b_2;\ \ w(ib_1)=0$.

199. 求出将圆 $|z|<1$ 映射到圆 $|w-w_0|<R$ 上的整线性函数，使圆心互相对应，且使水平直径变换到与实轴方向成角 α 的直径.

分式线性函数

200. 对函数 $w=\dfrac{1}{z}$，求出下列曲线的象：

1) 圆族 $x^2+y^2=ax$; 2) 圆族 $x^2+y^2=by$;

3) 平行线束 $y=x+b$; 4) 直线束 $y=kx$;

5) 过一已知点 $z_0\neq 0$ 的直线束 6) 抛物线 $y=x^2$.

201. 试问函数 $w=\dfrac{1}{z-z_0}+h$ 将 1) 矩形网格 $x=C,\ y=C$; 2) 极网格 $|z-z_0|=R,\ \arg(z-z_0)=\alpha$ 变换成什么？

202. 已知函数 $w=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$.

① 参阅本章 § 3 开头的说明.——译者注

1) 证明族 $|w|=\lambda(0<\lambda<\infty)$ 的原象是圆族（阿波洛尼厄斯(Apollonius)圆）. 对给定的 λ, 求出 z-平面上对应圆的半径与圆心的位置;

2) 求射线 $\arg w=\theta$ 的原象;

3) 试在 z-平面上构造一个网格对应于 w-平面上的极网格;

4) 求出 z-平面上对应于半圆 $|w|<1$, $\operatorname{Im} w>0$ 的区域.

在下列各题(**203** 至 **207**)中, 确定所述区域被已知的映射函数变换成什么区域.

203. 象限 $x>0$, $y>0$; $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

204. 半圆 $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$; $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$.

205. 角域 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$; $w=\dfrac{z}{z-1}$.

206. 带形 $0<x<1$; 1) $w=\dfrac{z-1}{z}$; 2) $w=\dfrac{z-1}{z-2}$.

207. 圆环 $1<|z|<2$; $w=\dfrac{z}{z-1}$.

208. 将下列区域映射到铅垂带形 $0<\operatorname{Re} w<1$:

1) 除去圆 $\left|z-\dfrac{d}{2}\right|\leqslant\dfrac{d}{2}$ 的半平面 $\operatorname{Re} z>0$;

2) 由圆 $\left|z-\dfrac{d_1}{2}\right|=\dfrac{d_1}{2}$, $\left|z-\dfrac{d_2}{2}\right|=\dfrac{d_2}{2}$ $(d_1<d_2)$ 之交组成的月牙形;

3) 圆 $\left|z+\dfrac{d_1}{2}\right|=\dfrac{d_1}{2}$, $\left|z-\dfrac{d_2}{2}\right|=\dfrac{d_2}{2}$ 的外部, 使得 $w(d_2)=0$.

209. 求出将点 -1, i, $1+i$ 分别变换成点: 1) 0, $2i$, $1-i$; 2) i, ∞, 1 的分式线性函数.

210. 求出将点 $-1, \infty, i$ 分别变换成点: 1) $i, 1, 1+i$; 2) $\infty, i, 1$; 3) $0, \infty, 1$ 的分式线性函数.

211. 已知下列条件,求分式线性函数:

1) 点 1 与 i 为不动点,点 0 变成 -1;

2) 点 $\frac{1}{2}$ 与 2 为不动点,点 $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$ 变成 ∞;

3) 点 i 为二重不动点,点 1 变成 ∞.

212. 求出将点 $-1, 0, 1$ 分别变成点 $1, i, -1$ 的分式线性函数,并确定上半平面在这个映射下变换成什么.

213. 求出实现下列映射的分式线性变换的一般形式:

1) 上半平面变换到自身;

2) 上半平面变换到下半平面;

3) 上半平面变换到右半平面.

214. 对给定的规范条件,求出上半平面到自身的映射: 1) $w(0)=1$, $w(1)=2$, $w(2)=\infty$; 2) $w(0)=1$, $w(i)=2i$.

注. 关于上半平面到自身的映射, 其它的规范条件参见题 **226**.

215. 求出将圆 $|z|<R$ 映射到右半平面 $\operatorname{Re} w>0$ 的函数 $w(z)$, 使得 $w(R)=0$, $w(-R)=\infty$, $w(0)=1$. 上半圆在此映射下的象是什么?

两点 P_1 与 P_2 称为关于以 O 为心、R 为半径的圆 K 为对称, 如果它们都位于从 O 出发的同一条射线上, 且到圆心距离的乘积等于圆半径的平方:

$$OP_1 \cdot OP_2 = R^2.$$

216. 求出点 $2+i$ 关于圆: 1) $|z|=1$; 2) $|z-i|=3$ 的对称点.

217. 求出下列曲线关于单位圆的对称象:

1) $|z|=\frac{1}{2}$; 2) $|z-1|=1$; 3) $y=2$;

4) $|z-z_0|=|z_0|$ $(z_0=x_0+iy_0)$;

5) $|z-z_0|=\sqrt{|z_0|^2-1}$ $(|z_0|>1)$;

6) 双曲线 $x^2-y^2=1$;

7) 以 z_1, z_2, $z_3(z_i\neq 0)$ 为顶点的直线三角形的边界.

218. 证明点 P_1 与 P_2 关于圆 K 为对称的充要条件是满足下列两条件之一:

1) 通过点 P_1 与 P_2 的任一圆 K_1 与 K 正交;

2) 对圆 K 上任一点 M, $\frac{MP_1}{MP_2}=$常数(即 K 为关于点 P_1 与 P_2 的阿波洛尼厄斯圆).

219. 函数 $w=e^{i\alpha}\frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}$ $(\beta=a+ib,\ b>0)$ 将上半平面映射到单位圆上.

1) 求 $\arg w(x)=\theta(x)$; 2) 求 $w'(\beta)$; 3) 求出上半平面的哪一部分在此映射下收缩,哪一部分伸长.

220. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到单位圆 $|w|<1$, 使得:

1) $w(i)=0$, $\arg w'(i)=-\frac{\pi}{2}$;

2) $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$;

3) $w(a+bi)=0$, $\arg w'(a+bi)=\theta$ $(b>0)$.

221. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到圆 $|w-w_0|<R$ 上, 使得点 i 变到此圆的圆心, 且在该点的导数为正.

222. 将圆 $|z|<2$ 映射到半平面 $\operatorname{Re} w>0$ 上, 使得 $w(0)=1$, $\arg w'(0)=\frac{\pi}{2}$.

223. 将圆 $|z-4i|<2$ 映射到半平面 $v>u$ 上, 使得圆心

变到点 -4，且圆周上的点 $2i$ 变到原点.

224. 求出将圆 $|z|<1$ 映射到右半平面 $\operatorname{Re} w>0$ 上的分式线性变换函数 $w(z)$ 的一般形式，使得 $w(z_1)=0$, $w(z_2)=\infty$，其中 z_1 与 z_2 是圆周 $|z|=1$ 上的已知点，且 $\arg z_1<\arg z_2$.

求出圆 $|z|<1$ 内对应于半平面 $\operatorname{Re} w>0$ 上极网格的曲线族.

提示： 对三对对应点应用分式线性变换的一般形式，并求出 $\arg\dfrac{e^{i\varphi}-z_1}{e^{i\varphi}-z_2}$.

225. 函数 $w=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ 将实轴映射成一个圆，求此圆的圆心 w_0 与半径 R ($\operatorname{Im} z_2\neq 0$).

226. 求出将上半平面映射到自身的函数，使得 $w(a)=b$, $\arg w'(a)=\alpha$ ($\operatorname{Im} a>0$, $\operatorname{Im} b>0$).

提示： 首先在相应的规范条件下将两个半平面都映射到单位圆上.

227. 将上半平面映射到下半平面，使得 $w(a)=\bar{a}$，且

$$\arg w'(a)=-\frac{\pi}{2}\quad(\operatorname{Im} a>0).$$

228. 函数 $w=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ ($|a|<1$) 将单位圆映射到自身.

1) 求出 $\arg w(e^{i\varphi})=\theta(\varphi)$；2) 求出 $w'(0)$ 与 $w'(a)$；

3) 求出在此映射下，单位圆的哪一部分收缩，哪一部分伸长；4) 对 $|z|\leqslant 1$，求出 $\max\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$ 与 $\min\left|\dfrac{dw}{dz}\right|$.

229. 将圆 $|z|<1$ 映射到圆 $|w|<1$ 上，使得

1) $w\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$;

2) $w\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, $\arg w'\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $w(0)=0$, $\arg w'(0)=-\frac{\pi}{2}$;

4) $w(a)=a$, $\arg w'(a)=\alpha$,

230. 将圆 $|z|<R_1$ 映射到圆 $|w|<R_2$ 上，使得 $w(a)=b$, $\arg w'(a)=\alpha$ $(|a|<R_1,\ |b|<R_2)$.

231. 将圆 $|z|<1$ 映射到圆 $|w-1|<1$ 上，使得

$$w(0)=\frac{1}{2},\ w(1)=0.$$

232. 将圆 $|z-2|<1$ 映射到圆 $|w-2i|<2$ 上，使得

$$w(2)=i,\ \arg w'(2)=0.$$

233. 求出在下列条件下，将圆 $|z|<R$ 映射成自身的分式线性函数 $w(z)$ 的一般形式:

1) $w(a)=0$ $(|a|<R)$;

2) $w(a)=b$ $(|a|<R,\ |b|<R)$; 3) $w(\pm R)=\pm R$.

234. 将圆 $|z|<1$ 映射到自身，使得圆内的已知点 z_1 与 z_2 变成点 $\pm a(0<a<1)$; 求出 a.

提示：利用题 **233**(2) 的结果与题 **10** 中的恒等式.

235. 将圆 $|z|<1$ 映射到自身，使得实轴上的线段: $y=0$, $0\leqslant x\leqslant a$ $(a<1)$ 变换到实轴上关于原点为对称的线段. 求出变换后线段的长度.

236. 证明在将圆映射到圆的映射中，线性变换由给定一个内点的象与一个边界点的象唯一地确定.

237. 将单位圆映射到自身，使得点 $z_0\neq0$ 变成圆心. 证明在此变换中，单位半圆当且仅当其端点落在通过点 z_0 的一条直径上时，才被映射到一个单位半圆上.

238. 构造一个单位圆到自身的映射，使在此映射下，圆心的原象位于实轴上，而单位圆上的弧 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$ 映射到下列

弧上:

$$1)\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2};\quad 2)\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3};\quad 3)\ \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{6}.$$

§2. 线性变换理论中的补充题

线性变换的标准型

有一个不动点 z_0 的分式线性变换称为抛物型的. 抛物型变换可写成标准型:

$$\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+h,\quad 若\ z_0\neq\infty,$$

$$w=z+h,\quad 若\ z_0=\infty.$$

有两个相异不动点 z_1 与 z_2 的分式线性变换的标准型为:

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=k\,\frac{z-z_1}{z-z_2},\quad 若\ z_1\neq\infty,\ z_2\neq\infty;$$

$$w-z_1=k(z-z_1),\quad 若\ z_2=\infty.$$

对有两个相异不动点的变换, 若 $k>0$, 则称为双曲型的; 若 $k=e^{i\alpha}$ 且 $\alpha\neq0$, 则称为椭圆型的; 又若 $k=ae^{i\alpha}$, 其中 $a\neq1$ 且 $\alpha\neq0$(α 与 a 都为实数, $a>0$), 则称为斜驶型的.

239. 证明下列论断:

1) 一般分式线性变换 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 可简化为 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ 的形式, 其中 $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=1$.

2) 若 $\alpha+\delta$ 为实数, 则当 $|\alpha+\delta|<2$ 时变换为椭圆型; 当 $|\alpha+\delta|>2$ 时变换为双曲型; 而当 $|\alpha+\delta|=2$ 时变换为抛物型.

3) 若 $\mathrm{Im}(\alpha+\delta)\neq0$, 则变换为斜驶型.

240. 证明: 若线性变换有两个不动点, 则在此两点上导数的乘积等于1.

241. 求出在抛物型变换 $\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+h$ 下变成自身的圆.

242. 若点 R 为不动点，试求将圆 $|z|<R$ 映射到自身的抛物型变换的一般形式.

243. 证明双曲型变换的下列性质：

1) 通过两个不动点的任何圆都变成自身，且旋转的方向保持不变.

2) 与通过不动点的圆族正交的任何圆都变成具有同样性质的圆(这个性质可从性质(1)立即得到).

提示：首先考虑当不动点为 0 与 ∞ 的情形.

244. 证明：在椭圆型变换中，

1) 与通过两个不动点的圆族正交的任何圆都变成自身，且旋转的方向保持不变.

2) 联接不动点的圆弧变成联接不动点且与原来的弧交成角 α 的圆弧($\alpha=\arg k$).

245. 1) 证明：在斜驶变换下，双曲变换的性质(见题 **243** (2))与椭圆变换的性质(见题 **244**)都保持；

2) 证明：在斜驶变换下，只要 $\alpha\neq\pi$ ($\alpha=\arg k$)，就不存在不变的圆. 证明：若 $\alpha=\pi$，则通过不动点的圆变成自身，而旋转的方向则改变.

246. 证明：在斜驶型变换 $w=ae^{i\alpha}z$ 下，对数螺线

$$r=Ae^{\frac{\ln a}{\alpha}\varphi}\quad (A>0)$$

变成自身.

247. 证明：将单位圆变到自身的线性变换

$$w=e^{i\lambda}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\quad (a=|a|e^{i\alpha},\ |a|<1)$$

只可能为三种类型：椭圆型，抛物型或双曲型. 求出每一种

类型的变换在 a 取什么值时出现. 求出变换的不动点，并将变换简化成标准型.

关于线性变换的几个近似公式

248. 上半平面映射到单位圆上，点 $z=hi(h>0)$ 变到圆心. 求出实轴上线段 $[0, a]$ 的象的长度 $\Gamma(a>0)$，并对充分小的 a/h 以及充分小的 h/a，求得关于 Γ 的近似线性公式.

249. 单位圆映射到自身，圆心的原象（点 x_0）位于实轴上. 求出单位圆上弧 $0\leqslant\varphi\leqslant\gamma(\gamma\leqslant\pi)$ 的象的长度 Γ. 量 Γ/γ 如何依赖于 x_0 的符号而变化?

250. 在题 **249** 的条件下，求得下列公式:

1) $\Gamma=\dfrac{1+x_0}{1-x_0}\gamma+O(\gamma^3)$，对充分小的 γ;

2) $\Gamma=\pi-\varepsilon\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}-\dfrac{\varepsilon^2}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\gamma}{2}+O(\varepsilon^3)$，对充分小的 ε，

其中 $\varepsilon=1-x_0$.

251. 单位圆映射到自身，点 $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$ 变到圆心. 点 $z_1=e^{i\varphi_1}$ 与 $z_2=e^{i\varphi_2}$ 位于通过 z_0 的直径一侧 $(\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2\leqslant\varphi_0+\pi)$. 假定点 z_0 的位置靠近单位圆周，证明关于单位圆上弧 $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$ 的象的长度 Γ 有下面的公式:

$$\Gamma=\varepsilon\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2}\right]+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2}\right]+O(\varepsilon^3),$$

其中 $\varepsilon=1-r_0$.

基本的双连通区域的映射

252. 证明：若从圆 $|z|<1$ 到自身的线性变换不是旋转，

则以原点为心的同心圆环都不能变成同心的圆环.

注. 此命题是下述定理的特殊情形: 圆环 $r_1<|z|<r_2$ 到圆环 $R_1<|w|<R_2$ 上的保形映射存在的充要条件是 $R_2/R_1=r_2/r_1$. 映射函数仅可能为两种形式: 或者 $w=az$, 或者 $w=a/z$. 映射由给定的一对互相对应的边界点唯一确定.

253. 1) 将圆环 $2<|z|<5$ 映射到圆环 $4<|w|<10$ 上, 使得 $w(5)=-4$.

2) 将圆环 $1<|z-2i|<2$ 映射到圆环 $2<|w-3+2i|<4$ 上, 使得 $w(0)=-1-2i$.

下面的定理成立:

每一个边界不退化为点的双连通区域可保形映射到一个外圆半径与内圆半径之比为定值 μ 的同心圆环上(μ 称为双连通区域的模).

254. 将除去圆 $|z-h|<R\,(h>R)$ 的半平面 $\operatorname{Re} z>0$ 映射到圆环 $\rho<|w|<1$ 上, 使得虚轴变换到圆 $|w|=1$. 求出 ρ.

提示: 构造一个圆心在原点, 且与圆 $|z-h|=R$ 正交的圆, 然后求出将实轴与所构造的圆变成两正交直线的线性变换, 再验证在这里所考虑的区域映射到同心圆环上. 证明若所构造的圆与实轴的交点变成 0 与 ∞, 则圆环的中心与原点重合.

255. 将除去圆 $|z-h|<1\,(h>1)$ 的半平面 $\operatorname{Re} z>0$ 映射到圆环 $1<|w|<2$ 上. 求出 h.

256. 将边界为圆 $|z-3|=9$ 与 $|z-8|=16$ 的非同心圆环域映射到圆环 $\rho<|w|<1$ 上. 求出 ρ.

257. 将边界为圆 $|z-z_1|=r_1$ 与 $|z-z_2|=r_2$ ($|z_2-z_1|>r_1+r_2$ 或 $|z_2-z_1|<|r_2-r_1|$) 的双连通区域映射到中心在原点的同心圆环上. 求出区域的模 μ.

提示：找出关于这两个圆都互为对称的一对点，并将其中一点映射到 0，另一点映射到 ∞.

注. 易见关于解题 **254** 与 **257**，所介绍的方法是相同的.

258. 利用上题的解答，求出边界为下列已知圆的双连通区域的模：

1) $|z-i|=2$, $|z+i|=5$; 2) $|z-3i|=1$, $|z-4|=2$.

分式线性变换群的性质

变换 $T(z)=T_2[T_1(z)]$ 称为变换 T_1 与 T_2 的*积*，并写成 $T=T_2T_1$ 的形式(这里次序是重要的，因为一般地说，$T_2T_1\neq T_1T_2$)．变换 T 的集合 G 构成一个*群*，如果此集合包含任何两个属于它的变换的积，以及包含变换 T 的逆变换 T^{-1}. 由单个变换 T 的幂 T^n 与 T^{-n} 所组成的群称为*循环群*. 若群 G 由变换 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 及其所有的逆变换以及已知变换与其逆变换的一切可能的乘积所构成，则称变换 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 为群 G 的*生成变换*. 从固定的点 z 在群 G 的所有变换作用下得到的点称为关于群 G *等价或全等*.

群 G 的*基本域*为一区域(连通或不连通)，它不包含关于这个群互为等价的点对，且其每一个边界点的邻域内存在一些点等价于此区域的点.

259. 设 T_i 为线性变换：

$$T_i(z)=\frac{a_iz+b_i}{c_iz+d_i},\ \Delta_i=\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}\neq 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots).$$

证明下列论断：

1) $T=T_1T_2$ 为一线性变换，有行列式 $\Delta=\Delta_1\Delta_2$;

2) 变换的积满足结合律，即

$$(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1);$$

3) 每一个变换 T_i 都有逆变换 T_i^{-1}，即

$$T_iT_i^{-1}=T_i^{-1}T_i=J,$$

其中 $J(z)\equiv z$ 为恒等变换;

4) 变换的积一般不满足交换律(试举例).

260. 证明下列变换构成一个群(交比群):

$$T_1=z,\ T_2=\frac{1}{z},\ T_3=1-z,\ T_4=\frac{1}{1-z},$$

$$T_5=\frac{z-1}{z},\ T_6=\frac{z}{z-1}.$$

261. 证明由平面绕原点旋转 α 的倍数的角而产生的线性变换集合构成一个循环群. 在什么情况下, 这个群由有限个变换组成?

262. 1) 证明形如 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 的变换的集合构成一个群(称为模群), 其中 a, b, c 与 d 为实整数, 且 $ad-bc=1$;

2) 证明: 若 a, b, c 与 d 为复整数 (即形如 $m+ni$ 的数, 其中 m 与 n 为实整数), 且满足条件 $ad-bc=1$, 则第 1 小题中变换的集合也构成一个群(皮卡(Picard)群).

263. 求出由下列变换生成的群的基本域:

1) $T(z)=e^{2\pi i/n}z$ (n 为自然数);

2) $T_1(z)=e^{2\pi i/n}z,\ T_2(z)=\dfrac{1}{z}$;

3) $T(z)=z+\omega$;

4) $T_1(z)=z+\omega,\ T_2(z)=-z$;

5) $T_1(z)=z+\omega_1, T_2(z)=z+\omega_2\left(\operatorname{Im}\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\neq 0\right)$(双周期群);

6) $T_1(z)=z+\omega_1,\ T_2(z)=z+\omega_2,\ T_3(z)=-z$;

7) $T_1(z)=z+\omega,\ T_2(z)=iz$;

8) $T_1(z)=z+\omega,\ T_2(z)=e^{2\pi i/3}z$;

9) $T_1(z)=z+\omega,\ T_2(z)=e^{2\pi i/6}z$.

264．求出在球极射影下对应于球面关于下列直径旋转的线性变换群：

1）铅垂直径；2）平行于实轴的直径；

3）平行于虚轴的直径；4）其一端的球极射影为点 a 的直径．

提示：若 z_1，z_2 为球的直径两端点的象，则 $z_1\bar{z}_2=-1$（见题 **49**）．

265．1）证明对应于球面的旋转且使具有球极射影 a 与 b 的点互相对应的线性变换所构成的群，由下述关系式给出：

$$\frac{w-b}{1+\bar{b}w}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1+\bar{a}z};$$

2）证明微分 $ds=\dfrac{|dz|}{1+|z|^2}$ 关于这个群的变换是不变的，并表示弧元 dz 的球面长度（即此弧元在球面上象的长度）．

线性变换与罗巴切夫斯基几何

当在单位圆 $|z|<1$ 内解释罗巴切夫斯基(Lobachevsky)几何时，此圆内的"直线"实际上是正交于单位圆的圆弧，"运动"则是单位圆到自身的线性变换；点 z_1 与 z_2 之间的距离由量 $\rho(z_1, z_2)=\dfrac{1}{2}\ln(\alpha,\beta,z_2,z_1)$ 所表示，其中 α 与 β 是过点 z_1 与 z_2 的"直线"与单位圆的交点（点的次序为 α, z_1, z_2, β）；$(\alpha, \beta, z_2, z_1)$为所述点的交比．角用在欧几里德(Euclid)几何中同样的方法来度量．

266．证明：若 $z_1\neq z_2$，则 $\rho(z_1, z_2)>0$，以及 $\rho(z, z)=0$．

267．证明 $\rho(z_1, z_3)\leqslant\rho(z_1, z_2)+\rho(z_2, z_3)$，等号当且仅当点 z_3 落在联接点 z_1 与 z_2 的"线段"上时取到．

268．证明：若点 z_1 与 z_2 之一趋于单位圆上一点（或者两点都趋于单位圆上不同的点），则非欧长度 $\rho(z_1, z_2)$ 趋于无穷（即单位圆上的点对应于非欧平面上的无穷远点）．

269. 证明微分 $ds=\frac{|dz|}{1-|z|^2}$ ($|z|<1$) 关于将圆 $|z|<1$ 映射到自身的线性变换群是不变的，并且表示弧元 dz 的非欧长度.

提示：写出将圆 $|z|<1$ 映射到自身，且将点 a 映射到点 b 的变换的一般形式($|a|<1$, $|b|<1$).

270. 指出构造下列曲线的方法：

1) 通过点 z_0 的"直线"束；

2) 通过点 z_1 与 z_2 的"直线"；

3) "直线"的等距(即与已知"直线"等距的点的轨迹)；

4) 极限线(即正交于"平行直线"束的线).

271. 1) 证明对具有角 φ_1, φ_2, φ_3 的"直线"三角形，下列不等式成立：

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3<\pi;$$

2) 证明在"运动"的范围内，"直线"三角形由它的角 φ_1, φ_2, φ_3 所确定. 试从三个角来构造一个"直线"三角形.

§3. 有理函数与代数函数

圆或半平面到 w-平面上单连通区域的一般映射有形式

$$w=\varphi[l(z)],$$

其中 $\varphi(z)$ 为一特殊的映射，而 l 为圆或半平面到自身的任一分式线性映射(逆变换形如 $z=l[\psi(w)]$). 当求一个规范的映射，即满足一定的附加条件的映射时，就应考虑上述一般形式. 若规范条件并不给出，则在答案中通常只指出一个映射函数.

在保形映射的实际构造中，某些一般原理起着重要的作用.

黎曼-许瓦尔兹(Schwarz)对称原理

设区域 D_1 的边界包含一条圆弧 C(特殊情形下为一直线段)，又设函数 $w=f_1(z)$ 实现从这个区域到区域 D_1^* 上的保形映射，使得弧 C 变

成圆弧或者直线段 C^*. 设函数 $f_2(z)$ 在关于 C 对称的点上取 $f_1(z)$ 关于 C^* 对称的值[1]，则 $f_2(z)$ 在关于 C 与区域 D_1 对称的区域 D_2 内解析，且将此区域映射到关于 C^* 对称于 D_1^* 的区域 D_2^* 上.

函数
$$w=\begin{cases} f_1(z) & \text{在 } D_1 \text{ 内,} \\ f_1(z)=f_2(z) & \text{在 } C \text{ 上,} \\ f_2(z) & \text{在 } D_2 \text{ 内} \end{cases}$$
实现从区域 D_1+C+D_2 到区域 $D_1^*+C^*+D_2^*$ 上的保形映射[2].

边界对应原理

设 D 与 D^* 是边界为 C 与 C^* 的单连通区域，又设区域 D^* 完全落在平面的一个有限部分内. 若函数 $w=f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}$ 内连续，并实现从 C 到 C^* 上的一对一的映射，且保持旋转方向，则此函数实现区域 D 到 D^* 上一对一的保形映射.

在解本节和下节的习题时，若映射由多值函数的一枝来实现，则应适当选取对应区域边界上的映射点及其象点(尤其是对于涉及具有截口区域映射的习题).

272. 利用函数 $w=z^2$ 及其反函数，求下列区域的保形映射:

1) 等边双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 右边一枝的内部到上半平面;

2) 抛物线 $y^2=2px,\ p>0$ 的外部(即由此抛物线所界、且不包含其焦点的区域)到上半平面.

注. 由二次曲线所界区域的映射亦见题 **302**, **303**, **330** 到 **332**, **367**.

273. 利用上题中给出的函数，作下列映射:

1) 圆 $r=a\cos\varphi\ (a>0)$ 的内部到心脏线 $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$

---

1) 若 C 与 C^* 为实轴上的线段(借助于附加的分式线性变换，这一点常能做到)，则 $f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}$.

2) 若区域 D_1 与 D_2，以及 D_1^* 与 D_2^* 互不相交，则映射是一对一的.

的内部;

2) 同一圆的内部到双纽线 $\rho=\sqrt{\cos 2\theta}$ 右边一枝的内部;

3) 圆 $|z|<1$ 到心脏线 $\rho=A(1+\cos\theta)$ 的内部 $(A>0)$, 使得 $w(0)=A/8$, $w'(0)>0$.

274. 求出函数

$$w=R(z+mz^2),\ R>0,\ 0\leqslant m\leqslant\frac{1}{2},$$

将圆 $|z|<1$ 映射成的区域. 求出 z-平面上极网格的象.

275. 求出函数 $w=z+z^2$ 将半圆 $|z|<1$, $\operatorname{Re}z>0$ 映射成的区域.

276. 1) 求出函数 $w=R\left(z+\frac{z^n}{n}\right)$, $R>0$(n 为整数, $n>1$), 将圆 $|z|<1$ 映射成的区域;

2) 求出函数 $w=R\left(z+\frac{1}{nz^n}\right)$将单位圆 $|z|<1$ 的外部映射成的区域, 其中 $R>0$, n 为整数, $n>1$.

注. 关于由函数 $w=R\left(z+\frac{1}{z}\right)$(茹可夫斯基(Zhukovski)函数)所实现的映射见题 **298** 及随后各题.

277. 1) 确定m取什么值时, 函数 $w=R(z+mz^n)$ (n 为自然数)实现从圆 $|z|<1$ 到某个区域上的保形映射, 并求出此区域;

2) 确定m取什么值时, 函数 $w=R\left(z+\frac{m}{z^n}\right)$将圆 $|z|<1$ 的外部保形映射成某个区域, 并求出此区域.

对函数 $w=R\left(\frac{1}{z}+mz^n\right)$以及圆 $|z|<1$ 的内部讨论同样的问题.

圆弧二角形映射与带有截口的区域的映射

278. 1) 将角 $0<\arg z<\pi\alpha(0<\alpha\leqslant 2)$ 映射到上半平面;

2) 将角 $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 映射到上半平面，使得 $w(1-i)=2,\ w(i)=-1,\ w(0)=0$.

279. 求出在下列条件下，将半圆 $|z|<1,\ \operatorname{Im}z>0$ 映射到上半平面的映射函数 $w(z)$:

1) $w(-1)=0,\ w(0)=1,\ w(1)=\infty$;

2) $w(\pm 1)=\mp 1,\ w(0)=\infty$;

3) $w\left(\frac{i}{2}\right)=i,\ \arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

280. 求出在下列条件下，将半圆 $|z|<1,\ \operatorname{Im}z>0$ 映射到圆 $|w|<1$ 上的映射函数 $w(z)$:

1) $w(\pm 1)=\pm 1,\ w(0)=-i$;

2) $w\left(\frac{i}{2}\right)=0,\ \arg w'\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

281. 求出将区域 $|z|>1,\ \operatorname{Im}z>0$ 映射到上半平面的映射函数 $w(z)$.

282. 将下列区域映射到上半平面:

1) 扇形 $|z|<R,\ 0<\arg z<\pi\alpha\ (0<\alpha\leqslant 2)$;

2) 区域 $|z|>R,\ 0<\arg z<\pi\alpha\ (0<\alpha\leqslant 2)$.

283. 将下列圆弧二角形映射到上半平面:

1) $|z|<1,\ |z-i|<1$; 2) $|z|<1,\ |z-i|>1$;

3) $|z|>1,\ |z-i|<1$; 4) $|z|>1,\ |z-i|>1$;

5) $|z|>2,\ |z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$.

284. 将上半单位圆的外部映射到上半平面.

在题 285 至 297 中，将已知区域映射到上半平面.

285. 沿线段$[-1, 1]$截开的平面.

286. 沿线段$[-i, i]$截开的平面.

287. 沿线段$[z_1, z_2]$截开的平面.

288. 沿射线$(-\infty, -R]$, $[R, \infty)$ $(R>0)$截开的平面.

289. 沿着从点 i 出发、平行于直线 $y=x$ 且位于第一象限内的射线截开的平面.

290. 沿着联接点 -1 与 1、通过点 ih 的圆弧截开的平面,其中 $0<h<1$.

291. 沿线段$[0, ih]$ $(h>0)$截开的半平面 $\operatorname{Im} z>0$.

292. 沿正虚半轴从 ih 到 ∞ 截开的半平面 $\operatorname{Im} z>0$ $(h>0)$.

293. 沿圆弧 $|z|=1$ 从点 $z=1$ 到点 $z=e^{i\alpha}$ 截开的半平面 $\operatorname{Im} z>0$, 其中 $0<\alpha<\pi$.

294. 沿圆弧 $|z|=1$ 从点 $z=1$ 到点 $z=e^{i\alpha}$ 截开的角状区域 $0<\arg z<\pi\beta$, 其中 $0<\alpha<\beta<2$.

295. 沿线段 $[0, -i]$ 截开的上半单位圆的外部(风叶形的外部).

提示: 利用线性变换,此题可归结为上题.

296. 1) 沿半径$[0, 1]$截开的圆 $|z|<1$;

2) 沿射线$[1, \infty)$截开的单位圆外部.

297. 求出将圆 $|z|<1$ 映射到沿射线$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$截开的 w-平面的映射函数,使得 $w(0)=0$, $w'(0)>0$.

茹可夫斯基函数

298. 求出在茹可夫斯基函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$作用下, 极网格$|z|=R$, $\arg z=\alpha$ 的变换.

299. 求出茹可夫斯基函数将下列区域映射成的区域:

1) 圆 $|z|<R<1$; 2) 区域 $|z|>R>1$; 3) 圆 $|z|<1$;

4) 区域 $|z|>1$; 5) 半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$;

6) 半平面 $\mathrm{Im}\,z<0$; 7) 半圆 $|z|<1$, $\mathrm{Im}\,z>0$;

8) 半圆 $|z|<1$, $\mathrm{Im}\,z<0$; 9) 区域 $|z|>1$, $\mathrm{Im}\,z>0$;

10) 区域 $1<|z|<R$, $\mathrm{Im}\,z>0$;

11) 区域 $R<|z|<1$, $\mathrm{Im}\,z>0$;

12) 区域 $\frac{1}{R}<|z|<R$, $\mathrm{Im}\,z>0$, $\mathrm{Re}\,z>0$;

13) 角 $\frac{\pi}{2}-\alpha<\arg z<\frac{\pi}{2}+\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

300. 求出在下列函数作用下,极网格的变换:

1) $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$; 2) $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)$ $(a>0)$;

3) $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{c^2}{z}\right)$, $c=|c|e^{i\gamma}$ $(0\leqslant\gamma<\pi)$.

301. 利用茹可夫斯基函数映射下列区域:

1) 线段 $[-c, c]$ $(c>0)$ 的外部到单位圆外部, 使得 $w(\infty)=\infty$, $\arg w'(\infty)=\alpha$;

2) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外部到单位圆外部,使得 $w(\infty)=\infty$, $\arg w'(\infty)=0$.

302. 将除去半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant1$, $y>0$ 的上半平面映射到上半平面.

303. 将边界为共焦椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2+k^2}+\frac{y^2}{b^2+k^2}=1\quad(a>b)$$

的双连通区域映射到圆心在坐标原点的同心圆环上, 并求出

已知双连通区域的模(参见题**254**前的说明).

304. 求出在茹可夫斯基函数作用下，沿线段 $[a, 1]$ $(-1<a<1)$ 截开的圆 $|z|<1$ 映射成的区域. 考虑 $a>0$ 与 $a<0$ 两种情形.

在题**305**至**309**中,将给定的区域映射到上半平面.

305. 沿线段 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 截开的圆 $|z|<1$.

306. 沿半径 $[-1, 0]$ 以及线段 $[a, 1]$ $(0<a<1)$ 截开的圆 $|z|<1$.

307. 沿线段 $[-a, -1]$ 与射线 $[1, \infty)$ 截开的单位圆外部,其中 $a>1$.

308. 沿线段 $[0, ai]$ $(0<a<1)$ 截开的圆 $|z|<1$ 的上半部分.

309. 沿线段 $[ai, i]$ $(0<a<1)$ 截开的圆 $|z|<1$ 的上半部分.

310. 将除去线段 $[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}]$ 的圆 $|z|<1$ 映射到 w-平面的单位圆.

311. 将沿线段 $[a, 1]$ $(0<a<1)$ 截开的圆 $|z|<1$ 映射到圆 $|w|<1$,使得 $w(0)=0$, $w'(0)>0$. 求出 $w'(0)$ 与对应于截口之弧的长度. 当 a 为何值时截口变成半圆?

提示: 宜先将已知区域与圆 $|w|<1$ 都映射到线段 $[a, 1]$ 的外部.

312. 将沿线段 $[a, 1]$ 与 $[-1, -b]$ $(0<a<1, 0<b<1)$ 截开的圆 $|z|<1$ 映射到圆 $|w|<1$ 上,使得 $w(0)=0$, $w'(0)>0$. 求出 $w'(0)$ 与对应于割口之弧的长度.

313. 将茹可夫斯基函数表示为 $\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$, 试求:

1) 过点 $z=\pm 1$，且在点 1 与实轴交角为 $\alpha(-\pi<\alpha<\pi)$ 的圆 C 的象，并求此圆的外部映射成的区域；

2) 过点 $z=1$，在此点与实轴交角为 α，且包含点 -1 于其内部的圆 C' 的象，并求此圆的外部映射成的区域。

314. 1) 若映射函数 $w(z)$ 由方程

$$\frac{w-1}{w+1}=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2-\delta}\quad (0<\delta<2,\ w>0,\ 若\ z>1)$$

给出，试求题 **313** 中所述的 z–平面上圆与区域的象；

2) 在此映射下，圆 C 内部的象是什么？

315. 将单位圆 $|z|=1$ 的外部映射到沿着弧

$$\arg\frac{w-1}{w+1}=\beta\quad (0<|\beta|<\pi)$$

截开的 w–平面，使得 $w(\infty)=\infty$，$\arg w'(\infty)=\alpha$.

在题 **316** 至 **319** 中，求已知区域在给定函数的映射下得到的区域。

316. 圆 $|z|<1$; $w=\dfrac{z}{z^2+1}$.

317. 半圆 $|z|<1$, $\operatorname{Im} z>0$; $w=\dfrac{1}{z^2+1}$.

318. 角 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{n}$; $w=\dfrac{1}{2}\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$.

319. 扇形

$$-\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n},\ |z|<1;\ w=\frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$$

$$(w(z)>0,\ 若\ z>0).$$

提示：将映射函数表示成 $w=F\{f[\varphi(z)]\}$ 的形式，其中 $\varphi(t)=t^n$, $f(t)=\dfrac{t}{(1+t)^2}$, $F(t)=\sqrt[n]{t}$.

对称原理的应用

320. 1) 利用题 **319** 的解以及对称原理，求单位圆在映

射 $w=\dfrac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$ 下的象;

2) 求将单位圆的内部(以及外部)映射到“星”:

$$|w|\leqslant 1,\ \arg w=2\pi k/n\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

外部的函数.

321. 将下列区域映射到单位圆的外部:

1) 沿线段 $[-1,\ 1]$ 与 $[-i,\ i]$ 截开的整个平面(十字的外部);

2) 沿射线 $(-\infty,\ -1]$, $[1,\ +\infty)$, $(-i\infty,\ -i]$ 与 $[i,\ +i\infty)$ 截开的整个平面.

322. 1)* 应用题 **318** 中的函数, 将扇形 $|z|<1$, $0<\arg z<\dfrac{\pi}{n}$ (n 为整数)映射到自身, 使得半径上的线段 $|z|\leqslant\alpha$, $\arg z=0$ 与 $|z|\leqslant\alpha$, $\arg z=\dfrac{\pi}{n}$ $(0<\alpha<1)$ 变成相应的半径;

2) 将沿线段 $1\leqslant|z|\leqslant\alpha$, $\arg z=2k\dfrac{\pi}{n}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 截开的单位圆外部映射到单位圆外部.

323. 将由实轴上线段 $[-a,\ b]$ 与虚轴上线段 $[-ci,\ ci]$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ c\geqslant 0,\ a^2+b^2+c^2\neq 0)$ 所组成的十字的外部映射到上半平面, 以及单位圆外部.

提示: 求出将沿线段 $[0,\ ci]$ 截开的上半平面映射到上半平面的映射函数, 然后应用对称原理. 由对称原理, 十字的外部映射到沿实轴上线段截开的整个平面.

324. 将沿射线 $[-a,\ +\infty)$ $(a\geqslant 0)$ 与线段 $[-ci,\ ci]$ $(c>0)$ 截开的平面映射到上半平面.

提示: 参见题 **323** 的提示.

325. 将沿负虚轴与单位圆下半部分截开的平面映射到单位圆的外部.

提示：通过一线性变换，此题归结为题 **321**(1).

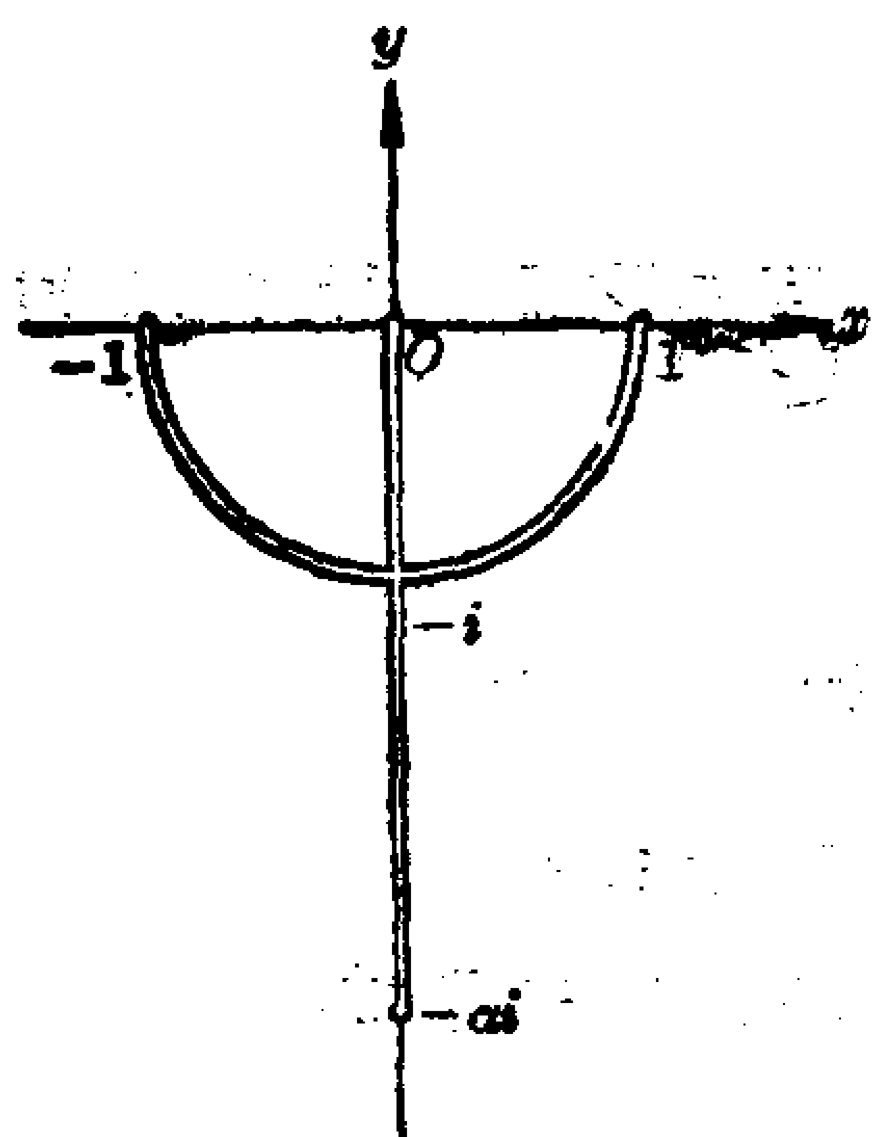


图 2

326. 将沿线段 $[-ai,\ 0]$ $(a>1)$ 与单位圆下半部分截开的平面（图 2）映射到上半平面.

提示：通过一线性变换，此题归结为题 **323**.

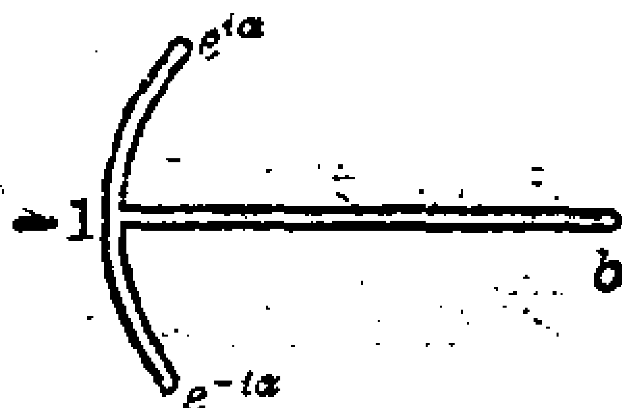


图 3

327. 将沿线段 $[-1,\ b]$ $(b>-1)$ 与端点在点 $e^{\pm i\alpha}$、过点 $z=-1$ 的圆弧截开的平面映射到上半平面（图 3）.

328. 将沿线段 $[i,\ bi]$，$[-bi,\ -i]$，$[1,\ a]$，$[-a,\ -1]$ $(a>1,\ b>1)$ 截开的单位圆外部映射到上半平面.

提示：茹可夫斯基函数将题中的区域映射到题 **323** 中的区域上.

329*. 将图 4 中所示的"星"的外部映射到单位圆外部.

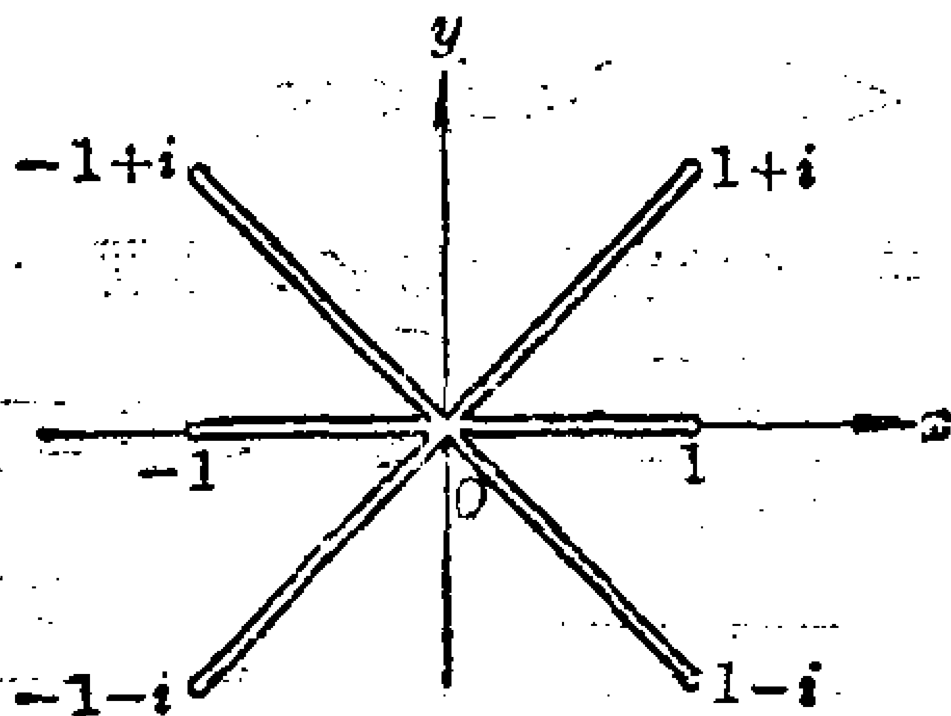


图 4

330*. 将双曲线 $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha}-\dfrac{y^2}{\sin^2\alpha}=1$ 右边一枝的内部映射到上半平面.

331. 将双曲线 $\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}=1$ 右边一枝的外部映射到上半平面.

332. 将位于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 两枝之间的区域映射到上半平面.

简单的多叶映射

题 **333** 与 **334** 考虑导致多叶区域(黎曼面)[1]的映射.

333. 求出函数 $w=z^2$ 将下列区域映射成的区域:

1) 圆环的一部分

$$r_1<|z|<r_2,\ 0<\arg z<\pi+\alpha\quad(0<\alpha\leqslant\pi);$$

2) 区域 $|z^2-1|<a\quad(0<a<\infty)$.

334. 求出茹可夫斯基函数 $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$将下列区域映射成的区域:

1) 圆 $|z|<R\quad(R>1)$;

提示: 宜先考虑圆 $|z|<1$ 与圆环 $1<|z|<R$ 的映射(见题 **299**).

2) 圆 $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<R\quad(0<R<\infty)$.

在题 **335** 至 **337** 中,构造已知函数的黎曼面.

335. 1) $w=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$; 2) $w=\sqrt{z^2-1}$.

336. 1) $w=\sqrt{z(z^2+1)}$; 2) $w=\sqrt{\frac{z^2+1}{z}}$.

337. $w=\sqrt[3]{z^2-1}$.

---

1) 我们在这里仅给出这类问题中最基本的习题,第八章 §2 专门讨论黎曼面.

§4. 初等超越函数

基本超越函数

338. 在映射 $w=e^z$ 之下，下列图形变换成什么：

1) 正交网格 $x=C$, $y=C$;

2) 直线 $y=kx+b$;

3) 带形 $\alpha<y<\beta$ $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi)$;

4) 直线 $y=x$ 与 $y=x+2\pi$ 之间的带形；

5) 半带形 $x<0$, $0<y<\alpha\leqslant 2\pi$;

6) 半带形 $x>0$, $0<y<\alpha\leqslant 2\pi$;

7) 矩形 $\alpha<x<\beta$, $\gamma<y<\delta$ $(\delta-\gamma\leqslant 2\pi)$.

339. 在映射 $w=\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ 下，上半平面的原象是什么？当 $n\to\infty$ (n 为自然数)时，上半平面的原象的极限是什么？

340. 在映射 $w=\ln z$ 之下，下列图形变换成什么：

1) 极网格 $|z|=R$, $\arg z=\theta$;

2) 对数螺线 $r=Ae^{k\varphi}$ $(A>0)$;

3) 角 $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$;

4) 扇形 $|z|<1$, $0<\arg z<\alpha\leqslant 2\pi$;

5) 沿线段 $[r_1, r_2]$ 截开的圆环 $r_1<|z|<r_2$.

函数 $w=\xi+i\eta=\ln\dfrac{a+z}{a-z}$ 的实部与虚部称为点 $z=x+iy$ 关于极点 $\pm a(a>0)$ 的双极坐标.

341. 1) 证明函数 w 将具有截口 $(-\infty, -a]$ 与 $[a, \infty)$ 的整个 z-平面单叶地映射到 w-平面的带形：$-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$，直线 $\eta=\pi$ 对应于截口的上缘，而 $\eta=-\pi$ 对应于下缘(图 5)；

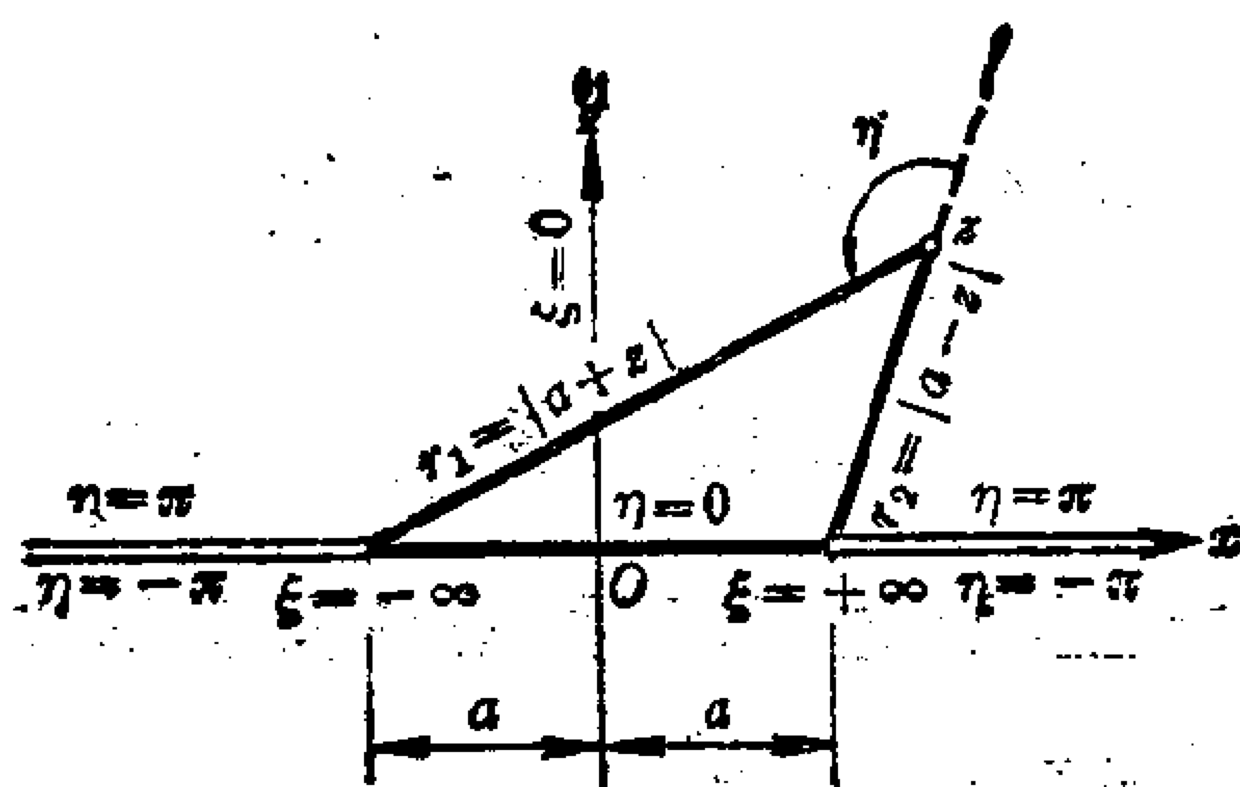


图 5

2) 验证下列等式成立:

$$x=\frac{a\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi+\cos\eta},\quad y=\frac{a\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi+\cos\eta},$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=r=a\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\xi-\cos\eta}{\operatorname{ch}\xi+\cos\eta}};$$

3) 证明线段 $\xi=\xi_0$, $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ 的原象是关于点 $\pm a$ 的阿波洛尼厄斯圆:

$$(x-a\operatorname{cth}\xi_0)^2+y^2=\left(\frac{a}{\operatorname{sh}\xi_0}\right)^2$$

(线段 $\xi=0$, $-\pi\leqslant\eta\leqslant\pi$ 的原象为纵坐标轴, 图 6);

4) 证明直线 $\eta=\eta_0$ 的原象是过点 $\pm a$ 的圆弧

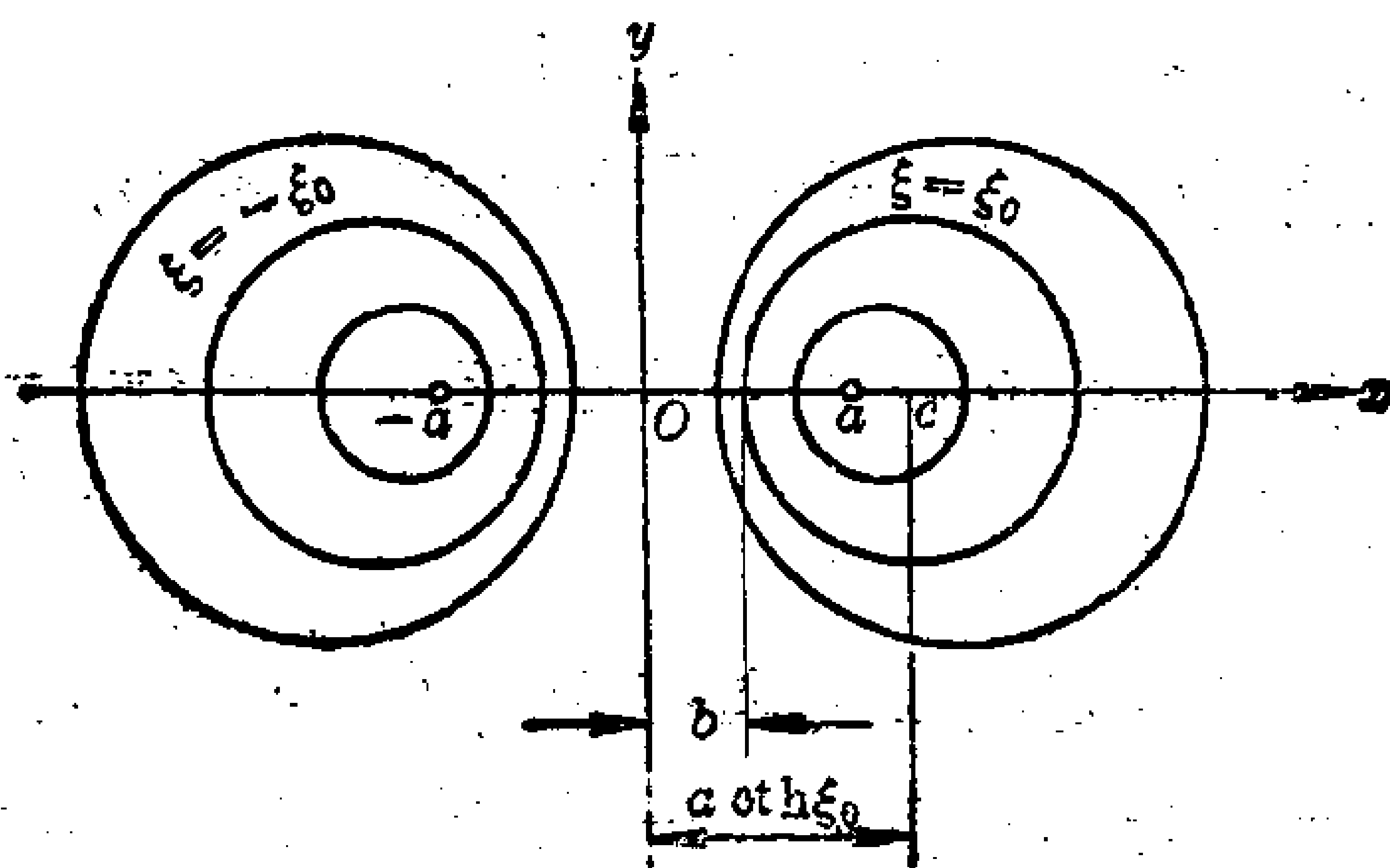


图 6

$$x^2+(y+a\operatorname{ctg}\eta_0)^2=\left(\frac{a}{\sin\eta_0}\right)^2,$$

当$\eta_0>0$时，弧在上半平面，而当$\eta_0<0$时，弧在下半平面. 线段$[-a, a]$对应于直线$\eta=0$. 对应于值$\eta=\eta_0$与$\eta=\eta_0-\pi(\eta_0>0)$的圆弧互补，构成一个圆周(图 7);

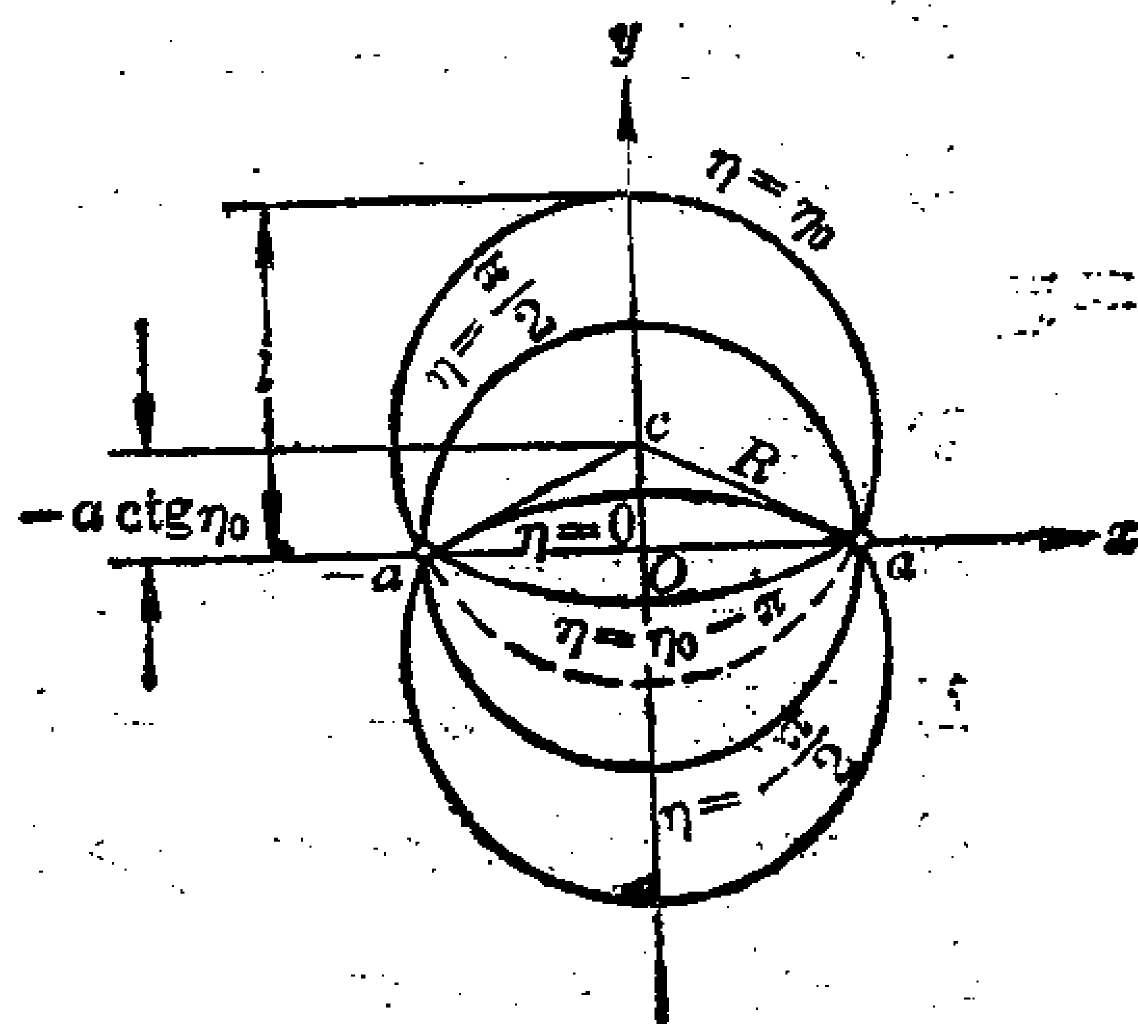


图 7

5) 求出线段b(参见图 6)与l(参见图 7)的长度.

注. 在z-平面上这样构成的坐标网格称为双极网格.

342. 在映射$w=\cos z$之下，下列图形变换成什么：

1) 正交网格$x=C$, $y=C$;

2) 半带形$0<x<\pi$, $y<0$;

3) 半带形$0<x<\frac{\pi}{2}$, $y>0$;

4) 半带形$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $y>0$;

5) 带形$0<x<\pi$;

6) 矩形$0<x<\pi$; $-h<y<h$ $(h>0)$.

343. 在映射$w=\arcsin z$之下，下列图形变换成什么：

1) 上半平面;

2) 沿实轴上射线$(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$截开的平面;

3) 第一象限;

4) 沿实轴上射线$(-\infty, -1]$截开的半平面$x<0$.

344. 在映射$w=\operatorname{ch} z$之下，下列图形变换成什么：

1) 正交网格 $x=C$, $y=C$;

2) 带形 $0<y<\pi$;

3) 半带形 $x>0$, $0<y<\pi$.

345. 在映射 $w=\mathrm{Arsh}\, z$ 之下，下列图形变换成什么：

1) 沿虚轴上的射线 $1\leqslant y<\infty$ 与 $-\infty<y\leqslant -1$ 截开的平面；

2) 第一象限.

346. 在映射 $w=\mathrm{tg}\, z$ 之下，下列图形变换成什么：

1) 正交网格 $x=C$, $y=C$;

2) 半带形 $0<x<\pi$, $y>0$;

3) 带形 $0<x<\pi$;

4) 带形 $0<x<\frac{\pi}{4}$;

5) 带形 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$.

347. 在映射 $w=\mathrm{cth}\, z$ 之下，下列图形变换成什么：

1) 带形 $0<y<\pi$; 2) 半带形 $0<y<\pi$, $x>0$.

归结为带形与半带形映射的映射

在题 **348** 至 **355** 中，将给定的区域映射到上半平面.

348. 由直线 $y=x$, $y=x+h$ 所界的带形.

349. 半带形 $x<1$, $0<y<h$.

350. 由圆 $|z|=2$, $|z-1|=1$ 所界的圆弧二角形.

351. 由圆 $|z|=2$, $|z-3|=1$ 所界的区域(除去两个圆的平面).

352. 由不等式

$$|z-1|>1,\ |z+1|>1,\ \mathrm{Im}\, z>0$$

所定义的区域(除去两个半圆的上半平面).

353. 包含于共焦抛物线 $y^2=4(x+1)$ 与 $y^2=8(x+2)$ 之间的区域.

提示：参见题 **272**(2).

354. 求出将圆 $|z|=1$ 与直线 $\mathrm{Im}\,z=1$ 所界的区域(除去圆的半平面 $\mathrm{Im}\,z<1$)映射到下列区域的函数 $w(z)$：

1) 圆 $|w|<1$，附加规范条件

$$w(-3i)=0,\ \arg w'(-3i)=\frac{\pi}{3};$$

2) 圆 $|w|<1$，附加规范条件

$$w(-3i)=\frac{-1+i}{2},\ \arg w'(-3i)=\frac{\pi}{2};$$

3) 上半平面，附加规范条件

$$w(-3i)=1+i,\ \arg w'(-3i)=\pi.$$

对称原理的应用

355. 将下列区域映射到上半平面：

1) 沿射线 $x=\frac{1}{2}$, $h\leqslant y<\infty$ 截开的带形 $0<x<1$;

2) 沿射线 $x=\frac{1}{2}$, $h_1\leqslant y<\infty$ 与 $x=\frac{1}{2}$, $-\infty<y\leqslant h_2$ $(h_2<h_1)$ 截开的带形 $0<x<1$.

提示：首先将带形 $0<x<\frac{1}{2}$ 映射到上半平面. 按对称原理，映射函数将已知区域映射到有某一截口的整个平面.

在题 **356** 至 **366** 中，将给定的区域映射到上半平面.

356. 沿线段 $0\leqslant x\leqslant h$, $y=0$ $(h<1)$ 截开的带形 $0<x<1$.

357. 沿线段 $0\leqslant x\leqslant h_1$, $y=0$ 与 $1-h_2\leqslant x\leqslant 1$, $y=0$ $(h_1+h_2<1)$ 截开的带形 $0<x<1$.

358. 沿线段 $x=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant h$ 截开的半带形 $0<x<\pi$, $y>0$.

359. 沿射线 $x=\frac{\pi}{2}$, $h\leqslant y<\infty$ $(h>0)$ 截开的半带形 $0<x<\pi$, $y>0$.

360. 沿线段 $x=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant h_1$ 与射线 $x=\frac{\pi}{2}$, $h_2\leqslant y<\infty$ $(h_2>h_1)$ 截开的半带形 $0<x<\pi$, $y>0$.

361. 由圆 $|z-1|=1$, $|z+1|=1$ 所界，沿射线 $2\leqslant x<\infty$, $y=0$ 截开的区域.

362. 由圆 $|z-1|=1$, $|z-2|=2$ 所界，沿线段 $y=0$, $2\leqslant x\leqslant a$ $(a<4)$ 截开的区域.

363. 由圆 $|z-1|=1$, $|z-2|=2$ 所界，沿线段 $y=0$, $2\leqslant x<a$ 与 $y=0$, $b\leqslant x\leqslant 4$ $(a<b)$ 截开的区域.

364. 由虚轴与圆 $|z-1|=1$ 所界，沿线段 $y=0$, $2\leqslant x\leqslant a$ 与射线 $y=0$, $b\leqslant x<\infty$ $(a<b)$ 截开的区域.

365. 由圆 $|z-1|=1$, $|z+1|=1$ 所界，沿线段 $x=0$, $-\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ $(\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0)$ 截开的区域.

366. 沿线段 $x=0$, $0\leqslant y\leqslant h$ 截开的区域 $|z-1|>1$, $|z+1|>1$, $\operatorname{Im} z>0$（区域 $|z-1|>1$, $|z+1|>1$, $\operatorname{Im} z>0$ 即为除去两个半圆的上半平面）.

367. 将抛物线 $y^2=4\alpha^2(x+\alpha^2)$ 的内部映射到上半平面，以及单位圆.

提示：沿着抛物线的对称轴作一截口，（用函数 $\sqrt{z}$）将抛物线的上半部分映射到半带形，然后映射到半平面；应用对称原理.

368*. 将沿线段 $0\leqslant y\leqslant a$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,$

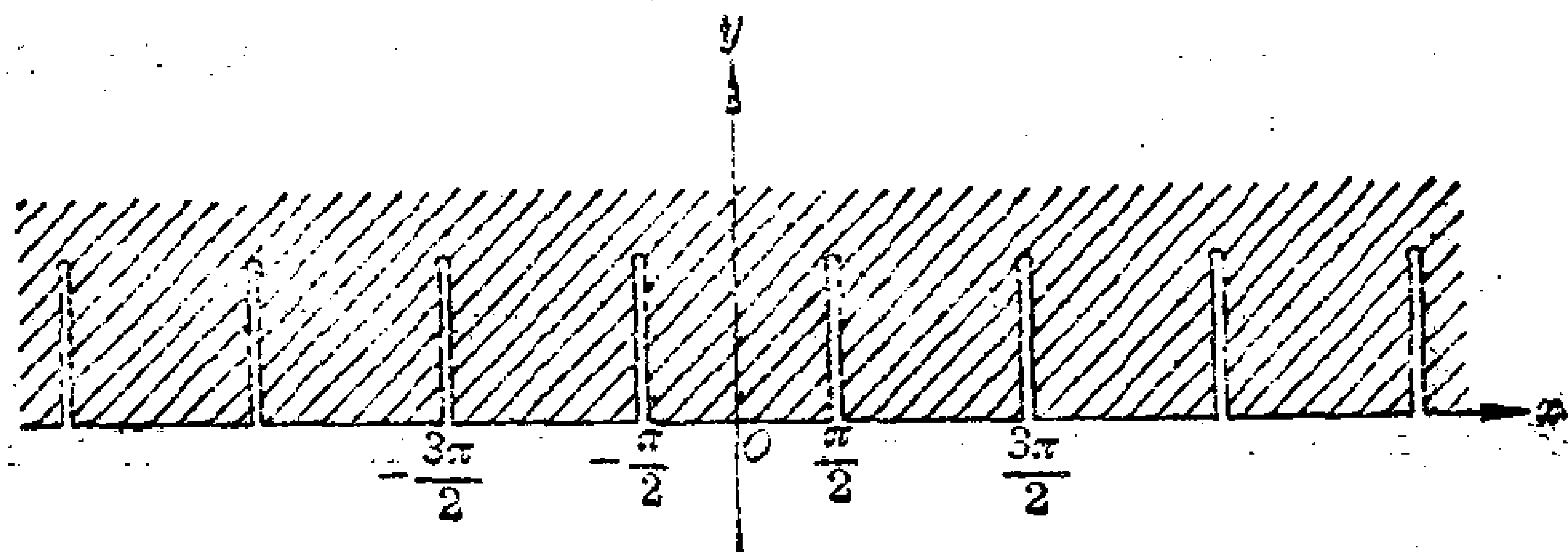


图 8

…)截开的上半平面映射到上半平面(图 8).

369. 将有平行截口 $-a\leqslant x\leqslant a,\ y=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 的平面映射到沿实轴上线段 $[k\pi-b,\ k\pi+b]\ \left(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots;\ 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$ 截开的平面.

提示：沿虚轴作一附加的截口，将由此得到的区域之一映射到上半平面，并应用对称原理.

370. 将沿射线 $\left(-\infty,\ -\frac{\pi}{2}\right],\ \left[\frac{\pi}{2},\ +\infty\right)$ 与线段 $-a\leqslant y\leqslant a,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 截开的平面映射到单位圆外部(图 9).

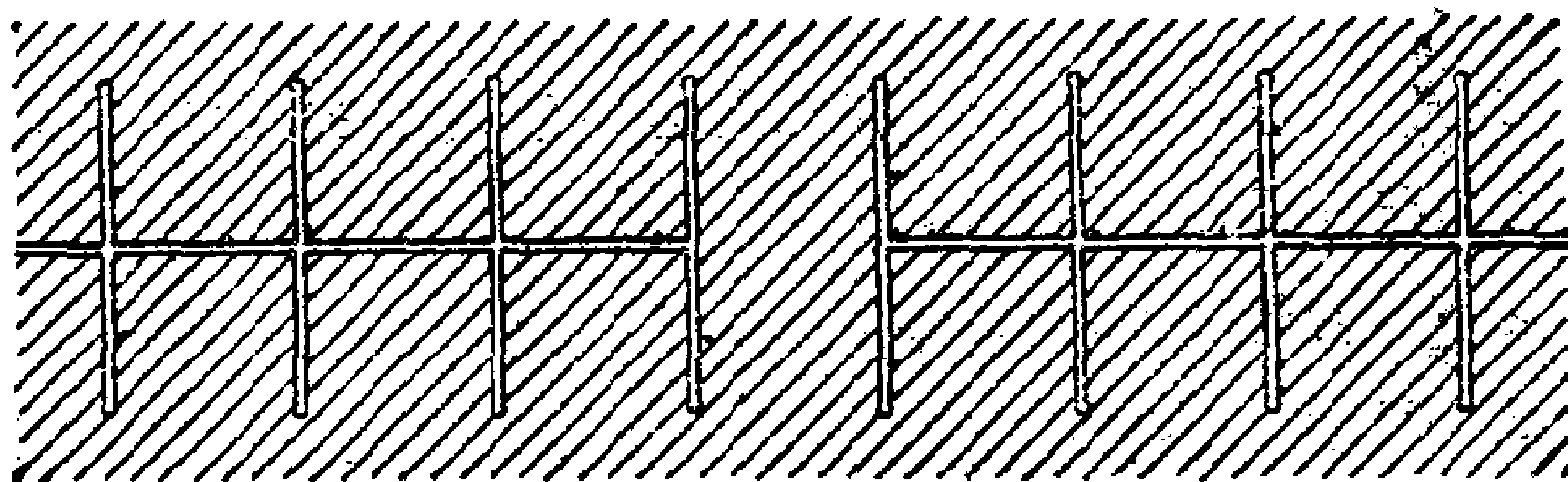


图 9

提示：在解题 368 时得到的函数将已知区域映射到沿射

线$\left(-\infty, -\dfrac{1}{\operatorname{arc\,sin}\dfrac{1}{\operatorname{ch} a}}\right], \left[\dfrac{1}{\operatorname{arc\,sin}\dfrac{1}{\operatorname{ch} a}}, +\infty\right)$截开的平面.

371. 将沿射线$(-\infty, p]$, $[q, +\infty)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant p<q\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$与线段$-a\leqslant y\leqslant a$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$截开的平面映射到上半平面(图 10).

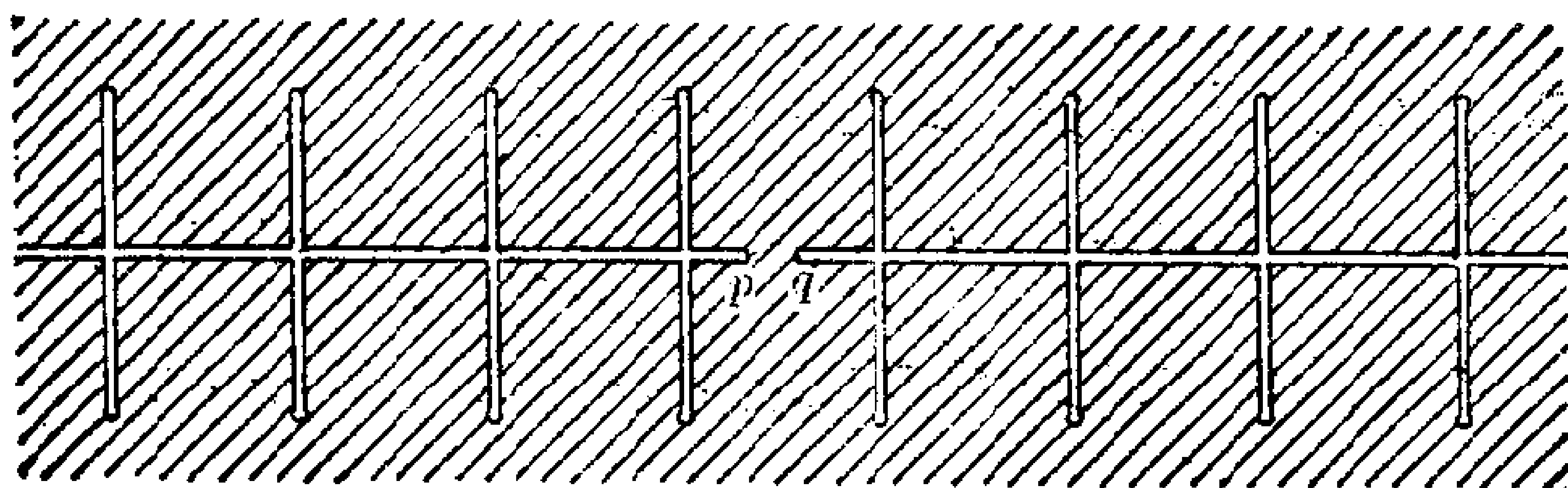


图 10

372*. 将沿射线$0\leqslant y<\infty$, $x=\dfrac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$截开的平面映射到上半平面.

初等多叶映射

在题**373**至**376**中, 映射导致多叶区域(参见第50页的脚注).

373. 求出函数$w=e^z$将下列区域映射成的区域:

1) 矩形$0<x<a$, $0<y<b$;

2) 半带形$0<x<a$, $y>0$;

3) 带形$0<x<a$.

374. 求出函数$w=\cos z$将下列区域映射成的区域:

1) 带形$-\pi/2<x<\pi/2$;

2) 带形$0<x<2\pi$.

375. 求出在函数 $w=\operatorname{tg} z$ 作用下，带形 $0<x<2\pi$ 映射成的区域.

376. 函数 $w=e^{1/z}$ 将 z–平面映射到一黎曼面上，试构造此黎曼面。

§5. 单叶性边界、凸性边界与拟星形性的边界

设 $w=f(z)$ 是在坐标原点解析的函数，且 $f(0)=0$.

在题 **377** 至 **385** 中，r_1 表示圆心在坐标原点、使函数 $w=f(z)$ 在其内为单叶的圆的最大半径；r_2 表示圆心在坐标原点、函数 $w=f(z)$ 将其单叶地映射到一个凸区域的圆的最大半径，而 r_3 表示圆心在坐标原点、函数 $w=f(z)$ 将其单叶地映射到关于点 $w=0$ 为拟星形的区域上的圆的最大半径(一区域称为关于一已知点为拟星形的，如果区域的任一点能与已知点用一条完全落在区域内的直线段相联接). 显然有 $r_2\leqslant r_3\leqslant r_1$.

377. 对函数 $w=\dfrac{z}{1-z}$ 求出 r_1, r_2, r_3, 并作出圆 $|z|<r_1$, $|z|<r_2$, $|z|<r_3$ 的象.

378. 对下列函数求出 r_1:

1) $w=z+z^2$; 2) $w=z+az^2$ (a 为实数);

3) $w=z/(1-z)^2$.

379. 证明: 在映射 $w=f(z)$ 下, 圆 $|z|=r$ 的象的曲率由公式 $k=\dfrac{1+\operatorname{Re}[zf''(z)/f'(z)]}{|zf'(z)|}$ 表示.

380. 证明当且仅当对所有的 $\varphi(z=re^{i\varphi})$ 有

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\pi}{2}+\varphi+\arg f'(z)\right]\equiv 1+\operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\geqslant 0$$

时, 解析函数 $f(z)$ 将圆 $|z|=r$ 映射到一条凸曲线上。

381. 证明当且仅当对所有的 $\varphi(z=re^{i\varphi})$ 有

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg f(z)=\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\geqslant 0$$

时，解析函数 $f(z)$ ($f(0)=0$) 将圆 $|z|<r$ 映射到关于点 $w=0$ 为拟星形的区域上.

382. 证明：1) 若函数 $w=f(z)$ ($f(0)=0$) 将圆 $|z|<1$ 映射到关于点 $w=0$ 为拟星形的区域上，则函数 $w_1=\int_0^z\frac{f(t)}{t}dt$ 将同一圆映射到一个凸区域；

2) 若 $w=f(z)$ 将圆 $|z|<1$ 映射到一个凸区域上，则 $w_1=zf'(z)$ 将此圆映射到关于点 $w=0$ 为拟星形的区域.

383. 对下列函数求 r_2：1) $w=z+z^2$；2) $w=z+az^2$ (a 为实数)；3) $w=z/(1-z)^2$.

384. 对函数 $w=e^z-1$ 求 r_1 与 r_2.

385. 对下列函数求 r_3：1) $w=z+z^2$；2) $w=z+az^2$ (a 为实数)；3) $w=z/(1-z)^2$。

提示：解题**385**(3)时，从不等式 $\frac{\partial}{\partial\varphi}[\varphi+\arg f'(z)]\geqslant 0$ 着手较为方便。

第 三 章

积分与幂级数

此处及以后除另行说明外，简单(即无自交点)闭围道都取正方向。

§1. 复变函数的积分

386. 由直接求和证明下列等式:

1) $\int_{z_0}^{z_1} dz = z_1 - z_0$; 2) $\int_{z_0}^{z_1} z\,dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2)$.

387. 设 C 是所围区域的面积为 S 的简单闭围道, 证明下列等式:

1) $\int_C x\,dz = iS$; 2) $\int_C y\,dz = -S$; 3) $\int_C \bar{z}\,dz = 2iS$.

388. 沿下列路径计算积分 $I_1 = \int x\,dz$, $I_2 = \int y\,dz$:

1) 点 $z = 2 + i$ 的半径矢量;

2) 半圆 $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (始点为 $z = 1$);

3) 圆 $|z - a| = R$.

389. 沿下列路径计算积分 $\int |z|\,dz$:

1) 点 $z = 2 - i$ 的半径矢量;

2) 半圆 $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$ (始点为 $z = 1$);

3) 半圆 $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ (始点为 $z = -i$);

4) 圆 $|z| = R$.

390. 计算积分 $\int_C |z|\bar{z}\,dz$, 其中 C 是由上半圆 $|z| = 1$ 与线

段 $-1\leqslant x\leqslant 1,\ y=0$ 组成的闭围道.

391. 计算积分$\int_C \frac{z}{\bar{z}}dz$, 其中 C 是图 11 所示的半圆环的边界.

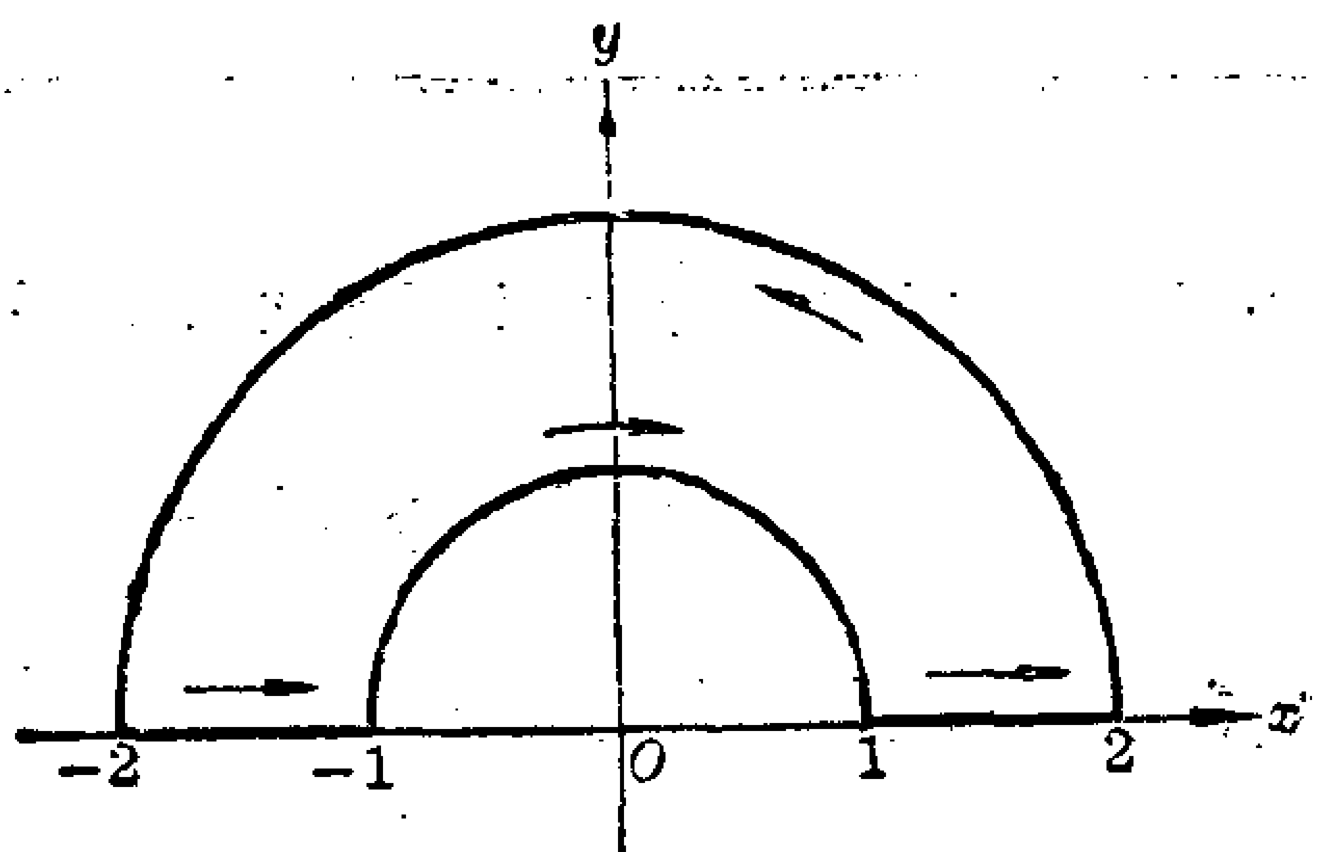


图 11

392. 计算积分$\int (z-a)^n dz$ (n 为整数):

1) 绕半圆 $|z-a|=R,\ 0\leqslant \arg(z-a)\leqslant \pi$ (始点为 $z=a+R$);

2) 绕圆 $|z-a|=R$;

3) 绕中心在点 a, 边与坐标轴平行的正方形周界.

在题 **393** 至 **396** 中, 积分号下多值函数的枝是通过给出它在积分围道某点上的值而选定的. 若围道是闭的, 则积分路径的始点常取为给出被积函数之值的那一点(注意, 积分值依赖于始点的选取).

393. 沿下列围道计算积分$\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$:

1) 半圆 $|z|=1,\ y\geqslant 0,\ \sqrt{1}=1$;

2) 半圆 $|z|=1,\ y\geqslant 0,\ \sqrt{1}=-1$;

3) 半圆 $|z|=1,\ y\leqslant 0,\ \sqrt{1}=1$;

4) 圆 $|z|=1,\ \sqrt{1}=1$;

5) 圆 $|z|=1,\ \sqrt{-1}=i$.

394. 计算积分$\int_C \operatorname{Ln} z\,dz$. 其中$C$为

1) 单位圆, $\operatorname{Ln} 1=0$;

2) 单位圆, $\operatorname{Ln} i=\dfrac{\pi i}{2}$;

3) 圆$|z|=R$, $\operatorname{Ln} R=\ln R$;

4) 圆$|z|=R$, $\operatorname{Ln} R=\ln R+2\pi i$.

395. 计算积分$\int_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z\,dz$, 其中$n$为整数, 且

1) $\operatorname{Ln} 1=0$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)=\pi i$.

396. 计算积分$\int_{|z|=1} z^\alpha dz$, 其中α为一任意复数, 且$1^\alpha=1$.

397. 证明任意选取函数a^z的初始值都有$\int_{|z|=1} a^z dz=0$.

398. $\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)$取何值时下列积分存在:

1) $I_1=\int e^{-\frac{1}{z}} dz$; 2) $I_p=\int e^{-\frac{1}{z^p}} dz$ (p为自然数),

其中积分是沿点$z=e^{i\alpha}$的半径矢量而取的.

399. 证明: 若$|a|\neq R$, 则

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a|\,|z+a|}<\frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

400. 证明下列论断:

1) 若$f(z)$在原点邻域内连续, 则

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,d\varphi=2\pi f(0);$$

2) 若$f(z)$在点$z=a$的邻域内连续, 则

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)\,dz}{z-a}=2\pi i f(a).$$

401. 证明下列论断:

1) 若$f(z)$在半带形$x\geqslant x_0$, $0\leqslant y\leqslant h$内连续, 且存在与y

无关、关于 y 为一致的极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+iy)=A$，则

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\beta_x} f(z)\,dz=iAh,$$

其中 β_x 为铅垂线段 $0\leqslant y\leqslant h$，方向向上；

2）若 $f(z)$ 在扇形 $0<|z-a|\leqslant r_0$，$0\leqslant\arg(z-a)\leqslant\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$ 内连续，且存在极限

$$\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]=A,$$

则

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz=iA\alpha,$$

其中 γ_r 是在已知扇形内的圆 $|z-a|=r$ 的正方向圆弧；

3）若 $f(z)$ 在区域 $|z|\geqslant R_0$，$0\leqslant\arg z\leqslant\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)$ 内连续，且存在极限 $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=A$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz=iA\alpha,$$

其中 Γ_R 是在已知区域内的圆 $|z|=R$ 上(关于原点)的正方向圆弧.

402. 证明下列定理：

1）若 $f(z)$ 在区域 $|z|\geqslant R_0$，$\operatorname{Im} z\geqslant a$（$a$ 为一固定实数）内连续，且在此区域内有 $f(z)\to 0$（当 $z\to\infty$ 时)，则对任何正数 m

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{imz}f(z)\,dz=0,$$

其中 Γ_R 是圆 $|z|=R$ 位于给定区域内的一段弧(约当(Jordan)引理)；

提示：在估计绕半圆 $|z|=R$，$\operatorname{Im} z>0$ 的积分之模时，应用不等式 $\sin\theta\geqslant 2\theta/\pi\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$；在估计沿位于下半平面内的弧($a<0$ 的情形)的积分之模时，应用下述事实：当 $R\to\infty$ 时，每一段弧的长度趋于 $|a|$.

2) 若$f(z)$在半平面$\mathrm{Re}\,z\geqslant\sigma$（$\sigma$为一固定实数）内连续，且在此半平面内有$f(z)\to 0$（当$z\to\infty$时），则对任何负数$t$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}e^{zt}f(z)\,dz=0,$$

其中Γ_R是圆弧$|z|=R$，$\mathrm{Re}\,z\geqslant\sigma$．若$f(z)$在半平面$\mathrm{Re}\,z\leqslant\sigma$内连续，则当$t$为正数，$\Gamma_R$为圆弧$|z|=R$，$\mathrm{Re}\,z\leqslant\sigma$时，结论仍成立．

§2．柯西积分定理[1)]

403．证明：若路径不通过原点，则

$$\int_1^z\frac{d\zeta}{\zeta}=\ln r+i\varphi+2\pi ik,$$

其中k为整数，表示积分路径关于原点的绕圈次数（$z=re^{i\varphi}$）．

404．证明：若路径不通过点$\pm i$，则

$$\int_0^1\frac{d\zeta}{1+\zeta^2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

其中k为整数．

405．证明：若C为任一不通过点a的简单闭围道，n为整数，则

$$\int_C(z-a)^n\,dz=\begin{cases}0 & \text{若 } n\neq-1,\\ 2\pi i & \text{若 } n=-1,\ a\text{ 在 }C\text{ 内},\\ 0 & \text{若 } n=-1,\ a\text{ 在 }C\text{ 外}.\end{cases}$$

406．在以下较强的形式中，柯西积分定理仍成立：若$f(z)$在由简单可求长围道C所界的闭区域$\overline{G}$内连续，又在G内为解析，则$\int_C f(z)\,dz=0$．试对拟星形围道[2)]的情形证明之．

1) 本节与下节中涉及的某些积分计算的习题，主要是解说性的．大多数这类习题都归于残数理论的应用，在第4章§4中给出．

2) 如果从某点出发的每条射线与围道只相交一点，则称围道关于该点拟星形．

提示：假定 C 关于原点为拟星形，考虑围道 C_λ：$\zeta=\lambda z$ $(0<\lambda<1,\ z\in C)$，再求 $\lambda\to 1$ 时的极限.

407. 证明下列论断：

1) 若 $f(z)$ 在带形 $0\leqslant y\leqslant h$ 内解析，$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x+iy)=0$，且积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ 存在，则积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\,dx$ 也存在，且这两个积分相等；

2) 若 $f(z)$ 在角 $0\leqslant \arg z\leqslant\alpha\,(0<\alpha\leqslant 2\pi)$ 内解析，

$$\lim_{z\to\infty} z f(z)=0,$$

且积分 $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ 存在，则沿射线 $z=re^{i\alpha}$，$0\leqslant r<\infty$ 的积分 $\int f(z)\,dz$ 也存在，且这些积分都相等.

提示：利用题 **401** 的结果.

408. 证明 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$.

提示：沿矩形 $|x|\leqslant R,\ 0\leqslant y\leqslant b$ 的边界对函数 $f(z)=e^{-z^2}$ 积分，并应用泊松(Poisson)积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.$$

409. 证明等式 $\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx=\int_0^{\infty}\sin x^2\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$（菲涅耳(Fresnel)积分）.

提示：沿扇形 $0\leqslant|z|\leqslant R,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}$ 的边界对函数 $f(z)=e^{iz^2}$ 积分，并利用题 **402**(1) 的结果（令 $z^2=\zeta$）.

410. 证明 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$（狄利克雷积分）.

提示：沿区域 $r\leqslant|z|\leqslant R,\ 0\leqslant\arg z\leqslant\pi$ 的边界对函数

$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$ 积分，并利用题 **401** 与 **402** 的结果。

411. 证明对 $0<s<1$ 下列等式成立：

1) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,dx=\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$;

2) $\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx=\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}$.

提示：沿区域 $r\leqslant|z|\leqslant R,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant 0$ 的边界对函数 $f(z)=z^{s-1}e^{-iz}$ 积分；利用题 **401**(2) 与 **402**(1) 的结果以及 Γ-函数的积分表达式：

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx.$$

§3 柯西积分公式

在本节各题中，C 都表示简单闭可求长围道。

412. 计算积分 $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z^2+9}$：若

1) 点 $3i$ 在围道 C 内，而点 $-3i$ 在 C 外；

2) 点 $-3i$ 在围道 C 内，而点 $3i$ 在 C 外；

3) 点 $\pm3i$ 都在围道 C 内。

413. 假设围道 C 不通过点 $0,\ 1,\ -1$，试对围道 C 的不同位置，求出积分 $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z(z^2-1)}$ 所有可能的值。

414. 若 $\omega_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)\ (z_i\neq z_j)$，又若围道 C 不通过每一点 z_i，试问积分 $\displaystyle\int_C\frac{dz}{\omega_n(z)}$ 能取多少个不同的值？

415. 计算积分 $\displaystyle\int_{|z-a|=a}\frac{zdz}{z^4-1}$，$a>1$。

416. 若围道 C 包含圆 $|z|\leqslant a$ 于其内部，计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z\,dz}{z^2+a^2}.$$

417. 若点 a 位于围道 C 内，计算积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{ze^z\,dz}{(z-a)^3}$.

提示：利用柯西积分的导数公式.

418. 计算积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z\,dz}{z(1-z)^3}$，若：

1) 点 0 在围道 C 内，而点 1 在 C 外；

2) 点 1 在围道 C 内，而点 0 在 C 外；

3) 点 0 与 1 都在围道 C 内.

419. 设简单闭围道 C 包含原点于其内部，函数 $f(z)$ 在 C 所界的区域内解析. 证明，对 $\mathrm{Ln}\,z$ 的任何一枝

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f'(z)\,\mathrm{Ln}\,z\,dz=f(z_0)-f(0),$$

其中 z_0 为积分的始点.

提示：用分部积分法.

420. 计算积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C z^2\,\mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}\,dz$，若对 $a>0$，$\mathrm{Ln}\,a=\ln a$，又围道 C 为：

1) 圆 $|z|=2$；

2) 圆 $|z-1|=1$，$z=1+i$ 是积分的始点.

421. 由刘维尔(Liouville)定理，在全平面上解析且有界的函数 $f(z)$ 为常数. 试通过计算积分

$$\int_{|z|=R}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}\quad(|a|<R,\ |b|<R)$$

并求其当 $R\to\infty$ 时的极限来证明此定理.

422. 设 $f(z)$ 在由围道 C 所界的闭区域内解析；设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 C 内不同的点，$\omega_n(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$. 证

明积分

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\cdot\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

为在点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 与 $f(z)$ 相等的 $n-1$ 次多项式（多项式 $P(z)$ 称为拉格朗日(Lagrange)插值多项式）.

423. 证明下述定理（关于无穷区域的柯西公式）：

设 C 为简单闭围道，围一有限区域 D。函数 $f(z)$ 在区域 D 的外部解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=A$。则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & \text{若点 } z \text{ 属于 } D \text{ 的外部,}\\ A, & \text{若点 } z \text{ 属于 } D,\end{cases}$$

其中取围道 C 的方向为关于区域 D 的正方向.

提示：首先考虑 $A=0$ 的情形.

424. 设函数 $f(z)$ 与围道 C 满足上题的条件。

证明：若坐标原点属于区域 D，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta z-\zeta^2}\,d\zeta=\begin{cases}0, & \text{若 } z\in D,\\ f(z)/z, & \text{若 } z\overline{\in} D.\end{cases}$$

§4 幂级数

求收敛半径

在题 **425** 至 **436** 中确定级数的收敛半径.

425. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. **426**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$. **427**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$.

428. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$. **429**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$. **430**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

431. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$. **432**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. **433**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n z^n$.

434. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n$. **435**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$.

436. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n$.

437. $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 $R(0<R<\infty)$. 确定下列级数的收敛半径:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}n^kc_nz^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)c_nz^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}n^nc_nz^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}c_n^kz^n$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)c_nz^n$.

438. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 的收敛半径分别为 r_1 与 r_2. 关于下列级数的收敛半径会有什么结论:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}z^n$.

439. 对 $|z|<1$, 求下列级数的和:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$.

在收敛圆边界上的性状

在题 **440** 至 **446** 中,讨论幂级数在收敛圆边界上的性状。

440. $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. **441.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. **442.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$.

443. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n$. **444.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{pn}}{n}$ (p 为自然数).

445. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}z^{3n-1}$. **446.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}$.

阿贝耳第二定理

按此定理, 若 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 收敛, 则

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (0<r<1).$$

447. 证明阿贝耳第二定理的逆定理不真，即给出一个发散级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 的例子，使得极限 $\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ 存在.

448. 应用阿贝耳第二定理与题 **439** 的解，证明下列等式：

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| \quad (0<|\varphi|\leqslant\pi)$；

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi-\varphi}{2} \quad (0<\varphi<2\pi)$；

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right| \quad (0<|\varphi|<\pi)$；

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (0<\varphi<\pi)$；

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\cos n\varphi}{n} = \ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) \quad (-\pi<\varphi<\pi)$；

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\varphi}{2} \quad (-\pi<\varphi<\pi)$.

449*. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}z^n}{n}$ 在收敛圆边界的所有点上都为非绝对收敛.

提示：若 $z=1$，则将此级数具有相同符号的项划归成一组，并证明由这些组作为项所构成的级数满足交错级数的莱布尼兹(Leibniz)判别法的条件．若 $|z|=1$ 而 $z\neq 1$，则利用题 **90** 中的定理，其中令 $a_n=(-1)^{[\sqrt{n}]}z^n$，$b_n=\frac{1}{n}$.

450. 证明：若正实数序列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0，且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径等于 1，则此级数除了可能在点 $z=1$ 之外，在圆 $|z|=1$ 上处处收敛.

提示：应用狄利克雷收敛性判别法(参见题88)。

451. 证明,若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆圆周的点 $\zeta = Re^{i\theta}$ 上收敛，则它在如下构成的任一闭区域 G 上一致收敛：G 属于收敛圆，位于从点 ζ 出发的圆 $|z| = R$ 的任意两条弦所组成的角的内部，且除了点 ζ 外不包含圆 $|z| = R$ 上的任何点。

注．此论断是更一般形式的阿贝耳第二定理。

§5. 泰 勒 级 数

将函数展开成泰勒(Taylor)级数

在题 452 至 466 中，将给定的函数展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$，并求出收敛半径。

452. $\operatorname{ch} z$. **453**. $\operatorname{sh} z$. **454**. $\sin^2 z$. **455**. $\operatorname{ch}^2 z$.

456. $(a+z)^{\alpha}$ $(a^{\alpha} = e^{\alpha \ln a})$. **457**. $\sqrt{z+i}$ $\left(\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.

458. $\frac{1}{az+b}$ $(b \neq 0)$. **459**. $\frac{z}{z^2-4z+13}$.

460. $\frac{z^2}{(z+1)^2}$. **461**. $\ln \frac{1+z}{1-z}$.

462. $\operatorname{Arc\,tg} z$ $(\operatorname{Arc\,tg} 0 = 0)$. **463**. $\operatorname{Ar\,sh} z$ $(\operatorname{Ar\,sh} 0 = 0)$.

464. $\ln(z^2-3z+2)$. **465**. $\int_0^z e^{z^2} dz$.

466. $\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$.

在题 467 至 472 中，将给定的函数展开成 $(z-1)$ 的幂级数，并求出收敛半径。

467. $\frac{z}{z+2}$. **468**. $\frac{z}{z^2-2z+5}$. **469**. $\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

470. $\sqrt[3]{z}\left(\sqrt[3]{1}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. **471.** $\ln z$.

472. $\sin(2z-z^2)$.

在题 **473** 至 **47**[illegible] 中，求出给定函数展开成 z 的幂级数的前五项.

473. $e^{z\sin z}$. **474.** $\sqrt{\cos z}$ （当 $z=0$ 时，$\sqrt{\cos z}=1$）.

475. $(1+$[illegible]$e^{z\ln(1+z)}$. **476.** e^{e^z}. **477.** $e^z\ln(1+z)$.

478. 1) 试给出函数 $\ln(1+e^z)$ 关于 z 的幂级数展开式（求出级数的系数间的递推关系）；

提示：先求出已知函数导数的展开式.

2) 证明展开式中 z 的奇次幂只有一项，即 $z/2$.

提示：可利用恒等式 $\ln(1+e^z)-\ln(1+e^{-z})=z$.

在题 **479** 至 **483** 中，用级数的乘法以及将一级数代入另一级数的方法，将给定的函数展开成 z 的幂级数.

479. $[\ln(1-z)]^2$. **480.** $[\mathrm{Ln}(1-z)]^2$ $(\mathrm{Ln}\,1=2\pi i)$.

481. $(\mathrm{Arc\,tg}\,z)^2$ $(\mathrm{Arc\,tg}\,0=0)$.

482. $\mathrm{Arc\,tg}\,z\ln(1+z^2)$ $(\mathrm{Arc\,tg}\,0=0)$.

483. $e^{\frac{z}{1-z}}$.

484. 证明：若函数 $\dfrac{1}{\cos z}$ 的展开式写成

$$\frac{1}{\cos z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

的形式，则数 E_{2n}（欧拉数）满足关系式

$$E_0=1,\quad E_0+\binom{2n}{2}E_2+\cdots+\binom{2n}{2n}E_{2n}=0.$$

485. 证明：若函数 $\dfrac{z}{e^z-1}$ 关于 z 的幂级数展开式写成

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,$$

则数 B_n（伯努利数）满足关系式

$$B_0=1, \binom{n+1}{0}B_0+\binom{n+1}{1}B_1+\cdots+\binom{n+1}{n}B_n=0.$$

486. 证明：除 B_1 外，所有带奇数足标的伯努利数都等于零.

提示：可利用恒等式 $\dfrac{z}{e^z-1}-\dfrac{(-z)}{e^{-z}-1}=-z$.

487. 将函数 $z\operatorname{ctg}z$ 展开成 z 的幂级数，并求由此得到的级数的收敛半径.

提示：可利用从欧拉公式推得的等式

$$z\operatorname{ctg}z=iz+\frac{2iz}{e^{2iz}-1}.$$

488. 将给定的函数展开成 z 的幂级数，并求由此得到的级数的收敛半径：

1) $\ln\dfrac{\sin z}{z}$；2) $\operatorname{tg}z$；3) $\ln\cos z$；4) $\dfrac{z}{\sin z}$.

489. 证明展开式

$$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

的系数满足关系 $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}(n\geqslant 2)$. 求出 c_n 与级数的收敛半径.

注. 数 c_n 称为斐波那契(Fibonacci)数.

490. 在展开式

$$\frac{A+Bz+Cz^2}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \quad (\alpha\neq 0)$$

中求出 c_0，c_1，c_2，并求出 c_n，c_{n-1}，c_{n-2} 与 c_{n-3} 之间的递推关系式$(n\geqslant 3)$.

多项式系的母函数

若在圆 $|t|<R$ 内有展开式

$$F(t, z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) t^n,$$

则函数 $F(t, z)$ 称为序列 $\{f_n(z)\}$ 的母函数．函数列 $\{f_n(z)\}$ 的某些性质常可通过其母函数的性质来证明．

491．伯努利多项式 $\varphi_n(z)$ 由展开式

$$t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)}{n!}t^n$$

定义．证明下列性质：

1) $\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)=nz^{n-1}$；

2) 若 m 为自然数，则

$$\frac{\varphi_{n+1}(m)}{n+1}=1+2^n+3^n+\cdots+(m-1)^n;$$

3) $\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k z^{n-k}$，其中 B_k 为伯努利数(参见题**485**)．

492．函数 $\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}$ 是勒让德 (Legendre) 多项式 $P_n(z)$ 的母函数：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz-t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)t^n.$$

证明下列关系式：

1) $(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0$；

2) $P_n(z)=P'_{n+1}(z)-2zP'_n(z)+P'_{n-1}(z)$；

3) $(2n+1)P_n(z)=P'_{n+1}(z)-P'_{n-1}(z)$．

提示：对母函数关于 t 与 z 求微分．

493．利用泰勒级数系数的积分公式证明：若 $-1<s<1$，则

$$P_n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta^n d\zeta}{\sqrt{1-2s\zeta+\zeta^2}},$$

其中 C 是圆心在点 $\zeta=0$，半径 $R>1$ 的圆．

494. 证明 $\frac{4-t^2}{4-4tz+t^2}$ 是切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

$$T_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z)$$

的母函数.

利用泰勒级数系数的积分公式证明: 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$4T_{n+1}(z)-4zT_n(z)+T_{n-1}(z)=0.$$

495. 埃尔米特(Hermite)-切比雪夫多项式由展开式

$$e^{2tz-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(z)}{n!}t^n$$

定义. 证明下列关系式:

1) $H_{n+1}(z)-2zH_n(z)+2nH_{n-1}(z)=0\quad(n\geqslant 1)$;

2) $H_n'(z)=2nH_{n-1}(z)\quad(n\geqslant 1)$;

3) $H_n''(z)-2zH_n'(z)+2nH_n(z)=0\quad(n\geqslant 0)$;

4) $H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n(e^{-z^2})}{dz^n}$.

496. 切比雪夫-拉盖尔(Laguerre)多项式由下式给出:

$$L_n(z)=e^z\frac{d^n(z^ne^{-z})}{dz^n}.$$

求出序列 $\{L_n(z)\}$ 的母函数, 并利用它得出关于 $L_{n-1}(z)$, $L_n(z)$ 与 $L_{n+1}(z)$ 的递推关系式.

注. 在题 **492** 至 **496** 中, 我们只考虑了所述多项式系的某些特殊的性质.

解微分方程

在题 **497** 至 **499** 中, 求出已知微分方程满足条件 $w(0)=0$, $w'(0)=1$ 的解.

497. $w''-z^2w=3z^2-z^4$.

498. $(1-z^2)w''-2zw'+n(n+1)w=0$.

499. $(1-z^2)w''-4zw'-2w=0$.

500. 通过建立一微分方程，使函数 $\cos(m\arcsin z)$ ($\arcsin 0=0$)为其一个解的方法，将此函数展开成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 的级数.

501. 微分方程

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{dw}{dz}-abw=0$$

称为超几何方程.

假定 c 不等于零或负整数，求出超几何方程的一个(在点 $z=0$)解析的解 $w(z)$，使满足条件 $w(0)=1$.

502. 证明超几何方程的通解有如下的形式(C 不等于整数)：

$$w=C_1F(a,\ b,\ c,\ z)$$
$$+C_2z^{1-c}F(a+1-c,\ b+1-c,\ 2-c,\ z),$$

其中 $F(a,\ b,\ c,\ z)$为上题中定义的函数(超几何级数).

503*. 证明：若 c 不等于零或负整数，则

$$\frac{dF(a,\ b,\ c,\ z)}{dz}=\frac{ab}{c}F(a+1,\ b+1,\ c+1,\ z).$$

§6. 柯西积分公式与幂级数的某些应用

解析函数的零点

504. 证明点 z_0 为解析函数 $f(z)$的 k 阶零点，当且仅当在点 z_0 的某个邻域内有等式 $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$，其中函数 $\varphi(z)$在点 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$.

505. 对下列函数求出零点 $z=0$ 的阶：

1) $z^2(e^{z^2}-1)$； 2) $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$； 3) $e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$.

506. 点 z_0 是函数 $f(z)$ 的 k 阶零点，又是函数 $\varphi(z)$ 的 l 阶零点. 试问对下列函数，点 z_0 是什么：

1) $f(z)\varphi(z)$； 2) $f(z)+\varphi(z)$； 3) $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$？

在题 **507** 至 **521** 中，求出已知函数所有零点的阶.

507. z^2+9. **508**. $\dfrac{z^2+9}{z^4}$. **509**. $z\sin z$.

510. $(1-e^z)(z^2-4)^3$. **511**. $1-\cos z$.

512. $\dfrac{(z^2-\pi^2)^2\sin z}{z^7}$. **513**. $\dfrac{1-\operatorname{ctg} z}{z}$. **514**. $e^{\operatorname{tg} z}$.

515. $\sin^3 z$. **516**. $\dfrac{\sin^3 z}{z}$. **517**. $\sin z^3$. **518**. $\cos^3 z$.

519. $\cos z^3$. **520**. $(\sqrt{z}-2)^3$.

521. $(1-\sqrt{2-2\cos z})^2$.

唯一性定理

522. 不恒等于常数且在整个有限平面内解析的函数，其零点序列(或一般地，A-点序列)能否有极限点？

523. 在点 $z=0$ 解析且在点 $z=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 取下列值的函数是否存在：

1) $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ \cdots$；

2) $0,\ \dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{4},\ 0,\ \dfrac{1}{6},\ \cdots,\ 0,\ \dfrac{1}{2k},\ \cdots$；

3) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6},\ \cdots,\ \dfrac{1}{2k},\ \dfrac{1}{2k},\ \cdots$；

4) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{5}{6},\ \dfrac{6}{7},\ \cdots,\ \dfrac{n}{n+1},\ \cdots$？

524. 在点 $z=0$ 解析且满足下列条件 (n 为自然数) 的函

数是否存在：

1) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$;

2) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$?

525. 函数 $\sin\frac{1}{1-z}$ 有一收敛于点 $z=1$ 的零点的无穷序列，但此函数不是常数，这是否与唯一性定理相矛盾？

用实部与虚部表示解析函数

526*. 函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 解析，且 $f(z_0)=c_0$. 证明

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)-\bar{c}_0.$$

527. 证明：在上题的条件下，

$$f(z)=2iv\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)+\bar{c}_0.$$

在题 528 至 531 中，已知解析函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 的实部或虚部，求此函数.

528. $u(x, y)=x^2-y^2+2$.

529. $u(x, y)=e^x(x\cos y-y\sin y)-\frac{y}{x^2+y^2}$.

530. $v(x, y)=x+y-3$.

531. $v(x, y)=\cos x\,\mathrm{sh}\,y-\mathrm{sh}\,x\sin y$.

柯西不等式

532. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内的展开式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n.$$

1) 证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^2d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}\quad(r<R).$$

2) 证明：若 $\max\limits_{|z|=r}|f(z)|=M(r)$，则系数 c_n 满足不等式（柯西不等式）

$$|c_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}\quad(r<R).$$

3) 证明：若柯西不等式中至少一个变成等式，即 $|c_k|=M(r)/r^k$，则函数 $f(z)$ 有形式 $f(z)=c_kz^k$.

提示：可利用从第1小题推出的不等式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}\leqslant[M(r)]^2.$$

533. 应用柯西不等式，证明刘维尔定理：在全平面解析且有界的函数 $f(z)$ 为常数.

注. 刘维尔定理的另一证明在题 **421** 中给出.

534. 证明点 $z=0$ 与函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的离 $z=0$ 最近的零点之间的距离不小于 $\dfrac{\rho|c_0|}{M+|c_0|}$，其中 ρ 是不超过级数收敛半径的任一数，而 $M=M(\rho)=\max\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$.

提示：证明函数 $f(z)$ 在区域 $\{z\,|\,|f(z)-c_0|<|c_0|\}$ 内无零点，再应用柯西不等式估计 $|f(z)-c_0|$.

535. 函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在 $|z|\leqslant r$ 上解析. 证明级数 $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_nz^n}{n!}$ 在整个平面上收敛，且对其和有上界

$$|\varphi(z)|<Me^{\frac{|z|}{r}},\quad|\varphi^{(k)}(z)|<\frac{M}{r^k}e^{\frac{|z|}{r}}\quad(M\text{ 为常数}).$$

单叶函数的面积定理

536. 设函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 在圆 $|z|\leqslant 1$ 内解析，且将此圆单叶地映射到面积为 S 的区域 G 上. 证明 $S=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2$.

提示：将计算面积 S 的公式写成极坐标形式.

注. 若去掉单叶性的条件，则当函数 $f(z)$ 的某些值在圆 $|z|\leqslant 1$ 内取几次，区域 G 的有关各个部分也计算几次.

537. 证明：若在上题中函数 $f(z)$ 仅在开圆 $|z|<1$ 内解析，且存在有限极限 $\lim_{r\to 1}S_r=S$，其中 S_r 是圆 $|z|\leqslant r<1$ 的象的面积，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2$ 收敛，其和为 $\frac{S}{\pi}$. 又证明：若 $\lim_{r\to 1}S_r=\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2$ 为发散级数.

538. 1) 利用题 **536** 的解证明：若 $f'(0)=1$，又若函数 $f(z)$ 将圆 $|z|\leqslant 1$ 保形且一对一地映射到区域 G 上，则区域 G 的面积不小于被映射圆的面积(到圆上的映射的极值性质)；

2) 证明：在圆 $|z|\leqslant R$ 内解析并满足条件

$$\int_0^{2\pi}|f(Re^{i\varphi})|^2d\varphi=M$$

的所有函数 $f(z)$ 中，线性函数将此圆映射到一个具有最小面积的区域上. 若 $f(0)=0$，试求此面积.

最 大 模 原 理

在题 **539** 至 **542** 中可应用最大模原理.

539. 证明：若函数 $f(z)\neq$常数，在区域 G 内解析且不为零，则 $|f(z)|$ 不能在区域内部取到最小值.

540. 1) 设一区域由函数 $f(z)$ 模的简单闭阶层曲线 (即

对其上所有点都有 $|f(z)|=$ 常数的曲线)所界，此区域及其边界包含在函数 $f(z)$ 的解析性区域内. 证明在此区域内部至少存在该函数 $[f(z)\neq C]$ 的一个零点.

2) 证明：若 $P(z)$ 为 n 次多项式，则其模 $|P(z)|=C$(双纽线)的阶层曲线至多能分解成 n 个连通的分支.

541. 证明许瓦尔兹引理：若函数 $f(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内解析，$f(0)=0$, 且 $|f(z)|\leqslant 1$, 则在整个圆内有 $|f(z)|\leqslant|z|$.

又证明：若 $|f(z)|=|z|$ 至少在此圆的一个内点上成立，则 $f(z)=e^{i\alpha}z$ (α 为实数).

提示：考虑函数 $f(z)/z$ 并应用最大模原理.

542. 证明：若在上题中条件 $f(0)=0$ 代以 $f(\alpha)=0(|\alpha|<1)$, 则当 $|z|\leqslant 1$ 时不等式 $|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|$ 成立。

提示：考虑函数 $\frac{1-\bar{\alpha}z}{z-\alpha}f(z)$。

第 四 章

劳伦级数. 单值解析函数的奇点. 残数及其应用

§1. 劳 伦 级 数

在题**543**至**560**中，将已知函数在给定的圆环内或在给定点的邻域内展开成劳伦(Laurent)级数. 在后一情形，确定使展开式成立的区域.

543. $\dfrac{1}{z-2}$，在点 $z=0$ 与 $z=\infty$ 的邻域内.

544. $\dfrac{1}{(z-a)^k}$ $(a\neq 0,\ k$ 为自然数)，在点 $z=0$ 与 $z=\infty$ 的邻域内.

545. $\dfrac{1}{z(1-z)}$，在点 $z=0,\ z=1,\ z=\infty$ 的邻域内.

546. $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0<|a|<|b|)$，在点 $z=0,\ z=a,\ z=\infty$ 的邻域内以及在圆环 $|a|<|z|<|b|$ 内。

547. $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$，在点 $z=2$ 的邻域内以及在圆环 $1<|z|<2$ 内.

548. $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$，在点 $z=i$ 与 $z=\infty$ 的邻域内.

549. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ $(|b|\geqslant|a|)$，在点 $z=\infty$ 的邻域内(函数的两枝都考虑).

550. $f(z)=\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$ $\left(\operatorname{Im}f\left(\dfrac{3}{2}\right)>0\right)$，在圆环 $1<|z|<2$ 内.

551. $z^2e^{1/z}$，在点 $z=0$ 与 $z=\infty$ 的邻域内.

552. $e^{\frac{1}{1-z}}$，在点 $z=1$ 与 $z=\infty$ 的邻域内.

553. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$，在点 $z=2$ 的邻域内.

554. $z^2\sin\dfrac{1}{z-1}$，在点 $z=1$ 的邻域内.

555. $e^{z+\frac{1}{z}}$，在区域 $0<|z|<\infty$ 内.

556. $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$，在区域 $0<|z|<\infty$ 内.

557. $\sin\dfrac{z}{1-z}$，在点 $z=1$ 与 $z=\infty$ 的邻域内(在后一情形，只限于求级数的前四项).

558. $\operatorname{ctg}z$，在点 $z=0$ 的邻域内，以及在圆环 $\pi<|z|<2\pi$ 内.

559. $\ln\dfrac{z-a}{z-b}$，在点 $z=\infty$ 的邻域内.

560. $\dfrac{1}{z-2}\ln\dfrac{z-i}{z+i}$，在点 $z=\infty$ 的邻域内以及在圆环 $1<|z|<2$ 内.

561. 下列函数在已知点的邻域内能否展开成劳伦级数：

1) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 2) $\cos\dfrac{1}{z}$, $z=\infty$;

3) $\sec\dfrac{1}{z-1}$, $z=1$; 4) $\operatorname{ctg}z$, $z=\infty$;

5) $\operatorname{th}\dfrac{1}{z}$, $z=0$; 6) $\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$, $z=0$;

7) $\dfrac{z}{\sin z-3}$, $z=\infty$;　　8) $\ln z$, $z=0$;

9) $\ln\dfrac{1}{z-1}$, $z=\infty$;　　10) $\ln\dfrac{z-1}{z+i}$, $z=\infty$;

11) $z^{\alpha}(=e^{\alpha\ln z})$, $z=0$.

562. 下列多值函数是否有能在已知点的邻域内展开成劳伦级数(特别,展开成泰勒级数)的单值分枝:

1) $\sqrt{z}$, $z=0$; 2) $\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$;

3) $\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z=\infty$;

4) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$;

5) $\sqrt[4]{z(z-1)^2}$, $z=\infty$;　　6) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$;

7) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=0$;　　8) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=\infty$;

9) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z=1$;　　10) $\sqrt{1+\sqrt[3]{\dfrac{z}{z+1}}}$, $z=\infty$;

11) $\operatorname{Ln}[(z-1)(z-2)]$, $z=\infty$;

12) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}$, $z=\infty$;

13) $\operatorname{Arc}\sin z$, $z=0$;　　14) $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(1+z)$, $z=0$;

15) $\operatorname{Ar}\operatorname{sh}(z+i)$, $z=0$;　　16) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\sin z}$, $z=1$;

17) $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{Arc}\sin z}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

563. 函数$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$在圆环$r\leqslant|z|\leqslant R$内解析,并将此圆环单叶地映射到某一区域$D$上.

1) 证明此区域的面积(S)为

$$S=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n|c_n|^2(R^{2n}-r^{2n});$$

2) 证明：当函数$f(z)$只在区域$r<|z|<R$内解析时，上述公式亦成立；等式两端可同时变成无穷（参见题**536**与**537**）.

564. 函数$f(z)$在区域$|z|>1$内单叶，且在此区域内展开成形如$f(z)=z+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots$的劳伦级数. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_{-n}|^2 \leqslant 1,$$

并指出此不等式的几何意义.

提示：利用下述事实：关于由圆$|z|=r>1$的象所界区域的面积S_r，我们有（$f(z)=u+iv$）

$$0 \leqslant S_r = \int_{|z|=r} u\,dv = \int_0^{2\pi} \frac{f+\bar{f}}{2} \cdot \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi}\right) d\varphi.$$

§2. 单值解析函数的奇点

在题**565**至**600**中，求出已知函数的奇点，确定它们是哪一类奇点，并讨论函数在无穷远点的性状[1].

565. $\frac{1}{z-z^3}$. **566**. $\frac{z^4}{1+z^4}$. **567**. $\frac{z^5}{(1-z)^2}$.

568. $\frac{1}{z(z^2+4)^2}$. **569**. $\frac{e^z}{1+z^2}$. **570**. $\frac{z^2+1}{e^z}$.

571. ze^{-z}. **572**. $\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$. **573**. $\frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$.

574. $\frac{1-e^z}{2+e^z}$. **575**. $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$. **576**. $\operatorname{th} z$.

577. $e^{-\frac{1}{z^2}}$. **578**. $ze^{\frac{1}{z}}$. **579**. $e^{\frac{z}{1-z}}$. **580**. $e^{z-\frac{1}{z}}$.

581. $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$. **582**. $\frac{1}{\sin z}$. **583**. $\frac{\cos z}{z^2}$. **584**. $\operatorname{tg} z$.

1) 在答案中对可去奇点与正则点不作区别.

585. $\operatorname{tg}^2 z$. **586**. $\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$. **587**. $\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}$.

588. $\operatorname{ctg} z-\dfrac{2}{z}$. **589**. $\dfrac{1}{\sin z-\sin a}$. **590**. $\dfrac{1}{\cos z+\cos a}$.

591. $\sin\dfrac{1}{1-z}$. **592**. $\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$.

593. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$. **594**. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z}$. **595**. $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$.

596. $e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$. **597**. $e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$. **598**. $e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$.

599. $\sin\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}\right)$. **600**. $\sin\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{z}}\right)$.

在题 **601** 至 **610** 中，讨论已知多值函数的每一个单值分枝在给定点的性状(对各个分枝,确定点是否为正则点,或是否为奇点;若为奇点,则指出是哪一类奇点).

601. $\dfrac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z=4$. **602**. $\dfrac{1}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}$, $z=1$.

603. $\dfrac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z=1$. **604**. $\cos\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=1$

605. $\dfrac{1}{(2+\sqrt{z})\sin(2-\sqrt{z})}$, $z=4$.

606. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=\left(1+\dfrac{1}{k\pi}\right)^2$, 其中 $k=\pm1, \pm2, \cdots$; 以及 $z=1$.

607. $\dfrac{1}{\sin\left(1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}}\right)}$, $z=\dfrac{2(1+k\pi)}{(1+k\pi)^2-1}$, 其中 $k=\pm1, \pm2, \cdots$; 以及 $z=\infty$.

608. $\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}}}$, $z=\infty$.

609. 1) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\operatorname{Ln} z}{2i}}$, $z=1$; 2) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\operatorname{Ln} z}{4i}}$, $z=1$.

610. $\sin\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\operatorname{Ln} z}{4i}\right)$, $z=1$.

611. 设$P_n(z)$与$Q_m(z)$分别为n次与m次多项式. 试描述下列函数在无穷远点的性状:

1) $P_n(z)+Q_m(z)$; 2) $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$; 3) $P_n(z)Q_m(z)$.

612. 证明下列两种定义等价:

1) 点z_0称为函数$f(z)$的n阶极点，若在z_0的邻域内，$f(z)$的劳伦展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_{-n}\neq 0,\ c_{-(n+1)}=c_{-(n+2)}=\cdots=0;$$

2) 点z_0称为函数$f(z)$的n阶极点，若在该点的某邻域内，$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$，其中函数$\varphi(z)$为解析，且$\varphi(z_0)\neq 0$.

613. 试给出在扩充平面上只有下列奇点的函数的例子:

1) 在无穷远点有二阶极点; 2) 在点$z=0$有二阶极点，展开式的主要部分为c_{-2}/z^2，且在无穷远点有一简单极点; 3) 在点$z_k=\omega^k$有简单极点，其中$\omega=e^{2\pi i/n}$($k=0, 1, 2, \cdots, n-1$).

614. 求出在扩充平面上只有下列奇点的函数的一般形式:

1) 一个简单极点;

2) 一个n阶极点;

3) 在点 $z=0$ 有一个二阶极点，展开式的主要部分为 $1/z^2$；

4) 在点 $z=0$ 有一个 n 阶极点，在无穷远点有一个 m 阶极点；

5) n 个一阶极点.

615. 设 $f(z)$ 为单值函数，在区域 G 内除极点外无其它奇点. 证明函数 $\dfrac{f'(z)}{f(z)-A}$（函数 $f(z)-A$ 的对数导数）在函数 $f(z)$ 的所有极点与所有 A-点上有简单极点，而无其它奇点.

616. 若函数 $\varphi(z)$ 在点 z_0 解析或有一极点，且点 $\zeta_0=\varphi(z_0)$ 为函数 $f(\zeta)$ 的下列奇点之一：

1) 可去奇点； 2) n 阶极点； 3) 本性奇点，

试问函数 $F(z)=f[\varphi(z)]$ 在点 $z=z_0$（允许 $z_0=\infty$ 的情形）有什么奇点？

617. 点 z_0（允许 $z_0=\infty$ 的情形）为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 将圆弧（或直线段）γ 映射到某圆弧（或直线段）γ' 上. z_0^* 是 z_0 关于 γ 的对称点（函数 $f(z)$ 由对称原理越过 γ 而解析延拓）. 若 z_0 是关于 $f(z)$ 的

1) n 阶极点； 2) 本性奇点，

试问函数 $f(z)$ 在点 z_0^* 有哪一类奇点？

618. 索霍茨基(Sokhotsky)定理[1] 指出：若点 z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点，则对任何复数 A（包括 $A=\infty$），存在一收敛于点 z_0 的点列 $\{z_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$. 证明对于作为极点的极限点[2] 的非孤立奇点，索霍茨基定理也成立（有时也把这

1) 亦称为卡索拉蒂(Casorati)-维尔斯特拉斯(Weierstrass)定理.

2) 假定该点的邻域内只有极点.

种点简单地视为本性奇点)。

619. 求出下列极限:

1) $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\operatorname{ctg}^2 z$; 2) $\lim\limits_{y\to\pm\infty}\dfrac{1}{\sin z}$; 3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{\operatorname{ch} z}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$.

这些极限的存在是否与索霍茨基定理相矛盾?

皮卡定理指出,在本性奇点的邻域内,解析函数取任何有限值无穷多次,至多有一个例外,此例外值称为**皮卡例外值**. 若考虑亚纯函数,则可能的例外值(包括∞)不超过两个.

620. 对下列函数验证皮卡定理:

1) e^z; 2) $e^{1/z}$; 3) $\cos\dfrac{1}{z}$; 4) $\operatorname{tg} z$; 5) $\operatorname{tg}^2 z$.

对其中每一个函数求出例外值,并证明这些值(若存在的话)为渐近值,即至少可给出一条终点在本性奇点的路线,使函数沿此路线趋于例外值.

§3. 计算残数

在题 **621** 至 **641** 中,求出给定函数关于所有孤立奇点与无穷远点(假若无穷远点不是奇点的极限点)的残数.

621. $\dfrac{1}{z^3-z^5}$. **622**. $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

623. $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ (n 为自然数). **624**. $\dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

625. $\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. **626**. $\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. **627**. $\dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

628. $\operatorname{tg} z$. **629**. $\dfrac{1}{\sin z}$. **630**. $\operatorname{ctg}^2 z$. **631**. $\operatorname{ctg}^3 z$.

632. 1) $\cos\dfrac{1}{z-2}$; 2) $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$. **633.** $e^{z+\frac{1}{z}}$.

634. $\sin z\sin\dfrac{1}{z}$. **635.** $\sin\dfrac{z}{z+1}$.

636. $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$. **637.** $\dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h\neq 0)$.

638. $z^n\sin\dfrac{1}{z}$ （n 为整数）. **639.** $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$.

640. $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$. **641.** $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ （n 为自然数）.

在题 **642** 至 **649** 中，求出各多值函数的每一个单值分支关于给定点的残数.

642. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$ 关于点 $z=1$.

643. $\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$关于点 $z=1$.

644. $\dfrac{z^a}{1-\sqrt{z}}$ $(z^a=e^{a\operatorname{Ln} z})$ 关于点 $z=1$.

645. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 关于点 $z=\infty$.

646. 1) $\operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ 关于点 $z=\infty$;

2) $e^z\operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ 关于点 $z=\infty$.

647. 1) $\operatorname{Ln} z\sin\dfrac{1}{z-1}$ 关于点 $z=1$;

2) $\operatorname{Ln} z\cos\dfrac{1}{z-1}$ 关于点 $z=1$.

648. $\dfrac{\operatorname{Arc\,tg} z}{z}$ 关于点 $z=0$ 与 $z=\infty$.

649. $z^n \operatorname{Ln}\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ (n 为整数)关于点 $z=0$ 与 $z=\infty$(当计算关于点 $z=0$ 的残数时,假定 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$).

650. 函数在无穷远点邻域内的展开式形如 $f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots$. 试求 $\operatorname*{res}_{z=\infty}[\{f(z)\}^2]$.

651. 若 $\varphi(z)$ 在点 a 解析,而 $f(z)$ 在该点有:

1) 简单极点,残数为 A;

2) k 阶极点,主要部分为 $\frac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$,

求 $\operatorname*{res}_{z=a}[\varphi(z)f(z)]$.

652. 若

1) a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶零点;

2) a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶极点,

求 $\operatorname*{res}_{z=a}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]$.

653. 若 $\varphi(z)$ 在点 a 解析,且:

1) a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶零点;

2) a 为函数 $f(z)$ 的 n 阶极点,

求 $\operatorname*{res}_{z=a}\left[\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right]$.

654. 若函数 $\varphi(z)$ 在点 a 解析且 $\varphi'(a)\neq 0$. 又 $f(\zeta)$ 在点 $\zeta=\varphi(a)$ 有残数为 A 的简单极点,求

$$\operatorname*{res}_{z=a}\{f[\varphi(z)]\}.$$

655. 函数 $\varphi(z)$ 在点 a 有残数为 A 的简单极点,而函数 $f(\zeta)$ 在无穷远点有一阶极点,其主要部分为 $B\zeta$,求

$$\operatorname*{res}_{z=a}\{f[\varphi(z)]\}.$$

656. 函数 $f(z)$ 在圆 $|z-a|=R$ 的弧 l 上取实值，由对称原理越过此弧作解析延拓. 设点 $z=\beta(\beta\neq a)$ 为关于 $f(z)$ 的 k 阶极点，其主要部分为

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{c_{-n}}{(z-\beta)^n}.$$

试求 $\operatorname*{res}_{z=\beta^*}[f(z)]$，其中 β^* 为点 $z=\beta$ 关于 l 的对称点.

§4. 计 算 积 分

残数定理的直接应用

在题 657 至 666 中，计算积分，其中假定闭围道取正方向.

657. $\int_C \frac{dz}{z^4+1}$，其中 C 为圆 $x^2+y^2=2x$.

658. $\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$，其中 C 为圆 $|z-2|=\frac{1}{2}$.

659. $\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$，其中 C 为圆 $|z|=2$.

提示：可利用下述事实：关于所有奇点(包括无穷远点)的残数之和等于零.

660. $\int_C \frac{z^3\,dz}{2z^4+1}$，其中 C 为圆 $|z|=1$.

661. $\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}\,dz$，其中 C 为圆 $|z|=1$.

662. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin\frac{1}{z}\,dz$，其中 C 为圆 $|z|=r$.

663. $\frac{1}{2\pi i}\int_C \sin^2\frac{1}{z}\,dz$，其中 C 为圆 $|z|=r$.

664. $\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n e^{2/z}\,dz$，其中 n 为整数，C 为圆 $|z|=r$.

665. $\int_{|z|=3}(1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$。

666. $\int_{|z|=5}\frac{zdz}{\sin z(1-\cos z)}$。

667. 若C为围成一包含点$z=0$的区域G的简单闭围道，函数$f(z)$与$g(z)$在闭区域$\overline{G}$上解析，又函数$g(z)$在C上不为零，而在G内只有与坐标原点不相重合的简单零点$a_1, a_2, \cdots, a_n$，计算积分$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{zg(z)}dz$。

668. 设$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$. 证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}z^{n-1}|f(z)|^2dz=a_0\overline{a}_nR^{2n}。$$

在题**669**至**672**中，计算给定的积分.

669. $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$，其中$C$为圆$|z|=r\neq 1$.

670. $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}\quad(\sqrt{1}=1)$，其中$C$为抛物线$y^2=x$，方向是$y$增加的方向.

671. $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{a^z\sin\pi z}\quad(a^z=e^{z\ln a})$，其中$a>0$，$C$为直线$x=\alpha$，$0<\alpha<1$，方向向上.

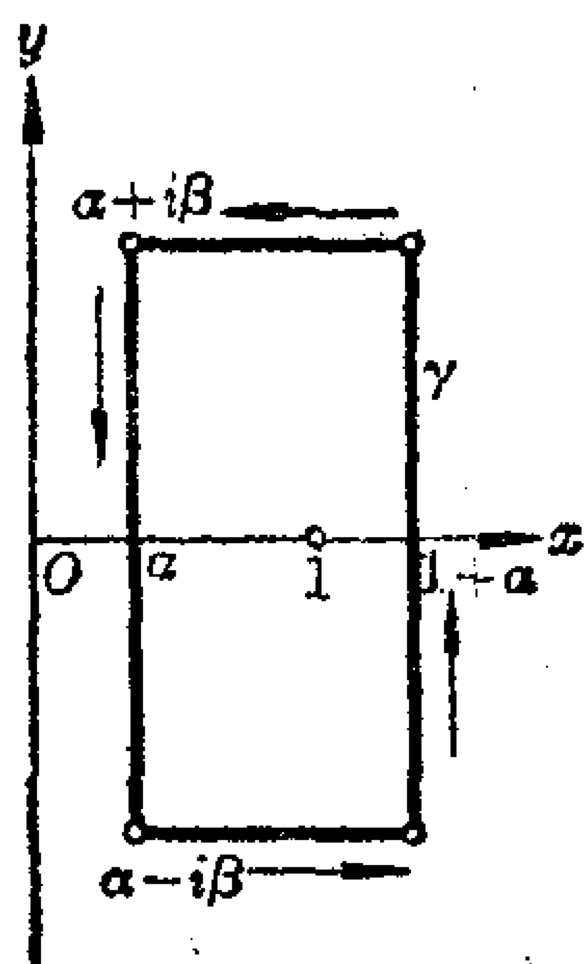


图 12

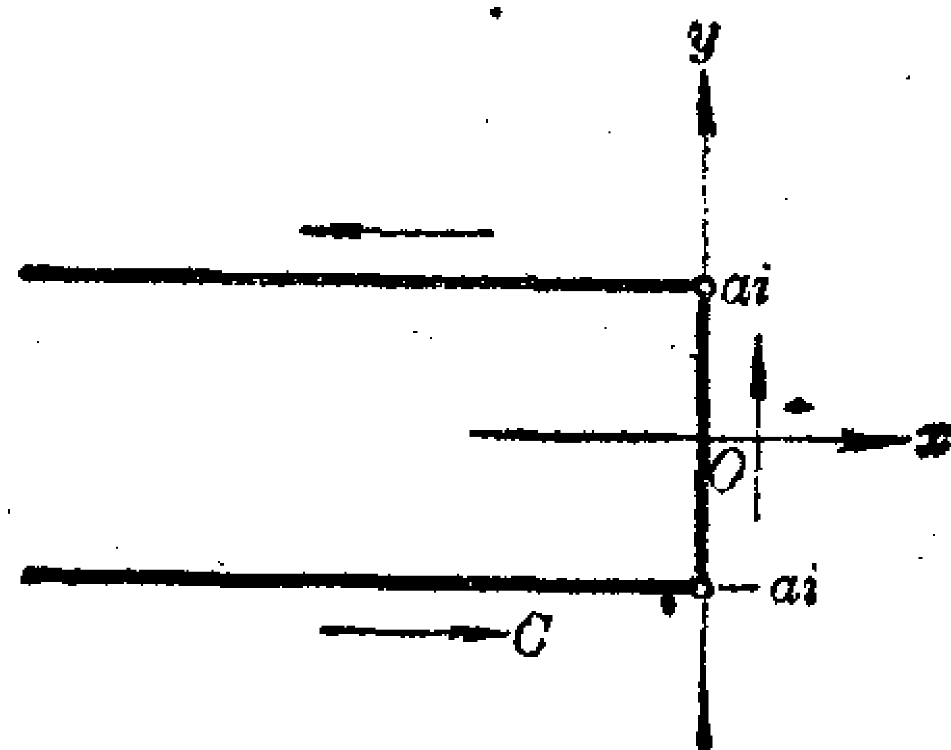


图 13

提示：考虑 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{a^z\sin\pi z}$，其中 γ 为图 12 所示的围道；然后取 $\beta\to\infty$ 时的极限.

672. $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^z\,dz}{\cos z}$，其中 C 为图 13 所示的积分围道。

定 积 分

若函数 $f(z)$ 当 $x=c(a<c<b)$ 时变成无穷大，则积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的柯西主值为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right].$$

此定义可自然地推广到线积分的情形.

若 $f(x)$ 在整个数轴上连续，则积分 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ 的主值为

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}f(x)dx.$$

在题 **673** 至 **680** 中，求定积分．若积分为广义的且为发散，则求其主值(如果存在的话).

673. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}\quad(a>1).$

提示：令 $e^{i\varphi}=z$.

674. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}\quad(a>b>0).$

675. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}\quad(a>0,\ b>0).$

676. $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ （a 为复数，且 $a\neq\pm1$）.

677. $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\varphi\,d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ （a 为复数，且 $a\neq\pm1$）.

678. $\int_0^{2\pi}e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi-\sin\varphi)d\varphi$ （n 为整数）.

679. $\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x+ia)\,dx$ （a 为实数）.

680. $\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x+a)\,dx$ （a 为复数，且 $\operatorname{Im} a \neq 0$）.

681. 证明：当 $b>a>-1$ 时，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\varphi \cos b\varphi\, d\varphi = \frac{\pi\Gamma(a+1)}{2^{a+1}\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{a-b}{2}+1\right)}.$$

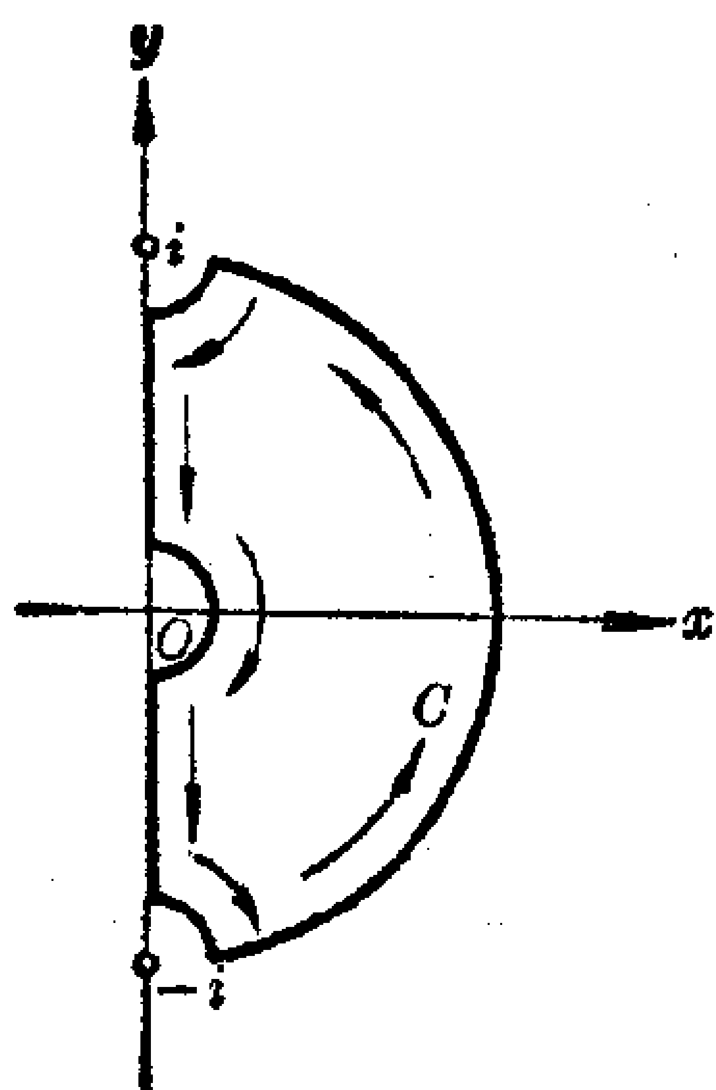


图 14

提示： 考虑 $\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^a z^{b-1} dz$，其中 C 为图 14 所示的围道；令小圆弧的半径趋于零．当计算沿铅垂线段的积分时，将它分成两个积分，并用适当的变换把这两个积分归结为第一类欧拉积分，再利用欧拉积分之间熟知的关系 $B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$，以及公式 $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin \pi p}$.

在题 682 至 688 中，求无穷限的积分．

682. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.　**683.** $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}$ （$a>0$）.

684. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ （n 为自然数）.

685. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ （$a>0,\ b>0$）.

686. $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

687. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ （n 为自然数，$n\geqslant 2$）.

提示：考虑积分$\int_C \frac{dz}{1+z^n}$，其中 C 是由射线 $\arg z=0$，$\arg z=\frac{2\pi}{n}$ 以及连接这两条射线的圆弧所组成的围道．

688．$\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx \quad (n \geqslant 2)$．

注．在题 **687** 与 **688** 中应用的求积分方法可推广到形如 $R(x^n)$ 的有理函数的积分上去．

689．证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\tau^n \bar{\tau}^k}$$

$$= \frac{i^{k-n-1}(n+k-2)!}{(2h)^{n+k-1}(k-1)!(n-1)!} \quad (n \text{ 与 } k \text{ 为自然数}),$$

其中 C 为平行于实轴的直线，它在虚轴上截一线段之长等于 $h(h>0)$．

690．计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\tau}{\bar{\tau}^k(\tau-z)} \quad (k \text{ 为自然数}),$$

其中 C 为上题中的围道．

在题 **691** 至 **694** 中，利用约当引理（参见题 **402**）计算给定的积分。

691．1）$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x\, dx}{x^2-2x+10}$；　2）$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2-2x+10}$．

692．$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2+4x+20}$．

693．$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx \quad (a \text{ 与 } b \text{ 为正数})$．

694．$\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+b^2} dx \quad (a \text{ 与 } b \text{ 为正数})$．

695．设 $f(z)=e^{imz}F(z)$，其中 $m>0$，而函数 $F(z)$ 具有下列性质：

1) 在上半平面内有有限个奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$;

2) 除点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 外，在实轴的所有点上都解析，$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为简单极;

3) 当 $z\to\infty$ 且 $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 时，$F(z)\to 0$.

证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k}[f(z)]+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=x_k}[f(z)]\right\},$$

其中积分(关于所有的点 x_k 与 ∞)取主值.

在题 **696** 至 **700** 中，求出给定积分的主值(t 为实数).

696. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x}dx$. **697.** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-5x+6}$.

698. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\,dx}{(x^2+4)(x-1)}$. **699.** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{1+x^3}dx$.

700. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{1-x^4}dx$.

在题 **701** 至 **706** 中，计算给定的积分(a 与 b 为正数).

701. $\int_0^{\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin ax}{x}dx$. **702.** $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}$.

703. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)^2}$. **704.** $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$.

705. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

提示: 利用积分 $\int_C\frac{e^{2iz}-1}{z^2}dz$, 其中 C 为图 15 所示的围道.

706. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$.

提示: 利用积分 $\int_C\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}dz$, 其中 C 为图 15 所示的围道.

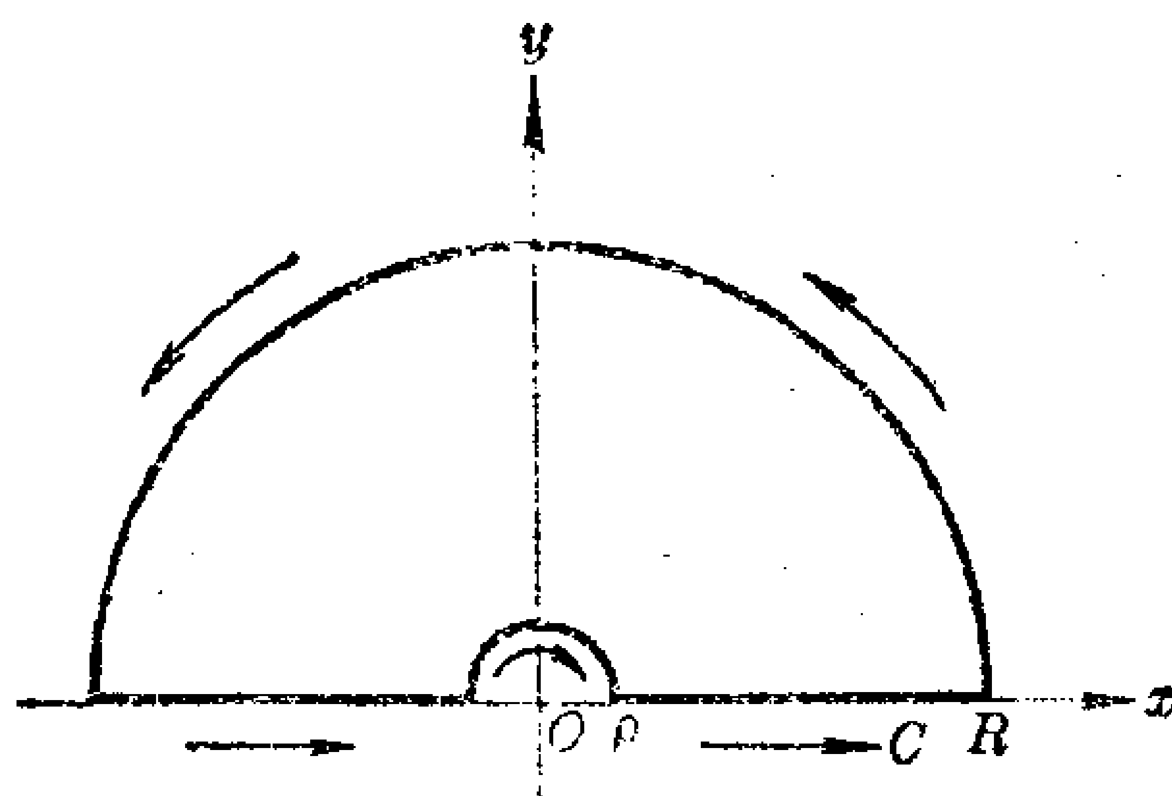


图 15

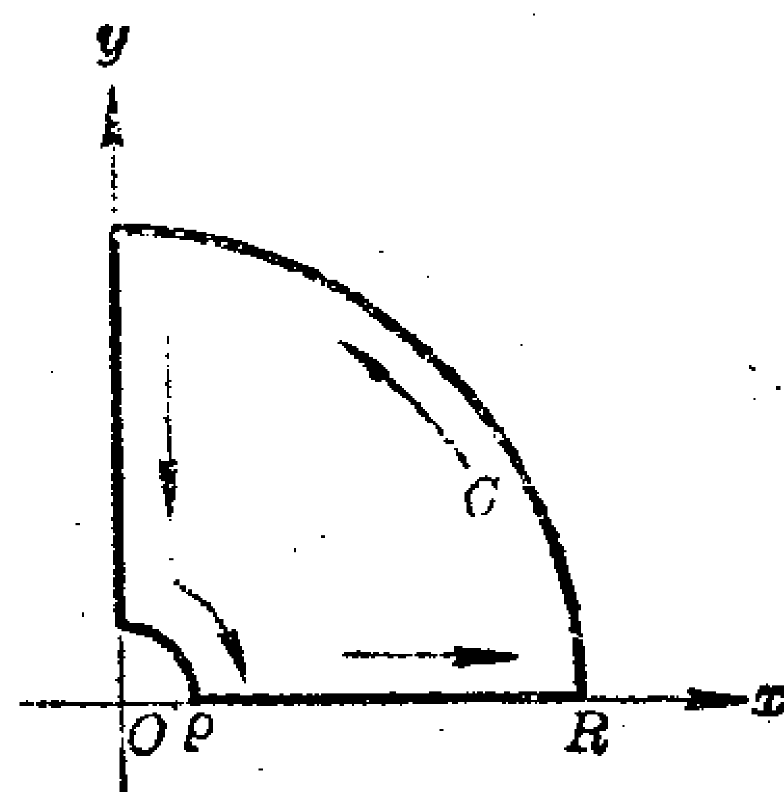


图 16

在题 **707** 至 **710** 中，计算所给的积分，其中假定当 $x>0$ 时 $x^p>0$（此条件在所有随后各题中也成立）.

707. 1) $\int_0^\infty x^{p-1}\cos ax\,dx \quad (a>0,\ 0<p<1)$;

2) $\int_0^\infty x^{p-1}\sin ax\,dx \quad (a>0,\ -1<p<1)$.

提示：利用积分 $\int_C z^{p-1}e^{-az}dz$，其中 C 为图 16 所示的围道.

708. $\int_0^\infty \cos x^p\,dx \ (p>1)$. **709**. $\int_0^\infty \sin x^p\,dx \quad (|p|>1)$.

710. $\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^p}\,dx \quad \left(p>\frac{1}{2}\right)$.

711. 设有理函数 $f(z)$ 有极点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，都不位于正实轴上，也都不为零，又设 p 为实数，使得

$$\lim_{z\to 0}[z^{p+1}f(z)] = \lim_{z\to\infty}[z^{p+1}f(z)] = 0.$$

证明：

1) 若 p 不为整数，则

$$\int_0^\infty x^p f(x)dx = -\frac{\pi}{\sin \pi p}e^{-\pi pi}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k}[z^p f(z)];$$

2) 若 p 为整数，则

$$\int_0^\infty x^p f(x)dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k}[z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)],$$

其中 $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z$ 以及 $0\leqslant\arg z<2\pi$.

提示：考虑积分 $\int_C z^p f(z)dz$ 与 $\int_C z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)dz$，其中 C 为图 17 所示的围道.

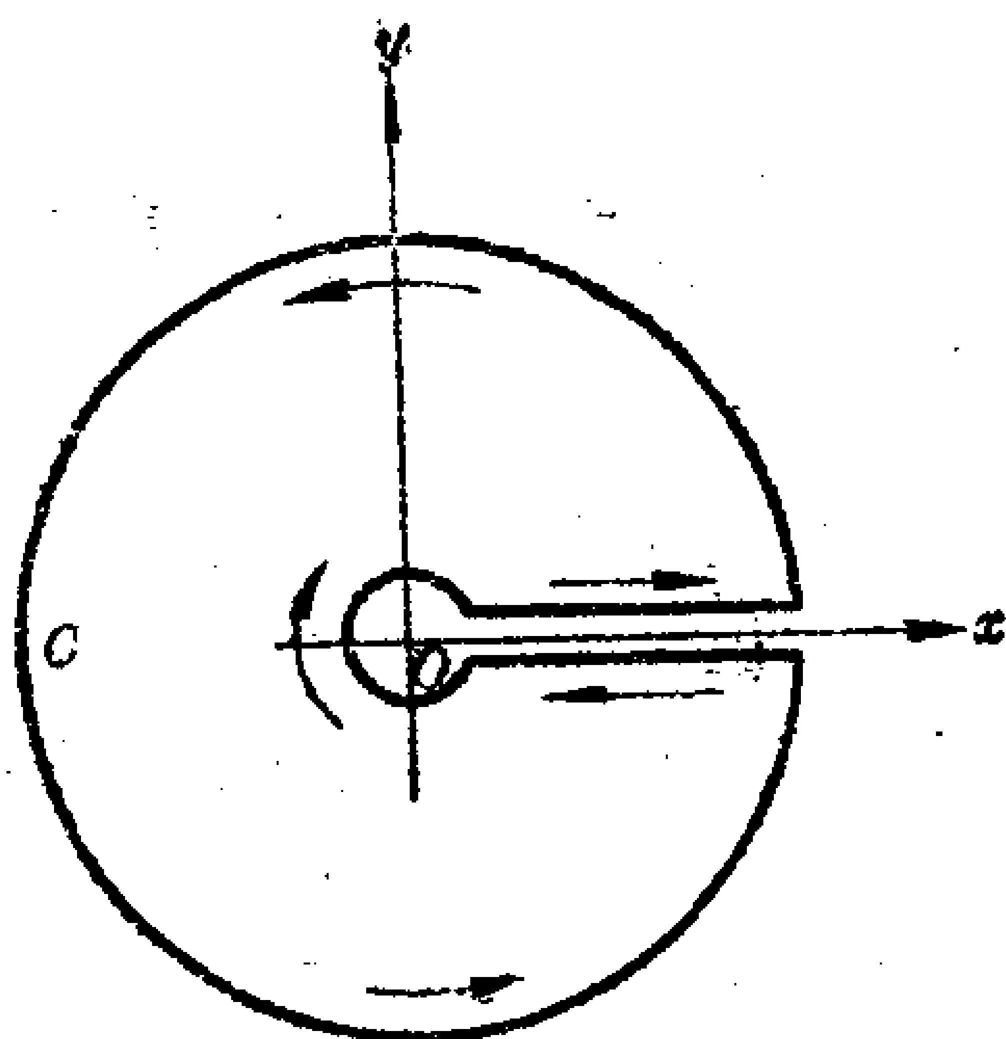


图 17

712. 计算积分 $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0<p<1)$.

713. 证明：

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a} \quad (0<a<1).$$

提示：可利用熟知的欧拉积分之间的关系 $\Gamma(a)\Gamma(b)=\Gamma(a+b)B(a,b)$，并且令 $x=y/(1+y)$，更换定义 B-函数 $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ 积分中的变量.

注. 本题中仅对区间 $(0,1)$ 内的实数 a 证明的关系式，对一切复数也成立. 当 $z=-n$，此处 n 为自然数，等式两端都变成无穷大.

在题 **714** 至 **716** 中，计算给定的积分.

714. $\int_0^{\infty}\frac{x^p\,dx}{1+x^2}\quad(-1<p<1)$.

715. $\int_0^{\infty}\frac{x^p\,dx}{(1+x^2)^2}\quad(-1<p<3)$.

716. $\int_0^{\infty}\frac{x^p\,dx}{x^2+2x\cos\lambda+1}\quad(-1<p<1,\ -\pi<\lambda<\pi)$.

717. 设有理函数 $f(z)$ 在正实轴上只有简单极点 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，其余的极点(如果存在的话) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都不等于零. 又设 p 为一实数，使得

$$\lim_{z\to 0}[z^{p+1}f(z)]=\lim_{z\to\infty}[z^{p+1}f(z)]=0.$$

对积分取其主值，证明：

1) 若 p 不为整数，则

$$\int_0^{\infty}x^p f(x)\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{\sin\pi p}e^{-\pi p i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=\alpha_k}[z^p f(z)]$$

$$-\pi\operatorname{ctg}\pi p\sum_{k=1}^{m}\beta_k^p\operatorname*{res}_{z=\beta_k}[f(z)],$$

其中当 $x>0$ 时 $x^p>0$；

2) 若 p 为整数，则

$$\int_0^{\infty}x^p f(x)\,dx$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=\alpha_k}[z^p\operatorname{Ln}z\cdot f(z)]$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\beta_k^p(\ln\beta_k+\pi i)\operatorname*{res}_{z=\beta_k}[f(z)],$$

$\operatorname{Ln}z$ 分枝的选取同题 **711**.

在题 **718** 至 **721** 中，求积分的主值.

718. $\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{x^4-1}$. **719.** $\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4-1}$.

720. $\int_0^{\infty}\frac{x^p\,dx}{1-x}\quad(-1<p<0)$.

721. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}}{1-e^x}\,dx\quad(0<p<1)$.

在题 **722** 至 **728** 中,计算给定的积分.

722. $\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x^3)}\,dx\quad(-1<p<2)$.

提示: 考虑$\int_C\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{(1+z^3)}\,dz$, 其中 C 为图 18 所示的围道,此围道围一个双连通区域;然后令 $R\to\infty$ 取极限.

723. $\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx\quad(-1<p<2)$.

提示: 证明:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}\,dz=2\pi ie^{-p\pi i},$$

其中 C_R 为圆 $|z|=R$, 取正方向.

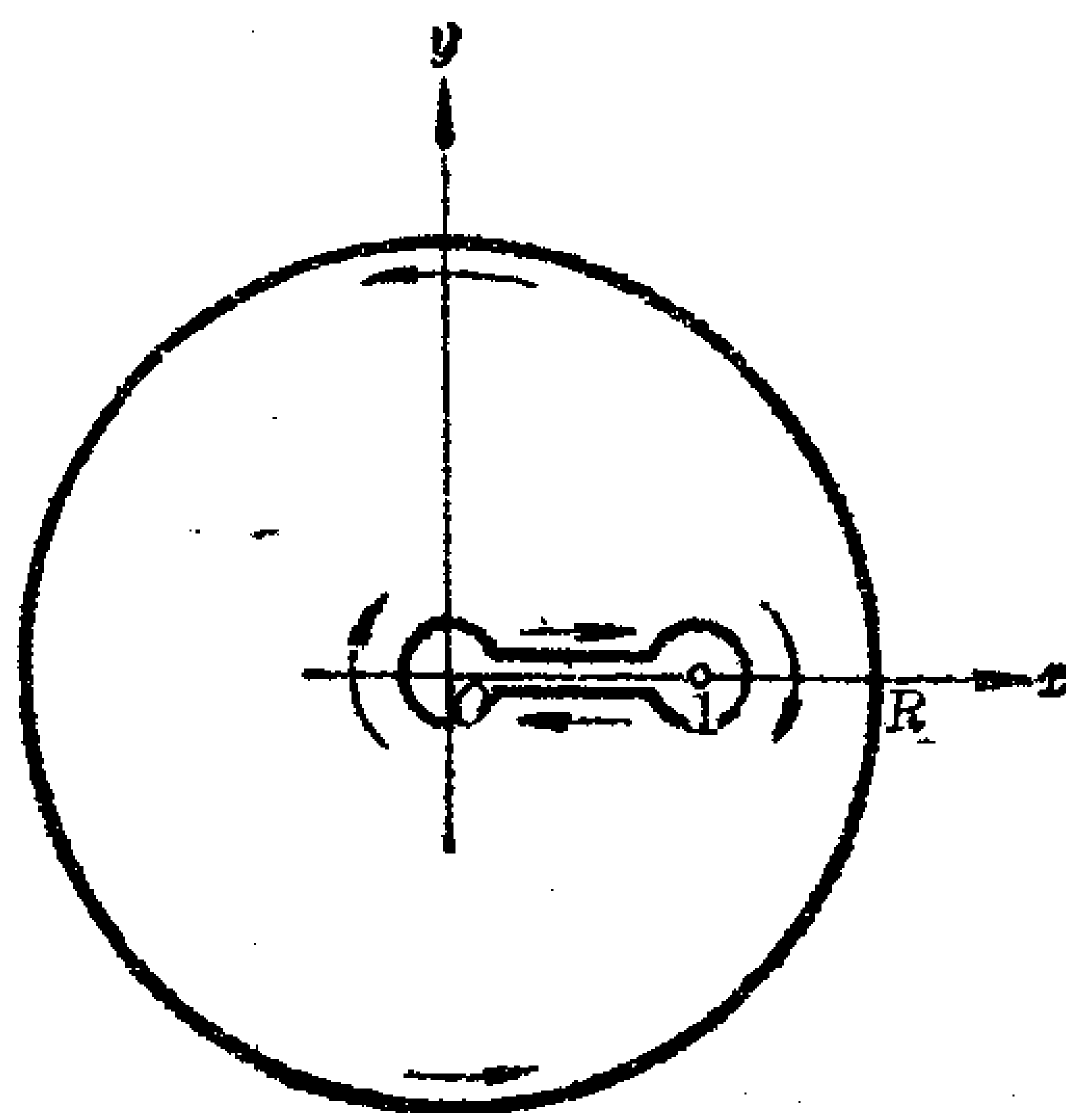


图 18

724. $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p dx}{(1+x)^2} \quad (-1<p<2).$

725. $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x+a} \quad (-1<p<1,\ a>0).$

726. $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{(x+a)^2} \quad (-1<p<1,\ a>0).$

727. $\int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx \quad (-1<p<2).$

728. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$

729. 计算积分$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$，其中当$-1<x<1$时$\sqrt{1-x^2}>0$，$a$为复数，且$a\neq\pm1$．特别，当$a=\pm e^{i\alpha}(0<\alpha<\pi)$，$a=iy$以及$-1<a<1$时，求出积分的值(求主值)．

730. 计算积分$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{-p}}{b-x} dx$，其中$0<p<1$，$b$为复数，且$b\neq0$，$b\neq1$．

731. 计算积分$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$．

提示：考虑积分$\int_C \frac{dz}{\sqrt[n]{1-z^n}}$，其中$C$为由沿着点$1$，$\omega$，$\omega^2$，$\cdots$，$\omega^{n-1}$(此处$\omega=e^{2\pi i/n}$)的半径矢量的截口与圆$|z|=R>1$所组成的围道(此积分亦可借助于欧拉的$B$-函数来计算)．

在题 **732** 至 **737** 中，计算给定的积分($a>0$)．

732. $\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^2+a^2}.$

提示：利用积分$\int_C \frac{\ln z\,dz}{z^2+a^2}$，其中$C$为图19所示的围道．

733. $\int_0^\infty \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2}.$ 734. $\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}.$

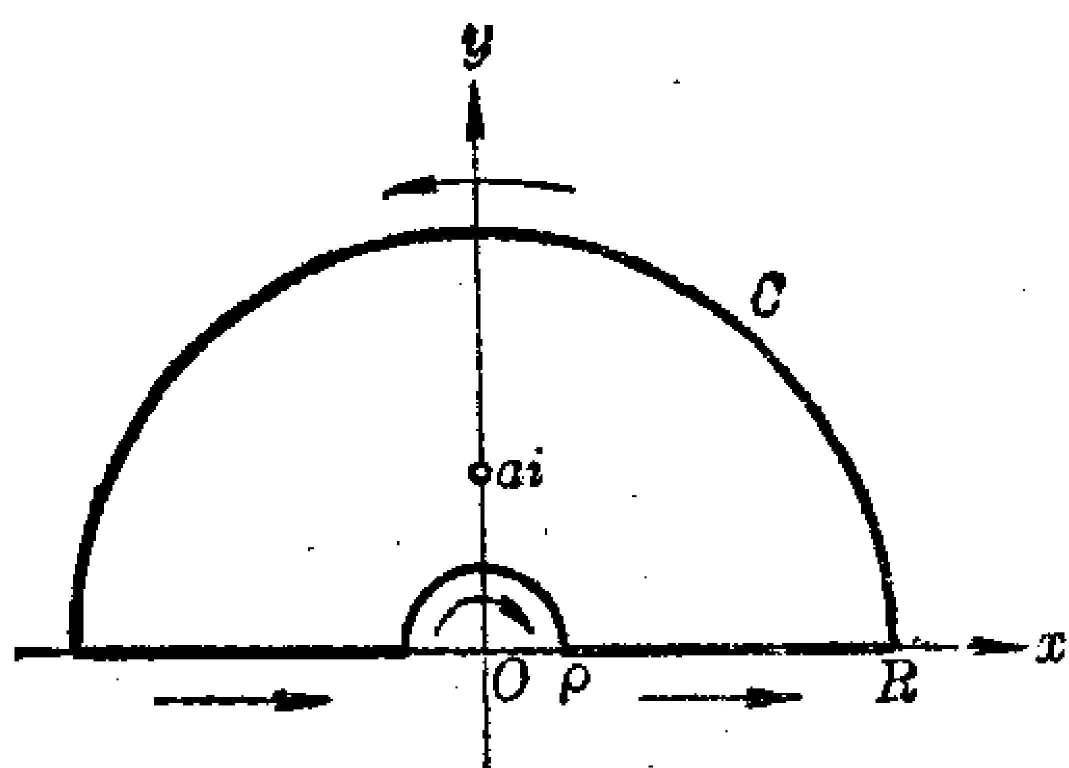


图 19

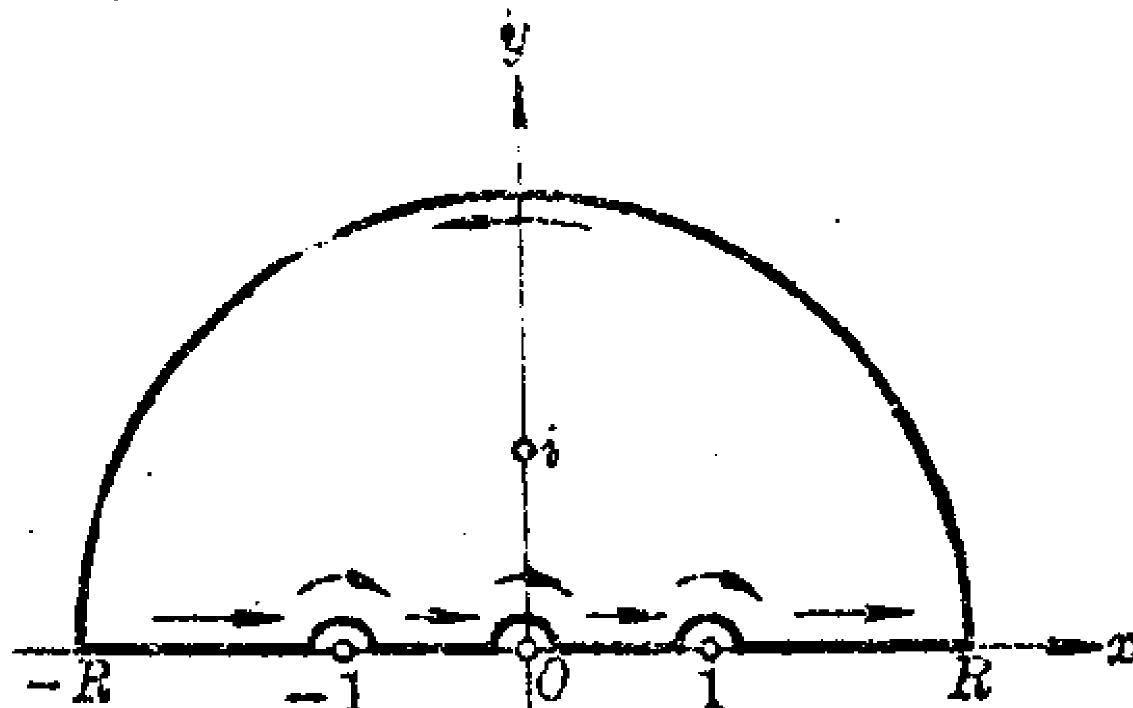


图 20

735. $\int_0^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}$.

736. $\int_0^1\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{dx}{1+x^2}$.

提示：计算积分

$$\int_C\ln\left(\frac{1}{z}-z\right)\frac{dz}{1+z^2}$$

的实部，其中 C 为图 20 所示的围道。

737. $\int_0^1\ln\frac{1-x}{x}\,\frac{dx}{x+a}$.

738. 设 $f(z)$ 为有理函数，在正实轴上以及在点 $z=0$ 上无极点；当 $z\to\infty$ 时，$f(z)=O\left(\frac{1}{z}\right)$。

证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{\ln^2 x+\pi^2}=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k}\left[\frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\right],$$

其中 $a_1=-1$，而 $a_2, a_3, \cdots, a_n$ 为函数 $f(z)$ 异于 -1 的极点，$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\arg z,\ 0\leqslant\arg z<2\pi$.

提示：考虑积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{\operatorname{Ln} z-\pi i}\,dz$，其中 C 为图 21 所示的围道。

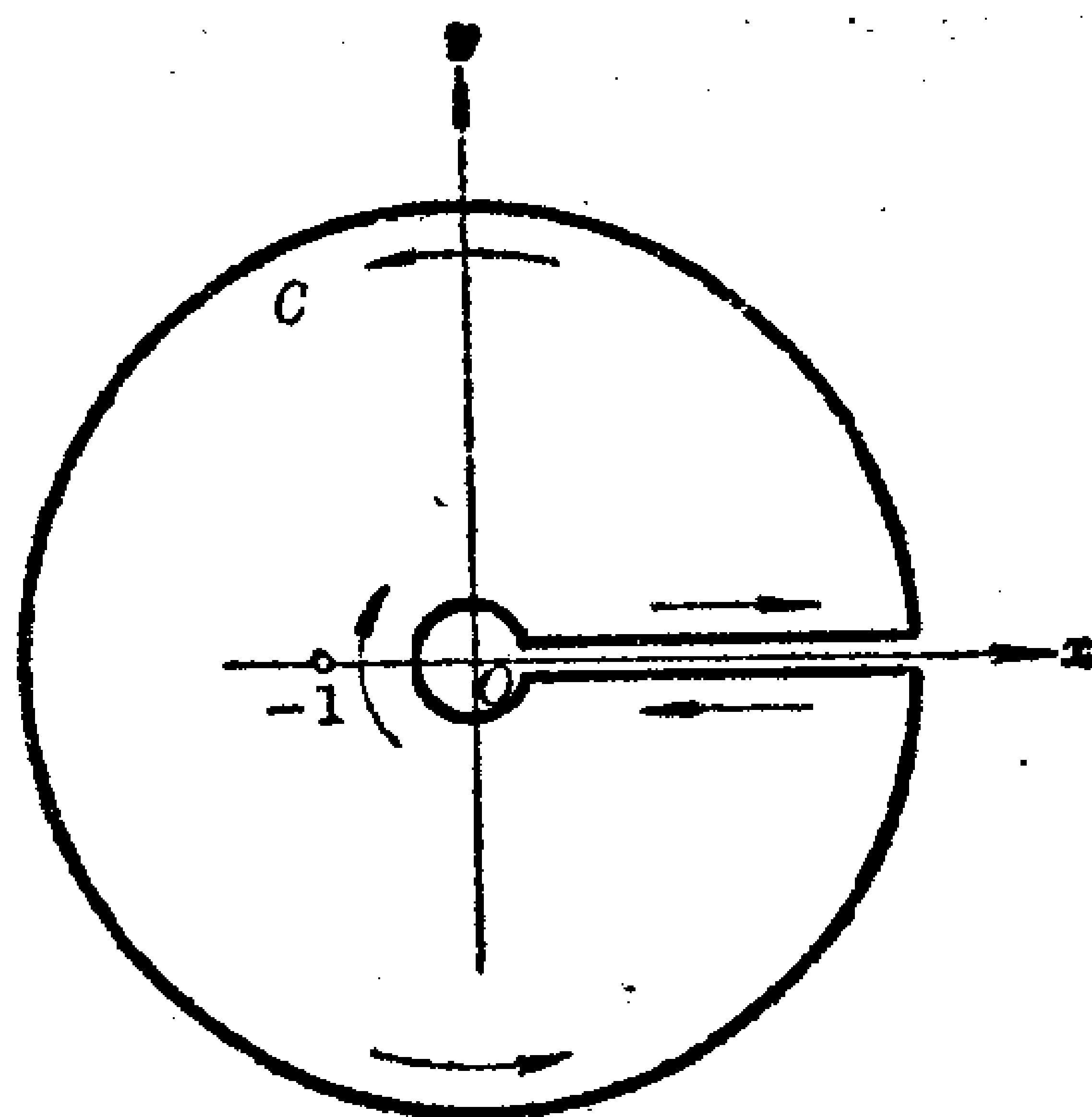


图 21

在题 **739** 至 **741** 中，计算给定的积分，假定 $a>0$，n 为自然数。

739. 1) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)}$；

2) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+\pi^2)}$.

740. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)[\ln^2 x+(2n+1)^2\pi^2]}$.

提示：利用积分

$$\int_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n+1)\pi i} + \frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-1)\pi i}+\cdots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-1)\pi i}\right]dz,$$

其中 C 为图 21 所示的围道，$\operatorname{Ln} z$ 分枝的选取同题 **738**.

741. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\ln^2 x+4n^2\pi^2)}$.

提示：利用积分

$$\int_C \frac{1}{z^2+a^2}\left[\frac{1}{\operatorname{Ln} z-2n\pi i} + \frac{1}{\operatorname{Ln} z-(2n-2)\pi i}+\cdots+\frac{1}{\operatorname{Ln} z+(2n-2)\pi i}\right]dz,$$

其中C为图 22 所示的围道，$\mathrm{Ln}\, z$ 分枝的选取同题 **739**.

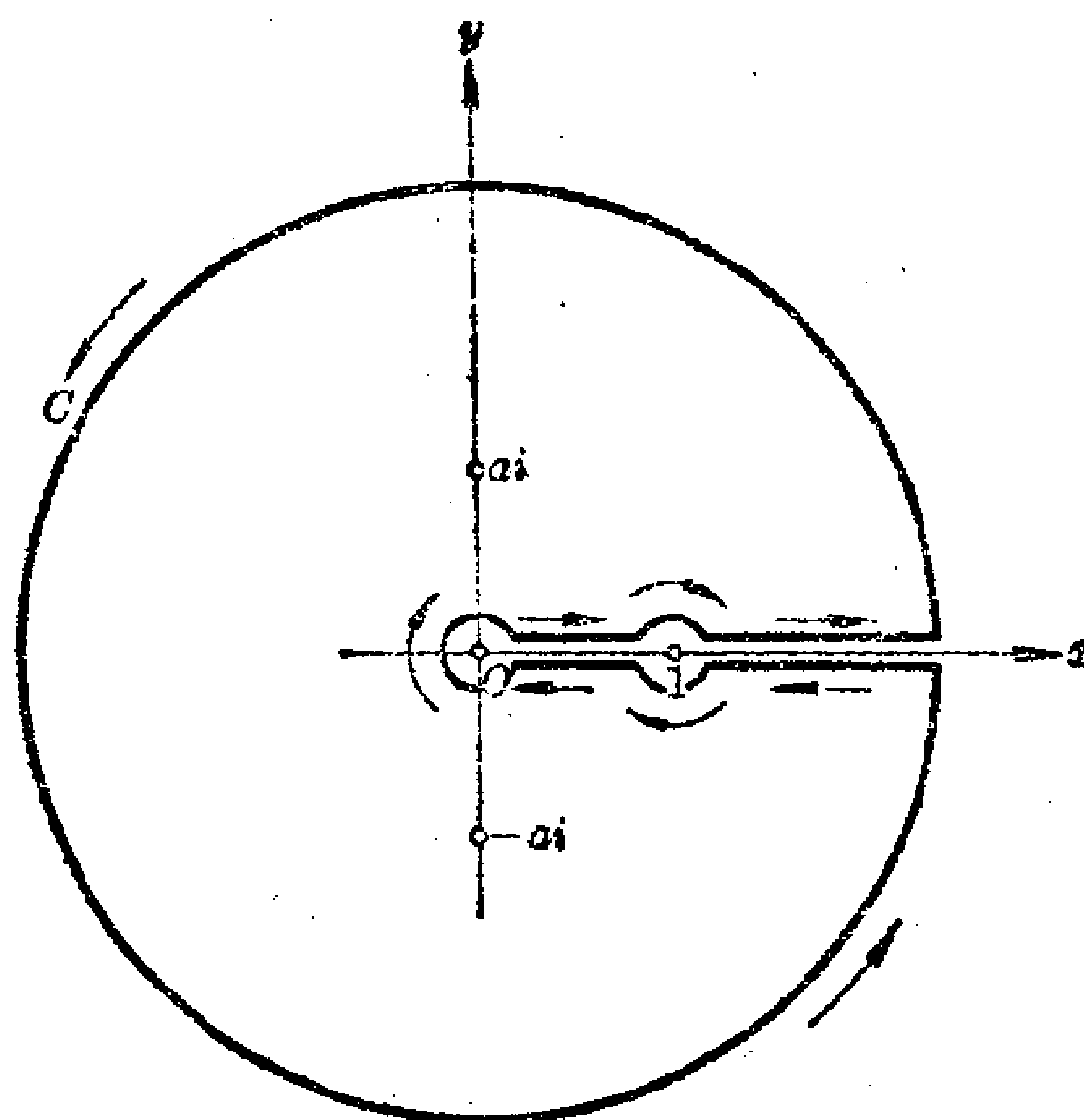


图 22

742. 设 $f(z)$ 为有理函数，在开围道 C 上无极点，C 的始点为 a，终点为 b.

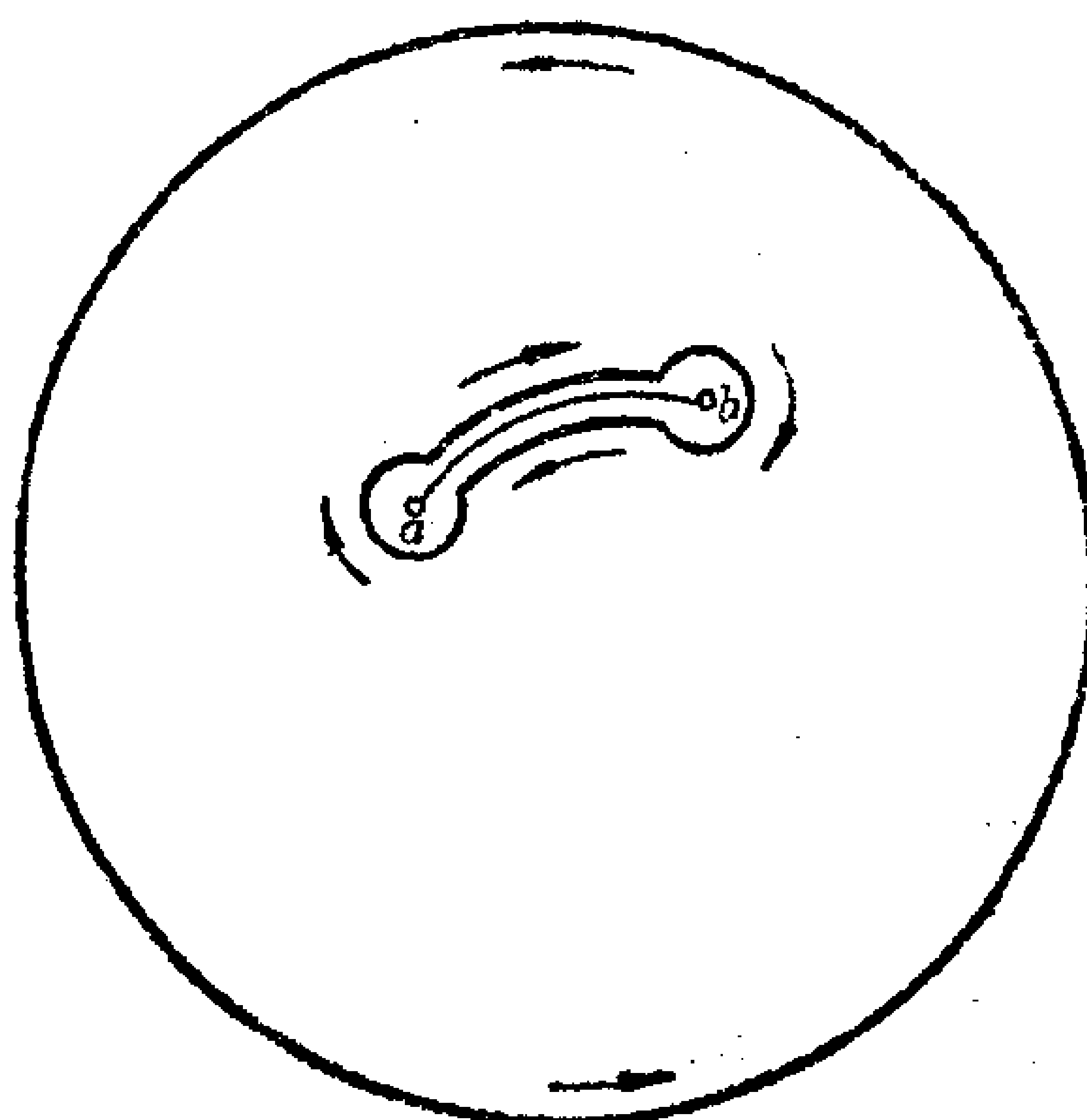


图 23

证明：

$$\int_C f(z)\,dz=\sum\operatorname{res}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right]+\operatorname*{res}_{z=\infty}\left[f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\right],$$

其中和式取遍函数$f(z)$的所有异于∞的极点(在C外部，对数的单值分枝的选取是任意的).

提示：考虑$\int_\Gamma f(z)\operatorname{Ln}\frac{z-b}{z-a}\,dz$，其中$\Gamma$(作为双连通区域边界的围道)如图23所示.

在题**743**至**747**中，求出给定的积分，其中假定a为实数.

743. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}\,dx}{(e^x+1)(e^x+2)}\quad(0<a<2)$.

提示：利用积分$\int_C\frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)}\,dz$，其中$C$是顶点为$-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$的矩形.

744. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\,dx}{\operatorname{sh}x}$.

提示：利用积分$\int_C\frac{e^{aiz}}{\operatorname{sh}z}\,dz$，其中$C$为图24所示的围道.

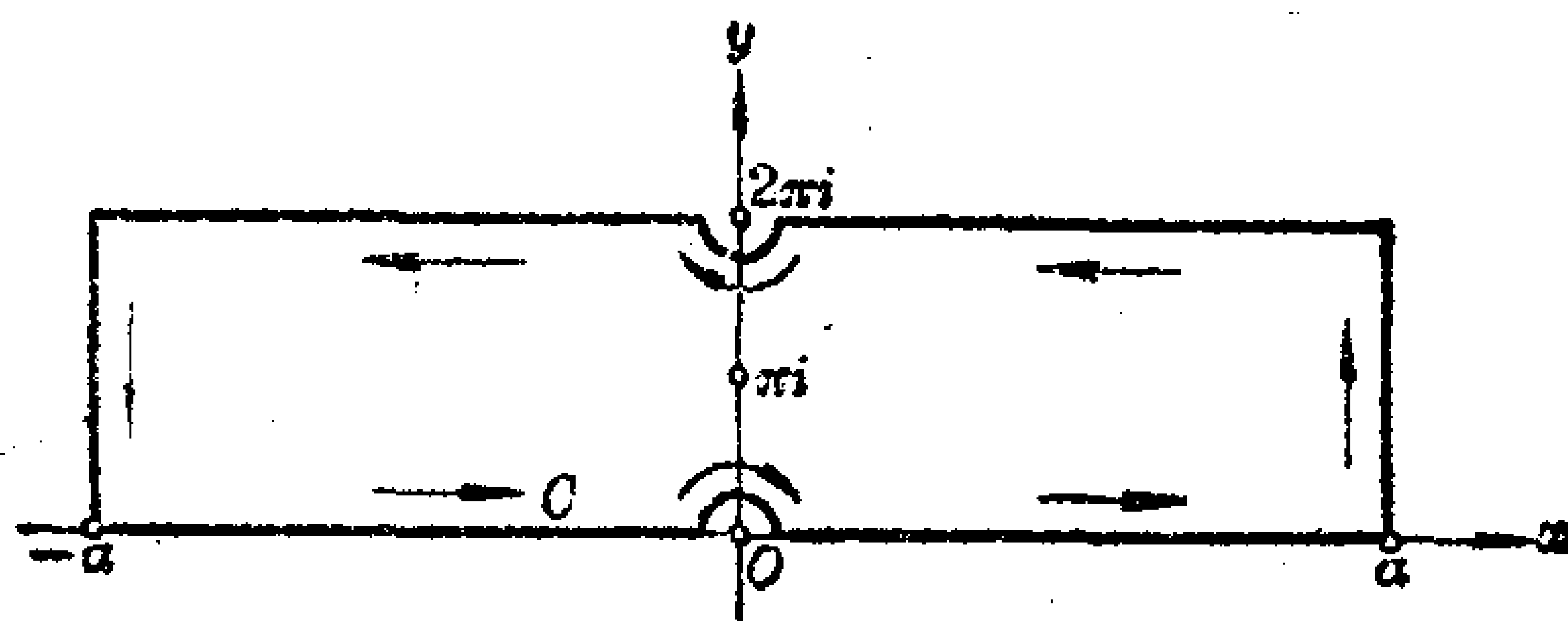


图 24

745. $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax\,dx}{\operatorname{ch}x}$. **746**. $\int_0^{\infty}\frac{x\cos ax\,dx}{\operatorname{sh}x}$.

747. $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}\pi x}\,dx\quad(-\pi<a<\pi)$.

提示：利用积分$\int_C \frac{e^{az}dz}{\operatorname{ch}\pi z}$，其中 C 为矩形 $-a\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant a$，$0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 1$ 的边界.

748. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+a^2-2a\cos x}\quad (a>0)$.

提示：利用积分$\int_C \frac{z\,dz}{a-e^{-iz}}$，其中 C 为矩形 $-\pi\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant \pi$，$0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant h$ 的边界，再令 $h\to\infty$ 取极限.

与拉普拉斯逆变换公式相联系的积分

从现在起我们假定 $t>0$，C_1 为直线 $\operatorname{Re} z=a>0$，方向向上，选取 a 使得被积函数的所有奇点都位于 C_1 的左边.

749. 证明：若当 $\operatorname{Im} z\to\pm\infty$，$a_1\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant a_2$ 时，$f(z)\to 0$，又若函数 $f(z)$ 在带形 $a_1\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant a_2$ 内解析，则积分$\int_C f(z)\,dz$ 不依赖于 $a\,(a_1\leqslant a\leqslant a_2)$ 的选取，其中 C 为直线 $\operatorname{Re} z=a$.

在题 **750** 至 **755** 中，求积分的值（n 为自然数）.

750. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{z^{n+1}}$;

2) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{t^z dz}{z^{n+1}}\quad (t^z=e^{z\ln t})$.

751. $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{(z-a)^{n+1}}$. **752.** $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{z^2+1}$.

753. 1) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{ze^{zt}dz}{z^2+1}$; 2) $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+1)}dz$.

754. $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{(z-a)(z-b)(z-c)}$.

755. $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{t^z dz}{z(z+1)\cdots(z+n)}$.

756. 利用恒等式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$(参见题 **718** 的注),证明对 $\operatorname{Re}\nu<0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{e^{z}dz}{z^{\nu+1}}=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)},$$

其中 γ 为图 25 所示的围道.

注. 因积分 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma}\frac{e^{z}dz}{z^{\nu+1}}$ 对 $\operatorname{Re}\nu\geqslant0$ 也收敛,故它将函数 $\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}$ 解析延拓到整个平面.

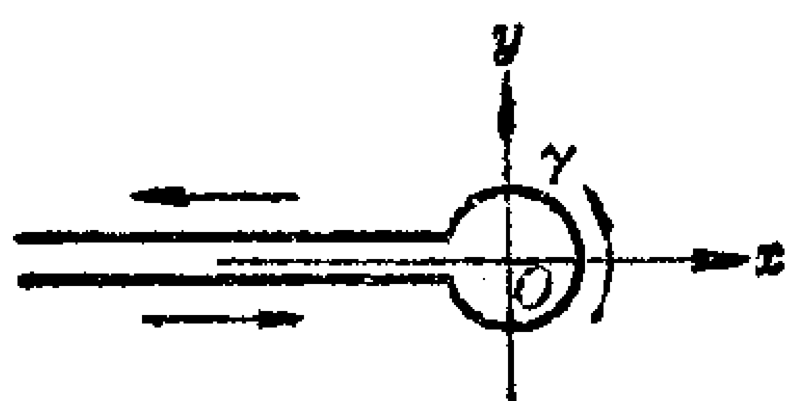


图 25

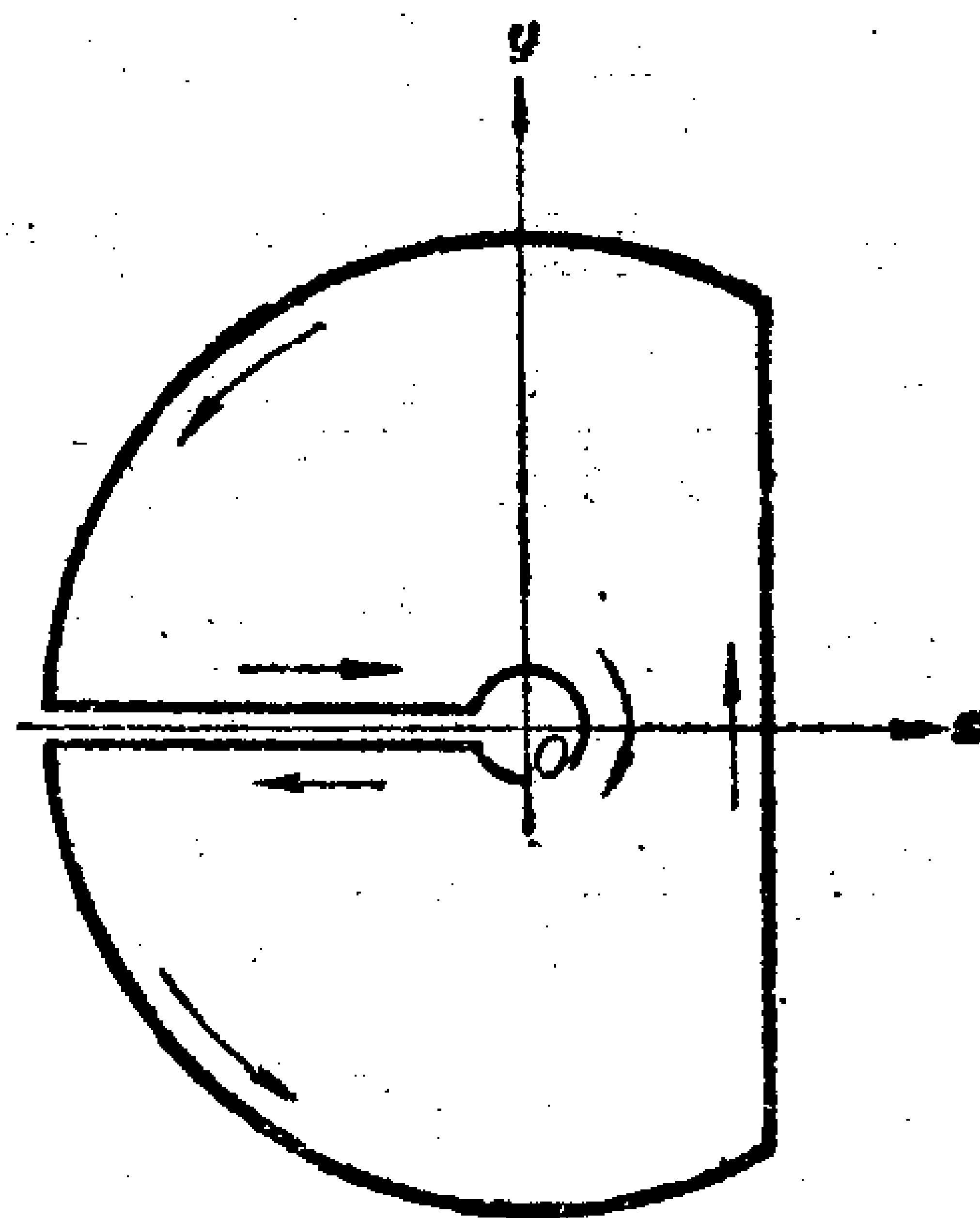


图 26

757. 证明对 $\operatorname{Re}\nu>-1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{z^{\nu+1}}=\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}.$$

在题 **758** 至 **769** 中,求给定积分的值.

758. 1) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{\sqrt{1+z}}$; 2) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{\sqrt{z+i}}$.

759. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{z\sqrt{1+z}}$. **760**. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{zt}dz}{(z+1)\sqrt{z+2}}$.

761. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{zt}(1+e^{-\pi z})}{z^2+1}dz$.

762. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{zt}(1-e^{-az})^2}{z}dz\quad(a>0)$.

763. $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,dz}{z(1-e^{-az})}\quad (a>0)$.

提示：利用展开式

$$\frac{1}{1-e^{-az}}=1+e^{-az}+e^{-2az}+\cdots.$$

764. $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\dfrac{e^{tz-x\sqrt{z}}}{z}\,dz\quad (x>0)$.

提示：用图 26 所示的围道替换 C_1.

765. $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\dfrac{e^{zt}\,\mathrm{sh}\,r\sqrt{z}}{rz\,\mathrm{sh}\,a\sqrt{z}}\,dz\quad (a>r>0)$.

766. $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\dfrac{\ln(1+z)e^{zt}}{z}\,dz$.

767. $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_1}e^{zt}\ln\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)dz$.

768. $\int_0^{\infty}dt\int_{C_1}\dfrac{e^{z-\frac{at}{z}}}{z^2}\,dz\quad (a>0)$.

提示：更换积分次序.

769. $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\dfrac{e^{bz}}{z}\,dz\int_0^{\infty}e^{-az\,\mathrm{ch}\,x}\,dx\quad (a>0,\ b$ 为实数$)$.

提示：可利用下述事实：对 $u>0$，$\int_{C_1}\dfrac{e^{-uz}}{z}\,dz=0$.

770. 由贝塞耳(Bessel)函数的级数展开式

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k},$$

证明下列积分表示式（γ 为题 756 中的围道）：

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\dfrac{e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta=\left(\dfrac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z)$；

2) $\dfrac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\dfrac{e^{\zeta-\frac{z^2}{4\zeta}}}{\zeta^{\nu+1}}\,d\zeta=\left(\dfrac{2}{z}\right)^{\nu}J_\nu(z)\ (\mathrm{Re}\,\nu>-1)$.

提示：将函数 $e^{-\frac{z^2}{4t}}$ 展开成级数并利用题 **756** 与 **757**.

771. 证明对 $\operatorname{Re} z>0$,

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma e^{iz\sin\zeta-i\nu\zeta}\,d\zeta,$$

其中 Γ 为图 27 所示的围道，并由此推出：若 n 为一整数或零，则

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\zeta-n\zeta)\,d\zeta.$$

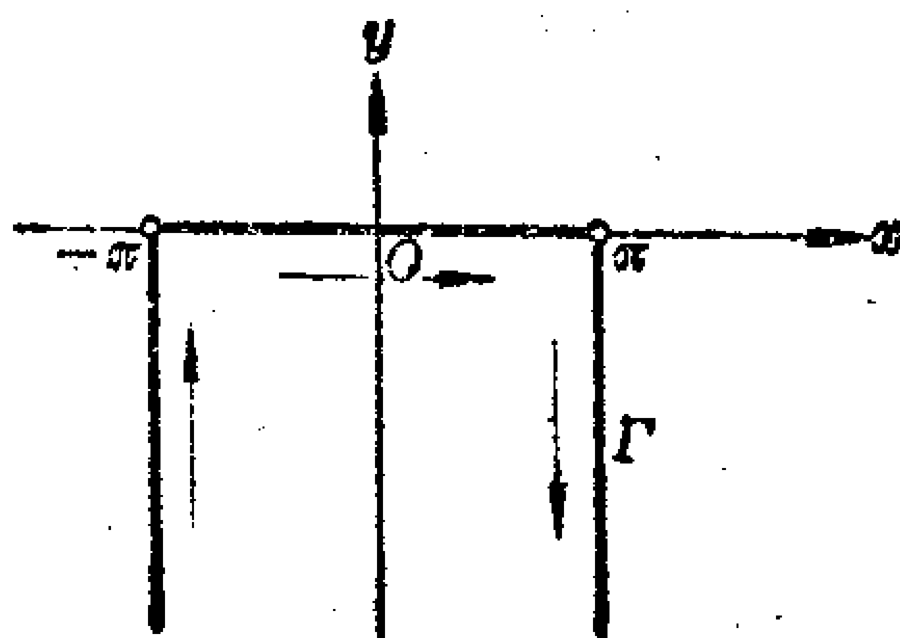


图 27

在题 **772** 至 **774** 中，求出含有贝塞耳函数的积分.

772. $\int_0^\infty e^{-zt}J_n(t)\,dt$ （$\operatorname{Re} z>0$, n 为整数）.

提示：利用上题的积分表示并更换积分次序.

773. 1) $\int_0^\infty J_0(at)\cos bt\,dt$;

2) $\int_0^\infty J_0(at)\sin bt\,dt$ （a 与 b 为正数）.

774. $\int_0^\infty \cos bx\frac{\sin t\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$ （$t>|b|$）.

提示：利用下述关系式：

$$\frac{\sin ut}{u}=\sqrt{\frac{\pi t}{2u}}J_{\frac{1}{2}}(ut)=\frac{\sqrt{\pi t}}{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{z-\frac{u^2t^2}{4z}}}{z^{3/2}}\,dz$$

（参见题 **770**）并更换积分次序.

积分的渐近性状

775. 设解析函数 $\varphi(z)$ 在 C_1 的左侧只有有限个奇点，且都为极点，又设当 $z\to\infty$ 与 $\operatorname{Re} z\leqslant\alpha$ 时，$\varphi(z)\to 0$。令

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{zt}\varphi(z)\,dz.$$

求 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$。考虑极点关于虚轴的各种分布情况。

提示： 利用约当引理(参见题 **402**)。

776. 设解析函数 $\varphi(z)$ 在 C_1 的左侧有有限个奇点，又设当 $z\to\infty$ 与 $\operatorname{Re} z\leqslant\alpha$ 时，$\varphi(z)\to 0$。

证明对充分大的 t，我们有下述渐近等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} e^{zt}\varphi(z)\,dz\sim\sum \operatorname{res}[e^{zt}\varphi(z)],$$

其中和式取遍 $\varphi(z)$ 的所有具有非负实部的奇点。

注. 若 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{F(t)}=1$，则称函数 $f(t)$ 与 $F(t)$ 当 $t\to\infty$ 时为渐近相等($f(t)\sim F(t)$)。

777. 讨论函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z^2(z+a)^3}\qquad(\operatorname{Re} a>0)$$

的渐近性状(当 $t\to\infty$ 时)。

778. 求函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{ze^{zt-\sqrt{z^2+2az}}}{(z-\omega i)\sqrt{z^2+2az}}\,dz\qquad(\omega>0,\ a>0)$$

的渐近展开式(当 $t\to\infty$ 时)，其中当 $z>0$ 时，$\sqrt{z^2+2az}>0$。

提示： 将围道 C_1 换成图 26 所示的围道，并证明当 $t\to\infty$ 时，沿圆弧与沿负实轴的积分趋于零。

如果 $\lim\limits_{z\to\infty} z^k\left[f(z)-\sum\limits_{n=0}^{k}\frac{c_n}{z^n}\right]=0 \quad (k=0,1,2,\cdots)$

(不能由此推出级数为收敛!),则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$ 称为函数 $f(z)$ 当 $z\to\infty$ 时的渐近展开式.

我们常考虑更一般形式的渐近展开式. 设 $\{q_n(z)\}$ 为任一函数序列,满足 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{q_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0$, 又 $\{\mu_n(z)\}$ 为满足下列条件的序列:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\mu_{n+1}(z)}{q_n(z)}=0,\quad \varlimsup_{z\to\infty}\left|\frac{\mu_n(z)}{q_n(z)}\right|>0.$$

如果 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{q_k(z)}\left[f(z)-\sum\limits_{n=0}^{k}c_n\mu_n(z)\right]=0 \quad (k=0,1,2,\cdots)$,

则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\mu_n(z)$ 称为函数 $f(z)$ 的渐近展开式:

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\mu_n(z).$$

序列 $\{1/z^{\alpha_n}\}$ 常被选作为序列 $\{\mu_n(z)\}$, 其中 α_n 为单调趋于无穷的正实数.

779. 证明对 $x>0$

$$\int_0^\infty\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt\sim\frac{1}{x}-\frac{2!}{x^3}+\frac{4!}{x^5}-\cdots+(-1)^n\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}+\cdots.$$

提示: 利用等式

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^nt^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

并估计余项.

780. 证明对 $x>0$

$$\int_x^\infty\frac{e^{x-t}}{t}dt\sim\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\cdots+(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}+\cdots.$$

提示: 分部积分并估计余项.

781*. 证明对 $x>0$

$$\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-x-t}}{t}dt\sim-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\cdots+\frac{(n-1)!}{x^n}+\cdots\right),$$

其中积分取主值.

782. 证明：对实值 x

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2}dt}{t-x}\sim-\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{1}{x^{2n+1}},$$

其中积分取主值.

783. 证明：对实值 x

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}e^{-t^{\beta}}}{t-x}dt\sim-\frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{\beta}\right)\frac{1}{x^n}\quad(\alpha>-1,\ \beta>0),$$

其中当 $x>0$ 时积分取主值.

784*. 证明：

$$\int_0^z e^{z^2-t^2}dt\sim\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{z^2}$$

$$-\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{2^2z^3}+\frac{1\times3}{2^3z^5}-\frac{1\times3\times5}{2^4z^7}+\cdots\right).$$

符号取+或−依赖于 $\mathrm{Re}\,z>0$ 或 $\mathrm{Re}\,z<0$。若 $\mathrm{Re}\,z=0$，则括号前面的项可去掉.

785. 求函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}\sqrt{z}\,dz}{z^2+\omega^2}\quad(\omega>0)$$

的渐近展开式. 再对充分小的 t，求 $f(t)$ 的展开式.

提示：将 C_1 换成图28所示的围道. 为得到积分 $\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\sqrt{x}\,dx}{x^2+\omega^2}$ 的渐近展开式，利用题**779**的提示. 对充分小的 t，选取 C_1 使得 α 大于 ω，并将 $\frac{1}{z^2+\omega^2}$ 展开成级数.

786. 证明：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}}{\sqrt{z}\,(z^2+1)}dz-\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n)!}{(2n)!}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^{4n+1}.$$

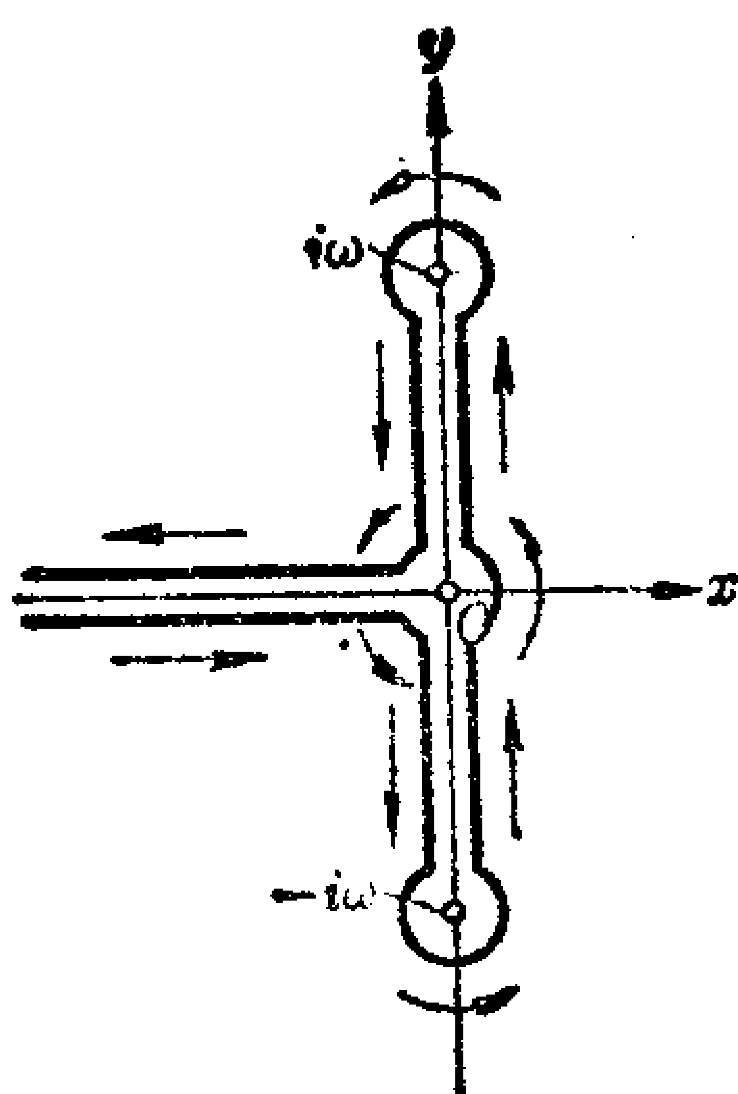


图 28

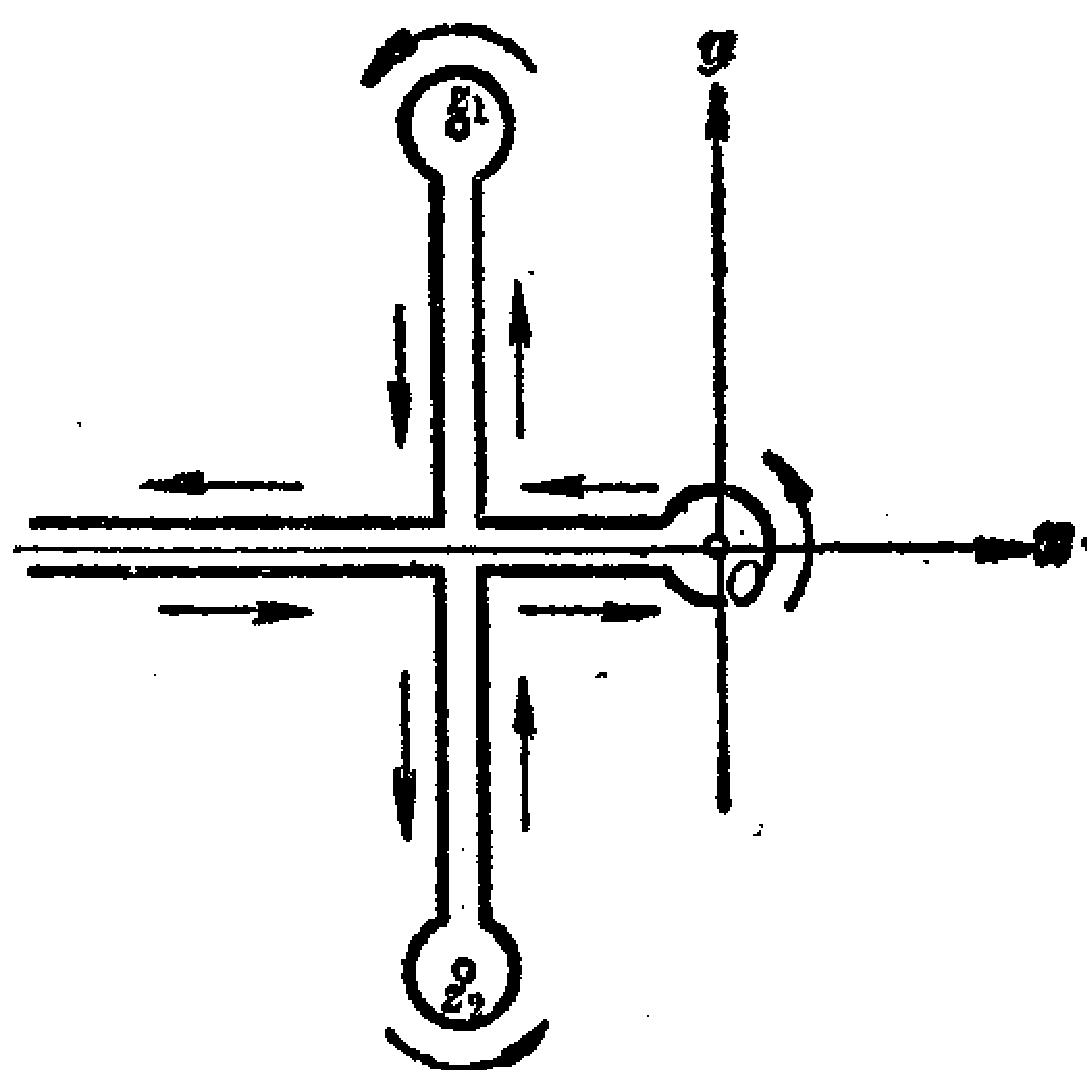


图 29

787. 求函数

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{zt}\,dz}{z(1+z^{\frac{3}{2}})}\quad (\text{对 } z>0,\ z^{\frac{3}{2}}>0)$$

的渐近展开式.

再对充分小的 t, 求得 $f(t)$ 的近似公式.

提示: 为求得渐近展开式, 将 C_1 换成图 29 所示的围道, 其中 $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$. 对充分小的 t, 应取直线 C_1 的横坐标大于 1.

§5. 零点分布. 级数的反演

路 歇 定 理

在题 788 至 790 中, 应用路歇 (Rouché) 定理确定已知方程在圆 $|z|<1$ 内根的个数.

788. $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$.

789. $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$.

790. $z^7-5z^4+z^2-2=0$.

791. 证明：若不等式

$$|a_k z^k|>|a_0+a_1 z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1}+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots+a_n z^n|$$

在围道 C 的所有点上成立，则当点 $z=0$ 在围道 C 内部时，多项式 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 在此围道内部有 k 个零点，而当点 $z=0$ 在 C 外部时则无零点.

792. 方程 $z^4-5z+1=0$ 在圆 $|z|<1$ 内有几个根？ 在圆环 $1<|z|<2$ 内呢？

793. 方程 $z^4-8z+10=0$ 在圆 $|z|<1$ 内有几个根？在圆环 $1<|z|<3$ 内呢？

794. 若 $|\alpha_0|>|\alpha_1|+|\alpha_2|+1$，方程 $z^n+\alpha_0 z^2+\alpha_1 z+\alpha_2=0$ 在圆 $|z|<1$ 内有几个根（n 为自然数）？

795. 若函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内解析且满足不等式 $|\varphi(z)|<1$，方程 $z=\varphi(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内有几个根？

796. 方程 $e^z-4z^n+1=0$ 在圆 $|z|<1$ 内有几个根（n 为自然数）？

797. 若 $|a|>e^R/R^n$，方程 $e^z=az^n$ 在圆 $|z|<R$ 内有几个根（n 为自然数）？

798. 证明方程 $z=\lambda-e^{-z}(\lambda>1)$ 在右半平面内有唯一的（实）根.

799*. 证明：无论 $\rho>0$ 怎样小，对一充分大的 n，函数

$$f_n(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}$$

的所有零点都在圆 $|z|<\rho$ 内.

800. 证明：若 $\rho<1$，则对充分大的 n，多项式

$$P_n(z)=1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}$$

在圆 $|z|<\rho$ 内没有根.

提示：应用解题 **799** 的方法。

幅 角 原 理

801. 函数 $\varphi(z)$ 在区域 G 内亚纯，在其边界 C 上解析. 证明下列论断：

1) 若在 C 上 $|\varphi(z)|<1$，则方程 $\varphi(z)=1$ 在区域 G 内根的个数等于函数 $\varphi(z)$ 在该区域内极点的个数；

2) 若在 C 上 $|\varphi(z)|>1$，则方程 $\varphi(z)=1$ 在区域 G 内根的个数等于函数 $\varphi(z)$ 在该区域内零点的个数；

3) 若方程 $\varphi(z)=1$ 代以方程 $\varphi(z)=\alpha$，且在情形 (1) 中 $|\alpha|\geqslant 1$，在情形 (2) 中 $|\alpha|\leqslant 1$，则论断 (1) 与 (2) 仍然成立.

802. 假设多项式

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

的零点都不位于虚轴上.

证明：当点 z 由上向下跑遍虚轴时，则 $P_n(z)$ 的幅角增量等于 $k\pi$，其中 k 是与 n 有相同奇偶性的整数，且 $|k|\leqslant n$.

证明：在此情形，多项式 $P_n(z)$ 在右半平面内有 $(n+k)/2$ 个零点.

提示：将 $P_n(z)$ 表示成

$$P_n(z)=z^n\left(1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right)$$

的形式，并对充分大的 R，将幅角原理应用于半圆 $|z|<R$，$\operatorname{Re} z>0$.

803. 多项式 $z^6+z^5+6z^4+5z^3+8z^2+4z+1$ 在右半平面内有几个根？

804. 方程 $z^4+2z^3+3z^2+z+2=0$ 在右半平面以及在第一象限内各有几个根？

805. 方程 $2z^4-3z^3+3z^2-z+1=0$ 在每个象限内各有几个根？

806. 方程 $z^4+z^3+4z^2+2z+3=0$ 的根在什么象限内？

807. 证明：若自然数 n 为偶数，则方程

$$z^{2n}+\alpha z^{2n-1}+\beta^2=0$$

(α 与 β 为实数，$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$)有正实部的根的个数等于 n. 若 n 为奇数，则当 $\alpha>0$ 时，这种根的个数为 $n-1$，而当 $\alpha<0$ 时，根的个数为 $n+1$.

提示：当点 z 描半径充分大的右半圆的边界时，考虑 $\arg(z^{2n}+\alpha z^{2n-1}+\beta^2)$ 的增量.

若多项式

$$P_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$$

的系数连续地依赖于实参数 α 与 β，则为了找出 $P_n(z)$ 的位于右半平面内的零点个数对于参数的依赖关系，进行如下(注意，每个零点都连续地依赖于多项式的系数)：

在(α, β)平面上描绘曲线 $P_n(i\tau)=0$(τ 为实参数)，即在此曲线上的点中有多项式的纯虚根(或零根)。这些曲线将(α, β)平面划分成若干区域，在每个区域内 $P_n(z)$ 的具有正实部的根的个数为一常数. 此常数可用下述方法求出：在相应的区域内任取一点，并对由该点确定的多项式 $P_n(z)$ 应用如题 **802** 中的方法.

在题 **808** 至 **810** 中，确定(α, β)平面上的区域，使在这些区域内，相应的多项式 $P(z)$ 的具正实部的根的个数为常数；并对每个区域求出此常数 m.

808. $P(z)=z^3+\alpha z^2+\alpha z+\beta$.

809. $P(z)=z^3+\alpha z^2+\beta z+1$.

810. $P(z)=z^3+(\alpha+\beta)z^2+(\alpha-\beta)z+\alpha$.

811. 设 $f(z)=P_n(z)-Q_m(z)e^{-z\tau}$，其中 $\tau>0$；$P_n(z)$ 与 $Q_m(z)$ 为互质多项式，$n>m$，且 $f(z)$ 在虚轴上无零点. A 为

多项式$P_n(z)$在右半平面内的零点个数．证明函数$f(z)$在右半平面内无零点的充要条件为：当点z自下而上跑遍整个虚轴时，点$w=-\frac{Q_m(z)}{P_n(z)}e^{-z\tau}$环绕点$w=1$按正方向旋转$N$次（若$P_n(z)$在虚轴上有零点，则当点$z$沿虚轴运动时，应沿着半径充分小的右半圆来绕过$P_n(z)$的这些零点）．

在题**812**至**814**中，应用题**811**的定理，在系数a, b的空间中（即在平面(a, b)上）求出区域，使相应函数的所有零点都落在左半平面内，其中假定$\tau>0$，a与b为实数．

812．$z+a+be^{-\tau z}$．**813**．$z^2+az+be^{-\tau z}$．

814．$z^2+(az+b)e^{-\tau z}$．

815．利用路歇定理证明：若函数$w=f(z)$在点z_0的邻域内有展开式

$$f(z)=w_0+c_k(z-z_0)^k+\cdots\quad(c_k\neq 0,\ k\geqslant 1),$$

则对充分小的$r>0$，存在$\rho>0$，使得小圆$|w-w_0|<\rho$内的任何值$w\neq w_0$在小圆$|z-z_0|<r$的异于z_0的点上恰好取到k次．

816．利用上题的结果，证明解析函数具有保区域性．

817．利用上题的结果，证明解析函数的最大模原理．证明对任意连续的保区域的映射$w=f(z)$，最大模原理也成立．

818．在题**815**的条件下，证明若$k=1$，即$f'(z_0)\neq 0$，则函数$f(z)$建立了点z_0的某个单连通邻域与小圆$|w-w_0|<\rho$之间的一一保形对应．

提示：在小圆$|w-w_0|<\rho$内考虑函数$z=f^{-1}(w)$．

819．在题**815**的条件下，证明若$k>1$，则函数$w=f(z)$将点z_0的某个单连通邻域一一映射到圆心在点w_0的k叶圆上．

820. 试将题 **818** 与 **819** 中所证的定理推广到当点 z_0 为函数 $f(z)$ 的简单极或重极点的情形.

821. 证明若函数 $f(z)$ 在无穷远点的邻域内有形如

$$f(z)=A_0+\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\cdots+\frac{A_k}{z^k}+\cdots$$

的展开式,则当 $A_1\neq 0$ 时,无穷远点的某个邻域能一一保形地映射到一单叶圆上,而当 $A_1=A_2=\cdots=A_{k-1}=0$ 但 $A_k\neq 0$ 时,映射到一 k 叶圆上.

级 数 反 演

822. 设 $F(z)=z-a-wf(z)$, 函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 解析. 应用路歇定理, 证明对充分小的 $|w|$, 存在一圆心在点 $z=a$ 的圆 K, 使函数 $F(z)$ 在此圆内只有一个零点(简单零点). 又证明若 $f(a)\neq 0$, 则对一适当选取的 w 值, 点 $z=a$ 的某一邻域内的任一点都可成为函数 $F(z)$ 的零点.

823. 设 $z=z(w)$ 是由方程 $z-a-wf(z)=0$ 对充分小的 $|w|$ 定义的单值函数, 又设函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 解析, $f(a)\neq 0$. 证明, 对充分小的 $|w|$, 对在点 $z=a$ 解析的任何函数 $\Phi(z)$, 我们有下述展开式:

$$\frac{\Phi(z)}{1-wf'(z)}=\Phi(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^n}{da^n}\{\Phi(a)[f(a)]^n\}.$$

提示: 在圆 K 内方程 $z-a-wf(z)=0$ 只有一个根(参见题 **822**), 若以 C 记圆 K 的圆周, 则

$$\frac{\Phi(z)}{1-wf'(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-a-wf(\zeta)}\,d\zeta.$$

然后将被积函数展开成 w 的幂级数, 并估计余项.

824. 用上题的记号, 证明拉格朗日公式

$$\Phi(z)=\Phi(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{\Phi'(a)[f(a)]^n\}.$$

特别，由此得到函数 $z=z(w)$ 自身的泰勒级数展开式。

提示：对函数 $\Phi(z)[1-wf'(z)]$ 应用上题的解.

825. 函数 $z(w)$ 由方程 $w=2z+z^2$ 定义，试将函数 $z(w)$ 的每一分枝都展开成 w 的幂级数(对一枝，$z(0)=0$，对另一枝，$z(0)=-2$).

826. 函数 $z=z(w)$ 由方程 $w=2\frac{z-a}{z^2-1}$ 定义，试将函数 $z=z(w)$ 满足 $z(0)=a$ 的一枝展开成 w 的幂级数.

827. 从勒让德多项式 $P_n(z)$ 的定义，并利用母函数 $\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}$(参见题 **492**)，证明

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n].$$

提示：利用题 **826** 的条件，对函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{1-2aw+w^2}}=\frac{1-z^2}{z^2-2az+1}$$

应用拉格朗日公式.

828 函数 $z=z(w)$ 是由方程 $w=ze^{-az}$ 在点 $w=0$ 的邻域内定义。试将下列函数展开成 w 的幂级数：

1) $z(w)$； 2) $e^{bz(w)}$.

829. 函数 $z=z(w)$ 由开普勒(Kepler)方程

$$z-a=w\sin z(a\neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \cdots)$$

在点 $w=0$ 的邻域内有定义，试将函数 $z=z(w)$ 展开成 w 的幂级数.

830*. 设 $z(w)$ 为上题中当 $a=\frac{\pi}{2}$ 时得到的函数，试确定 $z(w)$ 的展开式的收敛半径。

831. 证明下述拉格朗日定理的推广：

设 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 是在点 a 邻域内解析的函数，又设 C 为圆心在点 a，半径为 r 的圆，使得对 C 上所有的点都有

$$|\alpha f(z)+\beta\varphi(z)|<r.$$

若 $\Phi(\zeta)$ 是方程 $z-a-\alpha f(z)-\beta\varphi(z)=0$ 的单根所定义的解析函数，则

$$\Phi(\zeta)=\Phi(a)+\sum\frac{\alpha^m\beta^n}{m!n!}\frac{d^{m+n-1}}{da^{m+n-1}}\{\Phi'(a)[f(a)]^m[\varphi(a)]^n\},$$

其中和式取遍除 $m=n=0$ 外的所有 m 与 n.

第 五 章

各种函数项级数。参数积分

§1. 函数项级数

在题 **832** 至 **841** 中，求出已知级数的收敛域.

832. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^n}\right)$. **833.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$.

834. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z(z+n)}{n}\right]^n$. **835.** $\sum_{n=1}^{\infty}e^{z\ln n}$.

836. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nz}{n}$. **837.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$.

838. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{2^n}+1}$. **839.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$.

840. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

841. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(4+z)(4+z^2)\cdots(4+z^n)}$.

842*. 证明若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$ 当 $|z|\neq 1$ 时收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$ 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ 的收敛圆内收敛，而在此圆外发散.

843. 1) 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z^n}{1-z^n}$ 展开成 z 的幂级数，并求出所得级数的收敛半径；

2) 证明对 $|z|<1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\frac{z^n}{1-z^n}=\frac{z}{(1-z)^2}$, 其中 $\varphi(n)$ 是小于 n 而与 n 互质的自然数的个数.

提示: 利用熟知的数论关系式 $\sum\varphi(n)=m$, 其中 n 取遍数 m 的所有因数, 包括 1 与 m 在内.

844. 将函数 $\zeta(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-z\ln n}$ (黎曼 ζ-函数) 在点 $z=2$ 的邻域内展开成泰勒级数, 并求出它的收敛半径。

在题 **845** 至 **848** 中, 求出已知级数的和 ($|z|\neq 1$).

845. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n-1}}\right)$.

846. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$.

提示: 分子与分母乘以 $(1-z)$.

847. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2^n}}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1+z^{2^k})}$. **848**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2^{n-1}}}{z^{2^n}-1}$.

849. 证明下列命题:

1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在集合 E 上一致收敛的充要条件是: 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在数 $N=N(\varepsilon)$, 使得对所有的 $n>N$, 所有的 $z\in E$ 以及任意的自然数 p, 满足不等式 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}f_k(z)\right|<\varepsilon$;

2) 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在集合 E 上的一致收敛性可推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在同一集合上的一致收敛性.

850. 求出使下列序列一致收敛的集合:

1) $\left\{\frac{1}{1+z^n}\right\}$; 2) $\left\{\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right\}$; 3) $\left\{\frac{\sin nz}{n}\right\}$.

851. 证明连续函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在有界闭集 E 上一致

收敛的充要条件是：这个序列在集合 E 的所有点上收敛，且在集合 E 的所有极限点上连续地收敛，即对任意属于集合 E 且收敛于点 z_0 的点列 z_n，有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z_0).$$

在题 **852** 至 **856** 中，求出使已知级数一致收敛的集合。

852. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$. **853**. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$.

854. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\ln n}$. **855**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$.

856. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n}$.

857. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在闭圆 $|z| \leqslant 1$ 上一致收敛. 由逐项微分而得的级数是否在圆 $|z| < 1$ 内一致收敛？

858. 在平面上删去以点 $z=0, -1, -2, \cdots$ 为中心，以任意小的正数 ρ 为半径的圆. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 在这个平面的任意有限部分内一致收敛.

又证明这个级数在任何点上都不绝对收敛.

859. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在区间 $(-1, 0)$ 内一致收敛. 又证明在同一区间内级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n}\right|$ 收敛，但不一致收敛. [因此，在区间 $(-1, 0)$ 内，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 不能被收敛的数项级数所控制.]

注. 这个例子说明，维尔斯特拉斯一致收敛性判别法是充分而非必要的.

860. 1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z^2)^n}$ 对 $|z|\geqslant 0$, $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{4}$ 为绝对收敛(z 的这些值并没有充满整个绝对收敛区域，容易看到绝对收敛区域包括点 $z=0$ 与双纽线 $|1+z^2|=1$ 的外部). 证明级数在所给的区域中并不一致收敛;

注. 这说明即使从级数在一闭区域内绝对收敛也推不出一致收敛性.

2) 证明在同一区域内,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z}{(1+z^2)^n}$ 一致收敛且绝对收敛,但是并不绝对一致收敛(即模的级数不一致收敛).

861. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在 G 内的任何闭区域上一致收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'(z)|$ 具有同样的性质.

§2. 狄利克雷级数

一级数形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}$, 其中 a_n 为复系数, λ_n 为正数,满足条件:

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots \text{以及} \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,$$

则称此级数为具有正指数的狄利克雷级数.

862. 证明: 若狄利克雷级数在点 $z_0=x_0+iy_0$ 收敛, 则它在半平面 $\mathrm{Re}\,z>\mathrm{Re}\,z_0$ 的所有点上都收敛, 且在每个角 $|\arg(z-z_0)|\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 内为一致收敛.

提示: 对和式

$$\sum_{n=p}^{q}a_n e^{-\lambda_n z}=\sum_{n=p}^{q}a_n e^{-\lambda_n z_0}e^{-\lambda_n(z-z_0)}$$

应用阿贝耳变换,并利用不等式($a<b$, $z=x+iy$)

$$|e^{-az}-e^{-bz}|=\left|z\int_a^b e^{-zt}dt\right|\leqslant\frac{|z|}{x}\quad(e^{-ax}-e^{-bx}).$$

863. 证明：若狄利克雷级数在点 $z=z_0$ 绝对收敛，则它在半平面 $\operatorname{Re} z \geqslant \operatorname{Re} z_0$ 内绝对收敛并且一致收敛.

从题 **862** 与 **863** 所证的定理可知狄利克雷级数的收敛区域(若存在的话)是半平面 $\operatorname{Re} z > x_c (x_c \geqslant -\infty)$，绝对收敛区域(若存在的话)是半平面 $\operatorname{Re} z > x_a (x_a \geqslant -\infty)$，而且级数或者在整个直线 $\operatorname{Re} z = x_a$ 上绝对收敛，或者在此直线的任何点上都不绝对收敛. 数 x_c 与 x_a 分别称为狄利克雷级数的收敛横坐标与绝对收敛横坐标.

在题 **864** 至 **870** 中，求出已知级数的收敛横坐标(x_c)与绝对收敛横坐标(x_a).

864. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^3} e^{-zn^2}$.　　**865**. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-z \ln \ln n}$.

866. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-z \ln \ln n}$.　　**867**. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n e^{-z \ln \ln n}$.

868. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z \ln n}$.　　**869**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-z \ln n}$.

870. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{n} e^{-zn^2}$.

871. 证明：若 $\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$，则

$$x_c = x_a = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}.$$

872. 证明：若 $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = l$，则 $x_a - x_c \leqslant l$.

在题 **873** 至 **877** 中，研究狄利克雷级数在收敛半平面的边界上的收敛性.

873. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-z \ln n}$.　　**874**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-z \ln n}$.

875. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-zn}$.　　**876**. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-zn}$.

877. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} e^{-zn}$.

提示：参见题 **449**.

在题 878 与 879 中，我们考虑有复指数的狄利克雷级数.

878. 设数 λ_n 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0 \text{ 与 } \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{|\lambda_n|}=k<\infty.$$

试证：若 $\alpha\leqslant\arg\lambda_n\leqslant\beta$，则狄利克雷级数在使不等式 $x\cos\varphi-y\sin\varphi-k>0$ 对 $[\alpha, \beta]$ 内所有的 φ 都成立的任何点 $z=x+iy$ 上绝对收敛，而在使不等式 $x\cos\varphi-y\sin\varphi-k<0$ 对 $[\alpha, \beta]$ 内所有的 φ 都成立的点 $z=x+iy$ 上发散.

879. 任给一狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_nz}$. 令 $k(\varphi, \alpha)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|a_{n_k}|}{|\lambda_{n_k}|}$ 以及 $k(\varphi)=\lim_{\alpha\to 0}k(\varphi, \alpha)$，其中 $\{n_k\}$ 是使 $\varphi-\alpha\leqslant\arg\lambda_{n_k}\leqslant\varphi+\alpha$ 的所有足标的序列（若满足 $\lim_{m\to\infty}\arg\lambda_{n_m}=\varphi$ 的子列 $\{n_m\}$ 不存在，则令 $k(\varphi)=-\infty$）.

试证若 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0$，则级数在区域 G 内绝对收敛，此处 G 中的点 $z=x+iy$ 满足条件：对任何 φ，$x\cos\varphi-y\sin\varphi-k(\varphi)>0$，而在 G 外的任何点上都发散。

§3. 参数积分

积分的收敛性

880. 证明定理：

设 C 为具有有限长度的简单围道（闭或开的），又设对某一区域 D 内所有的 z 以及属于围道 C 的所有的点 τ，$f(\tau, z)$ 是关于变量 z 的解析函数、关于 τ 的连续函数. 则由积分 $F(z)=\int_C f(\tau, z)d\tau$ 所给出的函数是变量 z 的解析函数，且

$$F'(z)=\int_C f'_z(\tau, z)d\tau.$$

若$\int_C f(\tau, z)d\tau$为广义积分，即若被积函数在某孤立点$\tau\in C$不连续，或者积分的围道包含无穷远点，则这样一个积分的收敛性、一致收敛性的定义完全类似于数学分析教程中所给的相应定义.

881．证明积分$\int_C f(\tau, z)d\tau$在集合E上关于围道C的某点$\tau_0\neq\infty$为一致收敛的充要条件是：任给$\varepsilon>0$，存在数$\delta(\varepsilon)$，使得对所有E中的点z与围道C上任意的弧C_σ有

$$\left|\int_{C_\sigma} f(\tau, z)d\tau\right|<\varepsilon,$$

其中C_σ落在点τ_0的δ邻域内，但不包含该点于其内部或以该点为端点.

882．若$\tau_0=\infty$，叙述并证明积分一致收敛性的类似判别准则．考虑围道C一端无界与两端无界的情形.

883．证明：若对集合E内所有的点z都有$|f(\tau, z)|\leqslant|\psi(\tau)|$，又若$\int_C|\psi(\tau)|d\tau$收敛，则积分$\int_C f(\tau, z)d\tau$在集合$E$上一致收敛.

884．设对属于某区域D的点z与属于一围道C的点τ（除某些孤立点外），$f(\tau, z)$为关于z的解析函数与关于τ的连续函数．在关于τ的那些孤立点上，加在函数$f(\tau, z)$上的条件，或者对所有的点z，或者只对其中某些点z，将不再满足.

证明：若广义积分

$$F(z)=\int_C f(\tau, z)d\tau$$

在区域 D 的内部(即在区域 D 的任何闭子区域内)一致收敛，则 $F(z)$ 为解析函数，且

$$F'(z)=\int_C \frac{\partial f}{\partial z}\,d\tau.$$

这个积分也在 D 的内部一致收敛.

在题 **885** 至 **892** 中，求出使已知积分一致收敛的集合.

885. $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \quad (t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t})$.

886. $\int_0^\infty e^{-zt^2}dt$.

887. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$.

888. $\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^z}dt$.

889. $\int_0^\infty \frac{\sin tz}{t}dt$.

890. $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t}dt \quad (c\neq 0)$.

891. $\int_c^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{t}dt \quad (c\neq 0)$.

892. $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{z^t}{t}dt \quad (c\neq 0,\ z^t=e^{t\ln z})$.

拉普拉斯积分

形如

$$\int_0^\infty e^{-tz}f(t)dt \tag{1}$$

的积分称为**拉普拉斯积分**，其中函数 $f(t)$ 对任意正数 $a<+\infty$，在区间 $[0, a]$ 上可积.

893. 证明下列命题:

1) 若积分(1)在点 $z=z_0$ 收敛，则它在半平面 $\operatorname{Re} z>\operatorname{Re} z_0$ 内收敛，在角 $|\arg(z-z_0)|\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ 内一致收敛;

2) 若积分 (1) 在 $z=z_0$ 绝对收敛，则它在半平面 $\operatorname{Re} z\geqslant \operatorname{Re} z_0$ 内绝对收敛且一致收敛;

3) 若 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{\ln|f(t)|}{t}=\beta$，则积分 (1) 在半平面 $\operatorname{Re}z>\beta$ 内绝对收敛，在任何半平面 $\operatorname{Re}z\geqslant\beta+\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ 内一致收敛（构造一个在整个平面上都绝对收敛的拉普拉斯积分的例子，且对此有 $\beta=\infty$）；

4) 若 $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{\ln|f(t)|}{t}=\alpha$，则积分 (1) 在半平面 $\operatorname{Re}z<\alpha$ 的任何点上都不绝对收敛.

从题 **893** 所叙述的定理，即得拉普拉斯积分的收敛区域与绝对收敛区域（若这样两种区域存在的话）为半平面 $\operatorname{Re}z>x_c$ 与 $\operatorname{Re}z>x_a$；数 x_c 称为拉普拉斯积分的**收敛横坐标**，数 x_a 称为拉普拉斯积分的**绝对收敛横坐标**.

在题 **894** 至 **900** 中，对积分 $\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,dt$ 求 x_c 与 x_a，其中 $f(t)$ 是已知函数.

894. $f(t)=1$. **895**. $f(t)=e^{-t^2}$. **896**. $f(t)=e^{t^2}$.

897.

$$f(t)=\begin{cases} e^{-t^2}, & \text{对 } 0\leqslant t<\ln\ln 3 \text{ 与 } \ln\ln 2k\leqslant t<\ln\ln(2k+1) \\ & (k=2,\ 3,\ \cdots), \\ -e^{-t^2}, & \text{对 } \ln\ln(2k+1)\leqslant t<\ln\ln(2k+2) \\ & (k=1,\ 2,\ \cdots). \end{cases}$$

898.

$$f(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{2}e^t}, & \text{对 } 0\leqslant t<\ln\ln 3 \text{ 与 } \ln\ln 2k\leqslant t<\ln\ln(2k+1) \\ & (k=2,\ 3,\ \cdots); \\ -e^{\frac{1}{2}e^t}, & \text{对 } \ln\ln(2k+1)\leqslant t<\ln\ln(2k+2) \\ & (k=1,\ 2,\ \cdots). \end{cases}$$

899.

$$f(t)=\begin{cases} e^{e^t}, \text{ 对 } 0\leqslant t<\ln\ln 3 \text{ 与 } \ln\ln 2k\leqslant t<\ln\ln(2k+1) \\ \qquad (k=2,\ 3,\ \cdots), \\ -e^{e^t}, \text{ 对 } \ln\ln(2k+1)\leqslant t<\ln\ln(2k+2) \\ \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots). \end{cases}$$

900.

$$f(t)=\begin{cases} e^t, \text{ 对 } \ln(2k-1)\leqslant t<\ln 2k & (k=1,\ 2,\ \cdots), \\ -e^t, \text{ 对 } \ln 2k\leqslant t<\ln(2k+1) & (k=1,\ 2,\ \cdots). \end{cases}$$

在题 **901** 至 **904** 中，讨论拉普拉斯积分$\int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt$在收敛半平面的边界上的收敛性.

901. $f(t)=1$.

902. $f(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\ f(t)=\frac{1}{t^2},\ t>1$.

903. $f(t)=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\ f(t)=\frac{1}{t},\ t>1$.

904. $f(t)=0,\ t=0;\ f(t)=1,\ 0<t\leqslant 1$; 而当 $t>1$, $f(t)$ 定义如下:

$$f(t+1)=\begin{cases} f(t)+1, & (2k-1)^2<t+1\leqslant(2k)^2, \\ f(t)-1, & (2k)^2<t+1\leqslant(2k+1)^2 \\ & (k=1,\ 2,\ \cdots). \end{cases}$$

第 六 章

无穷乘积．整函数与亚纯函数

§1. 无 穷 乘 积

在题 **905** 至 **911** 中，证明给出的等式。

905. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.

906. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]=2$.

907. $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4}$.

908. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{3}$.

909. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

910. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]=1$.

911. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=e^C$，其中 $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$是欧拉常数.

912. 证明 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

提示：首先证明恒等式 $\sin\varphi=2^k\sin\frac{\varphi}{2^k}\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{\varphi}{2^n}$.

913. 利用题 **912** 的解，证明

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

914*. 证明瓦利斯(Wallis)公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right).$$

915. 证明：若我们如通常那样假设 $-\pi<\arg p_n\leqslant\pi$，则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 同时收敛或发散.

916. 如果约定:

1) $0\leqslant\arg p_n<2\pi$; 2) $\alpha<\arg p_n\leqslant\alpha+2\pi\ (-2\pi<\alpha<0)$;

试问上题结论是否还成立?

917. 证明无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛 $\left[\text{即级数 }\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)\text{ 绝对收敛}\right]$ 的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

918. 乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 收敛,试讨论下列乘积的收敛性:

1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n-q_n)$;

3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_nq_n$; 4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$.

在题 **919** 至 **923** 中,讨论已知乘积的收敛性与绝对收敛性.

919. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$. **920**. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

921. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]\quad(p>0)$.

922. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\quad(p>0)$.

923. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos z_n$，若已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|^2$ 收敛。

924. 证明在单位圆的内部

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z},$$

且乘积在单位圆的内部绝对收敛.

在题 925 至 934 中，求出已知乘积的收敛区域.

925. $\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$.

926. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^n}{2^n}\right)$.

927. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

928. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}z^{-n}\right]$.

929. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}z^n\right]$.

930. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{n}$.

931. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}$.

932. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$.

933. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_nz)$，若已知 $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$ 为收敛级数.

934. 证明乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^z}\right]\quad(n^z=e^{z\ln n})$$

在半平面 $\operatorname{Re}z>\frac{1}{2}$ 内收敛，在半平面 $\operatorname{Re}z>1$ 内绝对收敛.

935. $\{f_n(z)\}$是在区域 G 内解析的函数序列，所有这些函数，除有限个外，在区域 G 内都不为零. 证明若对所有 $z\in G$，$|f_n(z)|\leqslant\alpha_n$，其中 α_n 与 z 无关，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 是收敛级数，则函数 $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(z)]$ 在 G 内解析.

在题 **936** 至 **939** 中，我们考察 Γ-函数的可由其无穷乘积极限定义推出的某些性质.

936. 证明乘积

$$\Gamma(z+1)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z}{z+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{z}\quad\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{z}=e^{z\ln\frac{n+1}{n}}\right)$$

在除了 z 等于负整数外的整个平面内绝对收敛，并且除了在点 $z=-1,\ -2,\ \cdots$外，它表示一个全平面内的解析函数。

937. 证明欧拉公式

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\quad(n^{z}=e^{z\ln n}),$$

并证明：

1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$；

2) $\Gamma(m+1)=m!$，若 m 为自然数.

938. 证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$(\alpha,\ \beta\neq-1,\ -2,\ \cdots).$$

939. 证明维尔斯特拉斯公式

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

其中 C 是欧拉常数.

提示：利用题 **911** 的解.

940*. 设 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots$为所有质数的序列($p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $\cdots$)，又设 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-s}\,(n^{-s}=e^{-s\ln n})$ 为黎曼 ζ-函数，在半平面 $\mathrm{Re}\,s>1$ 内解析(参见题 **844**). 证明：

1) $\zeta(s)=\dfrac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-s})}$；

2) 函数$\zeta(s)$在半平面$\operatorname{Re} s>1$内无零点.

941*. 证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$是发散级数，其中$\{p_n\}$为质数的序列.

§2. 部分分式展开、无穷乘积展开. 级数求和

942. 设$f(z)$为亚纯函数，在点$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$有简单极点；$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$. 以$A_n$记$f(z)$关于极点$a_n(n=1, 2, \cdots)$的残数. 假设存在一列闭围道$C_m$，满足下列条件：

1) C_m不通过任何点a_n；

2) 每一条围道C_m都被围道C_{m+1}所包围；

3) 从围道C_m到原点的最小距离(记为R_n)当$m\to\infty$时无限增加；

4) 围道C_m的长度L_m与R_m之比有界，即$L_m=O(R_m)$；

5) $\max\limits_{z\in C_m}|f(z)|=o(R_m)$(若函数$f(z)$在所有围道$C_m$上都有界，则这个条件显然满足).

证明在这些条件之下，函数$f(z)$可分解为部分分式

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right).$$

若在求和号下，我们将关于落在C_m与C_{m+1}之间的极点的被加项组合起来$(m=1, 2, \cdots)$，则级数在任何不包含点a_n的闭区域内一致收敛.

提示：对积分$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta(\zeta-z)}$应用残数定理，并求$m\to\infty$时的极限.

在题 **943** 至 **951** 中，证明给出的展开式成立.

943. $\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$.

944. $\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2-n^2\pi^2}$.

945. $\operatorname{tg} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2-z^2}$.

946. $\frac{1}{\cos z}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{z^2-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$.

947. $\operatorname{th} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2+\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2}$.

948. $\frac{1}{\operatorname{sh} z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2z}{z^2+n^2\pi^2}$.

949. $\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2+4n^2\pi^2}$.

950. $\frac{1}{\sin^2 z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}$.

951. 设 $f(z)$ 为整函数，在点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 有简单零点；$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots$，$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$. 我们假设存在一列围道 $\{C_m\}$，满足题 **942** 中的条件 1 至 4，以及在围道上

$$\max_{z\in C_m}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|=o(R_m).$$

证明下面的展开式在整个平面上成立：

$$f(z)=f(0)e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}.$$

在题 **952** 至 **958** 中，证明展开式成立，

952. $\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$

953. $\cos z = \prod_{n=0}^{\infty}\left\{1-\left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}.$

954. $\operatorname{sh} z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$

955. $\operatorname{ch} z = \prod_{n=0}^{\infty}\left\{1+\left[\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right]^2\right\}.$

956. $e^z-1 = ze^{\frac{z}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^2}{4n^2\pi^2}\right).$

957. $e^{az}-e^{bz} = (a-b)ze^{\frac{1}{2}(a+b)z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(a-b)^2z^2}{4n^2\pi^2}\right].$

958. $\operatorname{ch} z-\cos z = z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^4}{4n^4\pi^4}\right).$

959. 设$f(z)$为亚纯函数，有有限个极点：$a_1, a_2, \cdots, a_m$，都不与点$z=0, \pm1, \pm2, \cdots$相重合．证明：若存在一列收缩到无穷远点的围道$\{C_n\}$，以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n} f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz=0, \tag{1}$$

则
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=a_k}\,[f(z)\operatorname{ctg}\pi z].$$

960. 证明：在上题的条件下，若条件(1)换成条件

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{f(z)\,dz}{\sin\pi z}=0,$$

则
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n) = -\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname*{res}_{z=a_k}\left[\frac{f(z)}{\sin\pi z}\right].$$

在题 **961** 至 **968** 中，假设数a使得任何分母都不为零，求级数之和。

961. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^2}$.　　**962.** $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(a+n)^2}$.

963. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.　　**964.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$.

965. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$.　　**966.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

967. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$　(k 为自然数).

提示：首先证明：若 $z=0$ 为函数 $f(z)$ 的极点，则题 **959** 中的级数和的公式仍然成立，只要左边的求和是除了 $n=0$ 之外取遍从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有 n 值.

在 $\underset{z=0}{\operatorname{res}}\left[\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z^{2k}}\right]$的计算中，宜用题 **487** 的展开式.

968. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nb}{a^2-n^2}$　$(-\pi<b<\pi)$.

提示：利用积分$\int_{C_n}\frac{ze^{ibz}dz}{(a^2-z^2)\sin\pi z}$　(C_n 为题 **960** 中的围道).

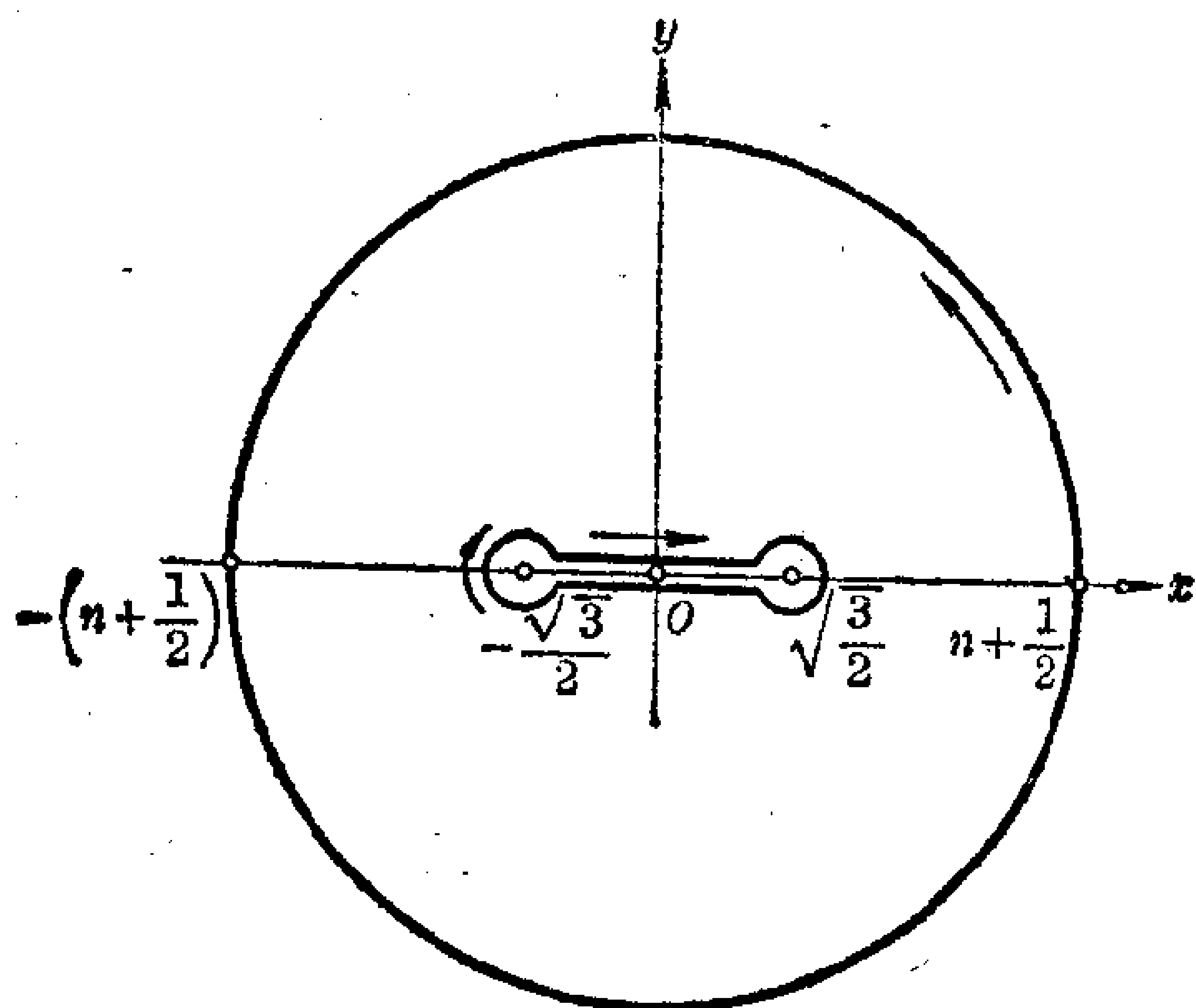


图 30

969. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\sqrt{4n^2-3}}$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x\operatorname{ctg}\pi x}{(3-x^2)\sqrt{3-4x^2}}dx+\frac{1}{6}\operatorname{ctg}[\pi(2-\sqrt{3})].$$

提示: 利用积分$\int_{C_n}\frac{z\operatorname{ctg}\pi z dz}{(z^2-3)\sqrt{4z^2-3}}$, 其中 C_n 为图 30 中双连通区域的边界围道.

§3. 整函数增长的特征

设 $f(z)$ 是整函数, $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. 数 $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$ 称为整函数的阶. 若 $0<\rho<\infty$, 则数 $\sigma=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}$ 称为函数的型. 若 $\sigma=0$, 函数 $f(z)$ 称为零型函数; 若 $\sigma=\infty$, 函数 $f(z)$ 称为极大型函数; 若 $0<\sigma<\infty$, 函数 $f(z)$ 称为有限型函数.

970. 证明下列论断:

1) 若 $\rho\neq\infty$ 与 $\sigma\neq\infty$ 分别为函数 $f(z)$ 的阶与型, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在数 $R(\varepsilon)$, 使得 $r>R$ 时, 下面的不等式成立:

$$M(r)<e^{r^{\rho+\varepsilon}},\quad M(r)<e^{(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}}.$$

同样也存在收敛于无穷的数列 $\{r_n\}$ 与 $\{r_n'\}$, 使得

$$M(r_n)>e^{r_n^{\rho-\varepsilon}} \text{ 与 } M(r_n')>e^{(\sigma-\varepsilon)r_n'^{\rho}};$$

2) 若对自然数 k

$$0<\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{M(r)}{r^k}<\infty,$$

则 $f(z)$ 为 k 次多项式$\left(\text{从而, }\lim\limits_{r\to\infty}\frac{M(r)}{r^k}\text{ 存在}\right)$;

提示: 对幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的系数应用柯西不等式.

3) 若 $f(z)$ 为超越整函数，则

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r)}{\ln r}=\infty.$$

在题 **971** 至 **983** 中，确定给出的函数的阶与型(n 为自然数)。

971. $c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n$.

972. $e^{az^n}\quad(a>0)$.

973. z^ne^{3z}.

974. $z^2e^{2z}-e^{3z}$.

975. $e^{5z}-3e^{2z^3}$.

976. $e^{(2-i)z^3}$.

977. $\sin z$.

978. $\operatorname{ch} z$.

979. $e^z\cos z$.

980. $\cos\sqrt{z}$.

981*. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2^mn)!}$ (m 为自然数).

982. e^{e^z}.

983*. $\int_0^1 e^{zt^2}dt$.

984. 整函数 $f(z)$ 为 ρ 阶，σ 型 $(0\leqslant\sigma\leqslant\infty)$. 证明函数 $P(z)f(z)+Q(z)$ 也是 ρ 阶，σ 型，其中 $P(z)$ 与 $Q(z)$ 为任意的多项式.

985. 整函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 分别为 ρ_1 阶与 ρ_2 阶 $(\rho_1\neq\rho_2)$，试问函数 $f_1(z)f_2(z)$ 与 $f_1(z)+f_2(z)$ 的阶 ρ^* 是什么？

986. 整函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 同阶 ρ，分别为 σ_1 型与 σ_2 型 $(\sigma_1\neq\sigma_2)$. 试问下列函数的阶 ρ^* 与型 σ^* 是什么？

1) $f_1(z)f_2(z)$； 2) $f_1(z)+f_2(z)$.

987. 整函数 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 有相同的阶 ρ 与型 σ. 试问下列函数的阶 ρ^* 与型 σ^* 是什么？

1) $f_1(z)f_2(z)$； 2) $f_1(z)+f_2(z)$.

988*. $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$，$\lambda_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，$\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\alpha>0$，$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\beta<\infty$. 证明 $f(z)$ 是 1 阶、σ 型的整函数，而型 σ 满足不等式 $\pi\alpha\leqslant\sigma\leqslant\pi\beta$.

989. $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^{2k}}{\lambda_n^2}\right)$, $\lambda_n>0\,(n=1, 2, \cdots)$, $2k$为自然数. 证明下列论断:

1) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=0$, 则$f(z)$为增长不快于 k 阶零型函数的整函数;

2) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\infty$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}<\infty$, 则$f(z)$的增长不慢于 k 阶极大型函数.

提示: 利用解上题的方法.

990*. 证明求导后的整函数,其阶与型仍然不变.

利用下面的定理,解题 **991** 至 **998**.

若整函数的幂级数展开式形如$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 则这个函数的阶$\rho$与型$\sigma$由下面的等式定义:

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{\ln\left|\frac{1}{c_n}\right|},$$

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|c_n|}).$$

991. 证明整函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Az)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\quad(A>0,\ \alpha>0)$$

的阶 $\rho=\frac{1}{\alpha}$, 型 $\sigma=A^{\frac{1}{\alpha}}$.

提示: 利用斯特林(Stirling)公式

$$\Gamma(\alpha n+1)=\left(\frac{\alpha n}{e}\right)^{\alpha n}\sqrt{2\pi\alpha n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

在题 **992** 至 **998** 中,求已知函数的阶与型.

992. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$.

993. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{n}{a}}z^n \quad (a>0)$。

994. $f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)^{\frac{n}{a}}z^n \quad (a>0)$。

995. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}z^n$.

996. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n^{1+a}}} \quad (a>0)$。

997. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{n}}{n!}z^n$.

998. $z^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \quad (\nu>-1;\ J_\nu(z)$ 是 ν 级贝塞耳函数).

若 ρ 是整函数 $f(z)$ 的阶 $(0<\rho<\infty)$，则函数

$$h(\varphi)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho}$$

称为函数 $f(z)$ 增长的指示函数.

在题 **999** 至 **1005** 中，求已知函数的阶 ρ 与指示函数 $h(\varphi)$。

999. e^z。 **1000**. e^z+z^2. **1001**. $\sin z$.

1002. $\cos z$. **1003**. $\operatorname{ch} z$. **1004**. e^{z^n}.

1005. $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

1006. 整函数 $f(z)$ 的指示函数为 $h(\varphi)$，$P(z)$ 是多项式. 试问下列函数的指示函数是什么？

1) $f(z)+P(z)$； 2) $f(z)P(z)$.

1007. $P(z)$ 为任意的多项式. 试给出一个（有限非零阶）整函数 $f(z)$ 的例子，使它的指示函数 $h(\varphi)$ 在某个区间内等于零，而 $f(z)+P(z)$ 的指示函数在同一区间内为负.

第 七 章

柯 西 型 积 分.
泊松与许瓦尔兹积分公式

§1. 柯西型积分

形如

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

的积分称为**柯西型积分**，其中 C 为光滑围道[1](闭的或开的)，$\varphi(\zeta)$为 C 上的连续函数(可能有限个点除外，在这些点上 $\varphi(\zeta)$有可积的不连续点)．函数 $\varphi(\zeta)$称为积分的**密度**，而$\frac{1}{\zeta-z}$ 称为积分的**核**．在不包含围道 C 的任何点的每一个区域内，柯西型积分表示一个解析的函数 $F(z)$．在这里，

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}. \tag{1}$$

设 $\varphi(\zeta)$在围道 C 上满足 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$阶利普希茨(Lipschitz)条件(简写为 $\varphi(\zeta)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$)，即

$$|\varphi(\zeta_1)-\varphi(\zeta_2)|<k|\zeta_1-\zeta_2|^\alpha,$$

其中点 ζ_1 与 ζ_2 属于围道 C，而 k 为常数．于是，若围道上的点 ζ_0 不是它的端点，则存在定义为柯西型积分主值的**奇异积分**

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}.$$

利用普通的广义积分，这个主值可用公式

1) 光滑围道是指有连续变化的切线以及没有尖点的简单(即没有自交点)曲线．附带指出，施加于围道 C 的条件可以大大减弱．我们也可考虑由有限段上述类型的围道所组成的复合围道.

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)+\frac{\varphi(\zeta_0)}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{b-\zeta_0}{a-\zeta_0} \tag{2}$$

来表示，其中点 a 与 b 是围道 C 的端点，若围道是开的话．对闭围道 $(a=b)$ 的情形，选 Ln 的单值枝使含对数的项等于零，则公式取

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0) \tag{2'}$$

的形式．

若我们用 $F^+(\zeta_0)$ 与 $F^-(\zeta_0)$ 分别表示柯西型积分 $F(z)$ 当 z 从 C 的左边与从 C 的右边趋于 ζ_0 时的极限值，则按索霍茨基公式有

$$\left.\begin{aligned}F^+(\zeta_0)&=F(\zeta_0)+\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)\\F^-(\zeta_0)&=F(\zeta_0)-\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

或者

$$F(\zeta_0)=\frac{1}{2}[F^+(\zeta_0)+F^-(\zeta_0)],\ F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=\varphi(\zeta_0). \tag{4}$$

若围道 C 是闭的，而且它以通常的方向绕圈，则 $F^+(\zeta)$ 是定义在围道内部（区域 D^+）的函数 $F^+(z)$ 的极限值，而 $F^-(\zeta)$ 是定义在围道外部（区域 D^-）的函数 $F^-(z)$ 的极限值[1]．

1008．证明：若 C 为闭围道，而柯西型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

的密度可表示成 $\varphi(\zeta)=\varphi^+(\zeta)+\varphi^-(\zeta)$，其中 $\varphi^+(\zeta)$ 与 $\varphi^-(\zeta)$ 分别为在围道 C 的内部与外部解析的函数的边界值，则

$$\Phi^+(z)=\varphi^+(z),\ \Phi^-(z)=-\varphi^-(z)+\varphi^-(\infty).$$

注．若已知函数 φ^- 或 φ^+ 之一恒等于零，则柯西型积分分别变成内部区域或外部区域的柯西积分．

1009．设 C 为闭围道．若柯西型积分的密度是下列函数之一（n 为自然数），求 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$：

1) 当围道是划分平面为两个区域的无限曲线时同样成立．

1) $\varphi(\zeta)=(\zeta-a)^n$;

2) $\varphi(\zeta)=\dfrac{1}{(\zeta-a)^n}$ (a 在 C 的内部);

3) $\varphi(\zeta)=\dfrac{1}{(\zeta-a)^n}$ (a 在 C 的外部).

1010. 求 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$, 若:

1) 函数 $\varphi(\zeta)$ 为 D^+ 内除了有限个点 a_k 外处处解析的函数的边界值, 而在这些点 a_k 上, 函数有极点;

2) 函数 $\varphi(\zeta)$ 为 D^- 内除了有限个点 a_k 外处处解析的函数的边界值, 而在这些点 a_k 上, 函数有极点(a_k 也可以包括点 $z=\infty$).

1011. 求 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$, 若:

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta^3+i\zeta^2-\zeta+4i}{\zeta^4-3\zeta^2-4}+\frac{\ln\dfrac{\zeta-2}{\zeta-3}}{\zeta^2-4},$$

而 C 为圆 $|\zeta|=\dfrac{3}{2}$.

1012. 若 $\varphi(\zeta)=\operatorname{ctg}\zeta$, 而 C 为圆 $|\zeta|=5$, 求 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$.

1013. 若 $\varphi(\zeta)=\dfrac{\zeta^2}{\zeta^2+1}$, 而 C 为实轴, 方向自左向右, 求 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$

注. 沿实轴而取的柯西型积分 $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ 若在普通意义下发散, 则是指它的主值.

1014. 若 C 为圆 $|\zeta|=R$, 而 $\varphi(\zeta)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$ 为实函数 $\psi(\theta)=\varphi(Re^{i\theta})$ 的一致收敛的傅里叶(Fourier)级数, 求 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$, 以及在积分围道 C 上的极限值 $F^{\pm}(\zeta)$.

1015. 1) 设 C 为圆 $|\zeta|=\frac{\pi}{2}$，而 $f(\zeta)$ 为圆 $|\zeta|\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内的解析函数. 在区域 D 内求由积分

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\operatorname{ctg}(\zeta-z)\,d\zeta,$$

$$I_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\sin(\zeta-z)}$$

所定义的函数，该区域的点 z 具有如下性质：没有一个点 $z+k\pi$（k 为整数）位于 C 上；

2) 取 C 为圆 $|\zeta|=\pi$，求解第(1)小题中叙述的问题.

1016. 设 C 为区间 $[-1,1]$，方向从左至右，并设 $\varphi(\zeta)\equiv 1$. 求：在 C 外的 $F(z)$，极限值 $F^{\pm}(\zeta)$，以及在 C 上的主值 $F(\zeta)$. 特别计算 $F(\pm i)$，$F^{\pm}(0)$ 与 $F(0)$ 的值.

1017. 设 C 为半圆 $|\zeta|=R$, $0<\arg\zeta<\pi$（始于点 R），又设 $\varphi(\zeta)\equiv 1$. 求：在 C 外的 $F(z)$，极限值 $F^{\pm}(\zeta)$，以及在 C 上的主值 $F(\zeta)$. 特别计算 $F(0)$，$F^{\pm}(iR)$，$F(iR)$ 以及 $F'(0)$.

1018. 设 C 为半圆 $|\zeta|=R$, $-\pi<\arg\zeta<0$（始于点 R），又设 $\varphi(\zeta)\equiv 1$. 求：在 C 外的 $F(z)$，在 C 上的极限值 $F^{\pm}(\zeta)$，$F(0)$ 与 $F'(0)$.

1019. 设柯西型积分的密度为 $\varphi(\zeta)=\frac{1}{\zeta^n}$. 求出在 C 外的 $F(z)$，若围道 C 为指定的曲线：

1) 圆环 $r<|z|<R$ 的边界；

2) 直线 $\operatorname{Im}\zeta=\pi$，方向从左至右；

3) 带形 $|\operatorname{Im} z|<\pi$ 的边界；

4) 半圆 $|\zeta|=R$, $0<\arg\zeta<\pi$ （始于点 R）；

5) 半圆 $|\zeta|=R$, $-\pi<\arg\zeta<0$ （始于点 R）.

在第(4)与第(5)小题中，求在 C 上的极限值 $F^{\pm}(\zeta)$，并计算 $F(0)$ 的值.

在题 **1020** 至 **1025** 中，假设围道 C 为联接点 a 与点 b 的弧，$\varphi(\zeta)$ 为给出的函数，求在 C 外的 $F(z)$.

1020. $\varphi(\zeta)\equiv 1$. **1021**. $\varphi(\zeta)=\zeta$.

1022. 1) $\varphi(\zeta)=\zeta^n$; 2) 整函数 $\varphi(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\zeta^n$.

1023. $\varphi(\zeta)=\dfrac{1}{\zeta-z_0}$ $(z_0\overline{\in}C)$.

1024. $\varphi(\zeta)=\dfrac{1}{(\zeta-z_0)^n}$ $(z_0\overline{\in}C)$. 特别计算 $F(z_0)$ 的值.

提示：利用等式 $\dfrac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}=\dfrac{\varphi(\zeta)-\varphi(z)}{\zeta-z}+\dfrac{\varphi(z)}{\zeta-z}$.

1025. 求 $F^+(z)$, $F^-(z)$ 与极限值 $F^{\pm}(\zeta)$，若 C 为圆 $|\zeta|=R$，而 $\varphi(\zeta)$ 为由下列条件定义的对数函数：

1) $\varphi(\zeta)=\ln\zeta=\ln R+i\varphi$，$-\pi<\varphi\leqslant\pi$;

2) $\varphi(\zeta)=\mathrm{Ln}\,\zeta=\ln R+i\varphi$，$0\leqslant\varphi<2\pi$.

提示：在第一种情形中，考虑由沿着半径 $[-R, 0]$ 截开的圆 $|z|=R$ 所组成的围道，而在第二种情形中，考虑由沿着半径 $[0, R]$ 截开的圆 $|z|=R$ 所组成的围道.

注. 若我们事先不固定对数的枝，并使它沿积分围道的连续伸展，则积分将依赖于积分始点的选取. 亦参见题 **393** 至 **396** 及题 **393** 前的说明.

1026. 若 $\varphi(\zeta)=\ln\dfrac{\zeta}{\zeta-1}$，而围道 C 为

1) 圆 $|\zeta|=R$ $(R>1)$;

2) 直线 $\mathrm{Im}\,\zeta=1$，方向从左至右，

求 $F^+(z)$, $F^-(z)$ 与在 C 上的极限值 $F^{\pm}(\zeta)$.

1027. 若 $\varphi(\zeta)=\ln\frac{\zeta}{\zeta-1}$，而围道 C 为半圆 $|\zeta|=R(R>1)$，$0\leqslant\arg\zeta\leqslant\pi$（始于点 R），求 $F(z)$ 以及在 C 上的极限值 $F^{\pm}(\zeta)$。

1028. 若 $\varphi(\zeta)=\sqrt{\zeta}\ (0\leqslant\arg\sqrt{\zeta}<\pi)$，而 C 为圆 $|\zeta|=1$，求 $F^{+}(z)$ 与 $F^{-}(z)$。

在题 **1029** 至 **1031** 中，求 $F^{\pm}(z)$，若 C 为闭围道，点 a 与 b 位于其内部，而 $\varphi(\zeta)$ 为定义于联结点 a 与 b 且位于围道 C 内的截口外部上的多值函数的单值分枝。

1029. $\varphi(\zeta)=\mathrm{Ln}\,\frac{\zeta-a}{\zeta-b}\quad(\mathrm{Ln}\,1=0)$.

1030. $\varphi(\zeta)=\sqrt{\frac{\zeta-a}{\zeta-b}}\quad(\varphi(\infty)=+1)$.

提示：为求沿着环绕截口的围道上的积分，将 $\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}$ 展开成 $\frac{1}{\zeta}$ 的幂级数.

1031. $\varphi(\zeta)=(\zeta-a)^{\lambda}(\zeta-b)^{1-\lambda}\quad\left(\left.\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-b}\right|_{\zeta=\infty}=1\right)$.

1032. 求 $F^{\pm}(z)$，若 C 为闭围道，点 a 属于区域 D^{+}，点 b 属于区域 D^{-}，而 $\varphi(\zeta)=\mathrm{Ln}\,\frac{\zeta-a}{\zeta-b}\,(\mathrm{Ln}\,1=0)$ 为定义于联接点 a 与 b 的截口外部上的对数函数的单值分枝，截口与 C 只交于一点 ζ_0.

提示：若 z 位于区域 D^{+} 内，将 C 与沿弧 ζ_0a 的截口相连；若 z 位于区域 D^{-}内，将 C 与沿弧 ζ_0b 的截口相连.

1033. 证明下列等式成立$(0<\lambda<1)$：

1) $$\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\frac{dt}{t-z}=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\left[1-\left(\frac{z}{z-1}\right)^{\lambda}\right]$$

$$(z\,\overline{\in}\,[0,\ 1]);$$

2) $\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^\lambda\frac{dt}{t-\tau}=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\left[1-\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^\lambda\cos\lambda\pi\right]$

$$(\tau\in(0,1)).$$

提示：欲得到第一个公式，考虑柯西积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)^\lambda\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

其中$\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)^\lambda$为在有直线截口$[0,1]$的平面内的单值函数，在$\infty$等于1，而$C$为一双连通区域的边界，此双连通区域为沿着线段$[0,1]$有截口的圆$|\zeta|<R\ (R>1)$. 利用索霍茨基公式，则可从第一个公式得到第二个公式.

1034. 求奇异积分 $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{t^2+3}{t-x}dt\quad(-1<x<1)$ 的值.

1035. 求下列积分：

1) $\int_0^1\ln\frac{1-t}{t}\frac{dt}{t-z}\quad(z\overline{\in}[0,1])$；

2) $\int_0^1\ln\frac{1-t}{t}\frac{dt}{t-\tau}\quad(\tau\in(0,1))$.

1036. 考虑奇异积分

$$F(z,t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\tau}{(\tau-t_0)^\gamma(\tau-z)}\quad(\gamma=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant\alpha<1),$$

其中C为联接a与b的弧，t_0是这条弧上的一点，$(\tau-t_0)^\gamma$为带有联接点t_0与∞的截口的平面上的单值分枝. 若点t_0与弧C的端点之一重合，则我们考虑截口经过整个围道C；若点t_0是内点，则沿着C的弧(t_0,b)作截口. 证明下列论断：

1) 在点a的邻域内

$$F(z,a)=\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+F_1(z)\quad(z\overline{\in}C),$$

$$F(t,\ a)=\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}(t-a)^{-\gamma}+F_1(t)\quad(t\in C),$$

其中 $F_1(z)$ 为点 a 邻域内的解析函数;

提示：考虑差

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{d\tau}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-z)}-\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}$$

并利用索霍茨基公式，证明 $F_1(z)$ 为点 a 邻域内的解析函数。

2) 在点 b 的邻域内

$$F(z,\ b)=-\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-b)^{-\gamma}+F_2(z)\quad(z\overline{\in}C),$$

$$F(t,\ b)=-\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}(t-b)^{-\gamma}+F_2(t)\quad(t\in C),$$

其中 $F_2(z)$ 为点 b 邻域内的解析函数;

3) 在围道 C 的内点 t_0 的邻域内

$F(z,\ t_0)=(z-t_0)^{-\gamma}+F_3(z)$，于 C 的左边，

$F(z,\ t_0)=F_4(z)$，于 C 的右边，

$$F(t,\ t_0)=\frac{1}{2}(t-t_0)^{-\gamma}+F_5(t),\quad t\in C.$$

其中 $F_3(z)$，$F_4(z)$ 与 $F_5(z)$ 都为点 t_0 邻域内的解析函数.

1037. 讨论柯西型积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C\ln\frac{\zeta}{\zeta-1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$ 在点 $z=-R$ 与 $z=R$ 附近的性状，若 C 为位于上半平面内的半圆 $|\zeta|=R\,(R>1)$（始于点 R）.

提示：参见题 **1027**.

§2 狄利克雷积分，调和函数，对数位势与格林函数

积分

$$D(u)=\iint_G (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy$$

称为狄利克雷积分，而积分

$$D(u, v)=\iint_G (u_x v_x+u_y v_y)\,dx\,dy$$

称为相应的双线性型。

1038. 证明狄利克雷积分及其相应的双线性型的下列性质：

1) $D(u)=\iint_G \left(u_r^2+\frac{1}{r}u_\varphi^2\right)dx\,dy \quad (z=x+iy=re^{i\varphi})$；

2) $D(u)$与$D(u, v)$在区域G的保形映射下不变；

3) $D^2(u, v)\leqslant D(u)D(v)$ $\left(\text{等号仅当}\ \frac{u}{v}=\text{常数时成立}\right)$；

4) 若函数$f(z)=u+iv$在区域G内解析，则

$$D(u)=D(v)=D(f)=\iint_G |f'(z)|^2 dx\,dy.$$

在此情形下，$D(f)$的几何意义是什么？

1039. 利用格林(Green)公式

$$\iint_G v\Delta u\,dx\,dy+D(u, v)=\int_C v\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

(n为外法线方向，Δ为拉普拉斯算子)，证明调和函数u, u_1, u_2(v为u的共轭函数)的下列性质：

1) $D(u)=\int_C u\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_C u\,dv$；

2) $\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_C dv=0$；

3) 若在C上，$u_1=u_2$，则在G内，$u_1\equiv u_2$；

4) 若在C上，$\frac{\partial u_1}{\partial n}=\frac{\partial u_2}{\partial n}$，则在$G$内，$u_1-u_2=$常数.

1040. 证明：若 u 在圆 $|z|<R$ 内调和，在闭圆 $|z|\leqslant R$ 内连续，则

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{|z|<R} u(re^{i\varphi})\,r\,dr\,d\varphi.$$

提示：从等式 $\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=0$ 即得积分 $\int_{|z|=r} u\,d\varphi$ 与 r 无关；求出当 $r\to 0$ 时的极限，然后进行当 $r\to R$ 时的极限运算。

1041. 形如

$$\iint\limits_G \rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\xi\,d\eta,\quad \int_C \rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta-z|}|d\zeta|,$$

$$\int_C \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}|d\zeta|$$

的积分分别称为对数位势，单层对数位势与双层对数位势，其中 $\zeta=\xi+i\eta$，而 n 为 C 的法线。

证明下列等式：

1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\theta=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|z|}, & 若\ |z|>R,\\ & (\zeta=Re^{i\theta});\\ \ln\dfrac{1}{R}, & 若\ |z|\leqslant R,\end{cases}$$

2)

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{|\zeta|<R}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\xi\,d\eta=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|z|}, & 若\ |z|>R,\\ \ln\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{2}\left[1-\left(\dfrac{|z|}{R}\right)^2\right], & 若\ |z|\leqslant R;\end{cases}$$

3)

$$\int_C \nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}|d\zeta|=\int_C \nu(\zeta)\,d\arg(\zeta-z)$$

(依 C 的方向，法线 n 取在左边)；

4)

$$\int_{-a}^{a}\frac{\partial}{\partial\eta}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\xi=\begin{cases}\varphi, & 若\ \operatorname{Im}z>0,\\ -\varphi, & 若\ \operatorname{Im}z<0,\end{cases}$$

其中 $\varphi(0<\varphi<\pi)$ 为线段 $[-a, a]$ 在点 z 所张的角 $(a>0)$.

关于狄利克雷问题的区域 D 的格林函数 $g(x, y, \xi, \eta)$（简记为 $g(z, \zeta)$，$z=x+iy$，$\zeta=\xi+i\eta$）是两对变量 x, y 与 ξ, η 的调和函数，它在 G 的边界上为零，而在 $z=\zeta$ 有一个奇点，在该点处

$$g(z, \zeta)=\ln\frac{1}{|z-\zeta|}+调和函数.$$

格林函数关于其自变量对称，即 $g(z, \zeta)\equiv g(\zeta, z)$.

1042. 叙述等价于求格林函数 $g(z, \zeta)$ 的调和函数的狄利克雷问题.

1043. 设函数 $w=f(z, \zeta)$ 将单连通约当区域 G 保形映射到圆 $|w|<1$ 上，使得 $f(\zeta, \zeta)=0(\zeta\in G)$。证明关系式：

$$g(z, \zeta)=-\ln|f(z, \zeta)|, \tag{1}$$

$$f(z, \zeta)=e^{-(g+ih)}, \tag{2}$$

其中 $h(z, \zeta)$ 为 $g(z, \zeta)$ 的共轭调和函数.

1044. 利用题 **1043** 的关系式(1)，求下列区域的格林函数 $g(z, \zeta)$：

1) 圆 $|z|<R$；

2) 上半平面 $\operatorname{Im}z>0$；

3) 带形 $0<\operatorname{Im}z<1$.

1045. 证明下列论断（n 为内法线，γ_r 为圆 $|z-\zeta|=r$）：

1) 若 $u(z)$ 在 $z=\zeta$ 附近连续，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}u(r)\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n}\,ds=2\pi u(z)；$$

2) 若 $u(z)$ 在 $z=\zeta$ 附近连续可微，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g(z,\ \zeta)\frac{\partial u(z)}{\partial n}ds=0;$$

3) 若 $u(z)$ 在 G 内调和，且在 C 上连续可微，则

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_C u(z)\frac{\partial g(z,\ \zeta)}{\partial n}ds\quad(z\in G).$$

提示：在公式 $\int_C\left(u\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=\int_{\gamma_r}\left(u\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$ 中取 $r\to 0$ 时的极限.

§3 泊松积分，许瓦尔兹公式，调和测度

若在圆 $\zeta=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$ 上定义了逐段连续的实函数 $u(\zeta)=u(R,\ \theta)$，则泊松积分

$$u(z)=u(r,\ \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\ \theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta\quad(1)$$

在圆 $|z|<R(z=re^{i\varphi})$ 内定义了一个调和函数，在 $u(z)$ 的连续点上边界值等于 $u(\zeta)$：

$$\lim_{z\to\zeta}u(z)=u(\zeta)$$

($z\to\zeta$ 沿任何非切向路径). 相应的在圆 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)=u+iv$，由许瓦尔兹公式定义：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\theta+iv(0),$$

其中 $v(0)$ 为任意实数.

1046. 证明下列论断：

1) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta=1;$$

2) $$u(r,\ \varphi)-u(R,\ \theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(R,\ \theta)-u(R,\ \theta_0)]\times\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta;$$

3) 若当$|\theta-\theta_0|<\alpha$时，$|u(R,\theta)-u(R,\theta_0)|<\varepsilon$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|<\alpha}|u(R,\theta)-u(R,\theta_0)|$$

$$\times\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta<\varepsilon;$$

4) 若$|\theta-\theta_0|>\alpha$与$|\varphi-\theta_0|<\dfrac{\alpha}{2}$，则

$$R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2>4Rr\sin^2\frac{\alpha}{4};$$

5) 若$|\varphi-\theta_0|<\dfrac{\alpha}{2}$，且第(3)小题的条件满足，则

$$|u(r,\varphi)-u(R,\theta_0)|<\varepsilon+\frac{M(R^2-r^2)}{2\pi A},$$

其中 $A=4\pi Rr\sin^2\dfrac{\alpha}{4}$，$M=\displaystyle\int_0^{2\pi}|u(R,\theta)-u(R,\theta_0)|d\theta$.

1047. 证明：若$\zeta=Re^{i\theta}$，$z=re^{i\varphi}$，则

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=\frac{(R^2-r^2)+i2Rr\sin(\varphi-\theta)}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

利用这个等式，得到下列展开式：

$$u(z)=u(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

$$v(z)=v(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi),$$

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n,\quad f(0)=u(0)+iv(0),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\cos n\theta\,d\theta,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\sin n\theta\,d\theta,$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{R^n}=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)e^{-in\theta}d\theta.$$

1048. 证明调和函数$u(z)$的狄利克雷积分为

$$D(u)=\iint\limits_{|z|<R}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2)$$

(系数a_n与b_n已在上题中定义).

在此情形中，等式两端可同时趋于无穷.

提示：转到极坐标$(r,\ \varphi)$，并证明：若$r<R$，则

$$D_r(u)=\iint\limits_{|z|<r}(u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}(a_n^2+b_n^2).$$

1049. 证明连续函数

$$u(R,\ \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!\theta}{n^2}$$

的泊松积分(在圆$|z|<R$内)定义了一个调和函数，其边界值为$u(R,\ \theta)$，而狄利克雷积分为无穷：$D(u)=\infty$.

1050. 借助泊松积分，解关于圆$|z|<R$的外狄利克雷问题：求在区域$|z|>R$内调和，在无穷远点正则，且在圆$|z|=R$上有指定边界值$u(\zeta)$的函数$u(z)$，并确定$u(\infty)$的值.

提示：作替换$z_1=R^2/\bar{z}$.

1051. 证明对于$|z|>R$，许瓦尔兹公式(参见§3的引言)定义了在无穷远点正则的解析函数$f_1(z)=u_1(z)+iv_1(z)$；并证明下列展开式成立：

$$f_1(z)=-\overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}=-\overline{f(0)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n},\quad c_{-n}=R^{2n}\bar{c}_n,$$

$$u_1(z)=-\left\{u(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\right\},$$

$$v_1(z)=-v(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(-b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi),$$

其中$a_n,\ b_n,\ c_n$与题**1047**中一样定义，而$\operatorname{Re}f_1(\zeta)=-\operatorname{Re}f(\zeta)=-u(\zeta)$，$\operatorname{Im}f_1(\zeta)=\operatorname{Im}f(\zeta)$.

提示：在$|z|>R$的许瓦尔兹公式中作替换$z=\dfrac{R^2}{z_1}$，并利用在圆$|\zeta|=R$上$\zeta=\dfrac{R^2}{\bar{\zeta}}$的事实.

在题 **1052** 至 **1057** 中，如果$u(\zeta)$为已知函数，求由许瓦尔兹公式定义的函数$f(z)$ $(|z|<R)$与$f_1(z)$ $(|z|>R)$.

1052. 1) $u(\zeta)=\mathrm{Re}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$；

2) $u(\zeta)=\mathrm{Im}[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]$，

其中$\varphi(z)$为$|z|\leqslant R$内的解析函数，而$\psi(z)$为$|z|\geqslant R$外的解析函数.

1053. $u(\zeta)=\mathrm{Re}\,\zeta^n$.　　**1054.** $u(\zeta)=\mathrm{Re}\,\dfrac{1}{\zeta^n}$.

1055. $u(\zeta)=\mathrm{Re}\ln\dfrac{\zeta}{\zeta-1}$　$(R>1)$.

1056. $u(\zeta)=\mathrm{Re}\sqrt{\dfrac{\zeta}{\zeta-1}}\left(若\zeta>1, 则\sqrt{\dfrac{\zeta}{\zeta-1}}>0;\ R>1\right)$.

1057. $u(\zeta)=\mathrm{Re}\ln\zeta$.

1058. 证明许瓦尔兹公式可写成下述形式：

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\overline{f(0)}.$$

提示：利用等式$\dfrac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}=\dfrac{2}{\zeta-z}-\dfrac{1}{\zeta}$.

1059. 对于上半平面$\mathrm{Im}\,z>0$，求与泊松积分、许瓦尔兹公式相类似的公式，即利用$u(t)$ $(-\infty<t<\infty)$来表示调和函数$u(z)$与解析函数$f(z)=u(z)+iv(z)$.

提示：利用上半平面到圆上的保形映射.

1060. 推导带形$0<\mathrm{Im}\,z<1$的许瓦尔兹公式.

提示：利用带形到上半平面的保形映射.

边界弧段 α 在点 z 关于区域 G 的调和测度 $\omega(z, \alpha, G)$ 是一个(G 内的)有界调和函数，在弧 α 的内点等于 1，而在边界其余部分的内点等于零．在保形映射下，调和测度 $\omega(z, \alpha, G)$ 是不变的．

在题 **1061** 至 **1064** 中，区域 G 为圆 $|z|<1$，而 $\omega(z, \theta_1, \theta_2)$ 为弧 $\alpha=(\theta_1, \theta_2)$: $w=e^{i\theta}$, $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ 的调和测度．

1061．利用泊松积分证明

$$\omega(z, \theta_1, \theta_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta,$$

特别，$\omega(0, \theta_1, \theta_2)=\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2\pi}$.

1062．求函数 $\dfrac{d\omega(z, \theta_1, \theta)}{d\theta}$ 关于一个固定的 θ 值的阶层曲线($z=re^{i\varphi}$ 为动点)．

提示：证明 $\dfrac{d\omega}{d\theta}=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{|w'-z|}{|w-z|}$,

其中 w' 为从 w 出发且经过 z 的弦的端点．

1063．设 w' 表示从点 w 出发，经过点 z 的弦的端点．设 α 为弧 (θ_1, θ_2)，又设 $\alpha'(z)$ 是当 w 通过弧 α 时点 w' 描出的弧．证明弧 $\alpha'(z)$ 的长度等于 $2\pi\omega(z, \theta_1, \theta_2)$．

1064．求出弧 (θ_1, θ_2) 的调和测度 $\omega(z, \theta_1, \theta_2)$ 的阶层曲线，然后证明定义调和测度的积分(参见题 **1061**)在 (θ_1, θ_2) 上恰有极限值 1，而在其余集(只考虑弧的内点)上，极限值恰为 0.

1065．分别定义线段 $[a, b]$，射线 $(-\infty, b)$ 与射线 (a, ∞) 关于半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 的调和测度．这些调和测度的几何意义是什么?

1066．求角域 $0<\arg z<\gamma$ 的两条边的调和测度．

1067．求直径 Δ 与半圆弧 Γ 关于半圆 $|z|<R$, $\operatorname{Im} z>0$ 的调和测度．再求这两个调和测度的阶层曲线．

1068. 求区域$|z|>R$, $\mathrm{Im}\, z>0$的边界半圆周的调和测度.

1069. 求区域$|z|>R$, $0<\arg z<2\pi$的边界圆周Γ的调和测度.

1070. 求圆环$r<|z|<R$的边界圆周的调和测度.

在题**1071**至**1077**中,区域G的边界是由n段简单光滑围道Γ_ν所组成的复合围道$\Gamma(\nu=1, 2, \cdots, n)$. 这些围道都取关于$G$的正方向,法线$n$为关于$G$的内法线. 积分

$$\int_{\Gamma_\nu} df(z)$$

称为(在G内)解析的函数沿着Γ_ν的**周期**.

1071. 证明: 若调和函数$u(z)$在G内单值,则解析函数$f(z)=u(z)+iv(z)$沿Γ_ν的周期等于$-i\int_{\Gamma_\nu}\frac{\partial u}{\partial n}ds$.

1072. 证明区域G的复格林函数$g+ih$[$g(z, \zeta)$为区域G的格林函数, $h(z, \zeta)$为g的共轭调和函数]沿Γ_ν的周期等于$-2\pi i\omega_\nu(z)$, 其中$\omega_\nu(z)$为Γ_ν关于区域G的调和测度. 证明$\sum_{\nu=1}^{n}\omega_\nu(\zeta)\equiv 1$.

提示: 在G内调和的函数$u(\zeta)$可表示成

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(z)\frac{\partial g(z, \zeta)}{\partial n}ds$$

的形式(参见题**1045**).

1073. 利用$\omega_\nu(z)$表示一个在G内调和,在$\Gamma_\nu(\nu=1, 2, \cdots, n)$上有常数值$c_\nu$的有界函数.

1074. 证明共轭于函数$u(z)$(在$\overline{G}$内单值, 且调和)的函数$v(z)$沿Γ_ν的周期p_ν可表示为

$$p_\nu=-\int_\Gamma u(z)\frac{\partial \omega_\nu(z)}{\partial n}ds.$$

1075. 设 $\widetilde{\omega}_\nu(z)$ 为共轭于 $\omega_\nu(z)$ 的调和函数，又设 $p_{\mu\nu}$ 为函数 $\widetilde{\omega}_\nu$ 的周期.

1) 证明 $p_{\mu\nu}=p_{\nu\mu}\quad(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$；

提示：利用表示式

$$p_{\mu\nu}=-\int_\Gamma \omega_\mu \frac{\partial\omega_\nu(z)}{\partial n}ds.$$

2) 证明 $\sum_{\nu=1}^{n}p_{\mu\nu}=0\quad(\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

1076. 设 $c_\nu\ (\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为任意实数.

1) 证明：若 $p_{\mu\nu}$ 为题 **1075** 中所定义的数，则二次形 $\sum_{\nu,\mu=1}^{n}p_{\nu\mu}c_\nu c_\mu\geqslant 0$，等式仅当所有的 c_ν 都相等时成立；

提示：应用公式 $D(\omega)=-\int_\Gamma \omega\frac{\partial\omega}{\partial n}ds$ 于调和函数 $\omega(z)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\omega_\nu(z)$（参见题 **1039**；因现在 n 为内法线，符号相反）.

2) 证明二次形 $\sum_{\nu,\mu=1}^{n}p_{\nu\mu}c_\nu c_\mu$ 是正定的，即除了 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ 外，它对所有的值集 $\{c_\nu\}$ 都是正的.

1077. 证明方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}p_{\nu\mu}A_\nu=B_\mu\quad(\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

（A_ν 是未知量）对任何 B_μ 都有唯一的解. 利用这个事实，证明对任何在 $\overline{G}$ 内调和，但一般来讲并不单值的函数 $u(z)$，我们可选取常数 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{n-1}$，使得调和函数

$$u_1(z)=u(z)+\sum_{\nu=1}^{n-1}A_\nu\widetilde{\omega}_\nu(z)$$

在 G 内单值.

第 八 章

解析延拓。具有多值特征的奇点。黎 曼 面

§1. 解 析 延 拓

1078. 函数$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$在点$z=a(|a|<1)$的邻域内可展开成泰勒级数. 试问对哪些$a$值，这个展开式能使函数$f(z)$解析延拓？

1079. 幂级数$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$的和在点$z=-\frac{1}{2}$的邻域内可展开成泰勒级数. 试问函数$f(z)$由此可延拓到什么区域中去？

1080. 证明利用级数

$$\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\times 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\times 2^3}-\cdots,$$

函数$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$可延拓到一个更大的区域中去.

1081. 幂级数

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\text{ 与 }f_2(z)=i\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{n}$$

没有公共的收敛区域. 尽管如此，试证明$f_1(z)$与$f_2(z)$互为解析延拓

1082. 证明，由级数

$$1+az+a^2z^2+\cdots \text{ 与 } \frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-\cdots$$

定义的函数互为解析延拓.

1083. 设幂级数

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

的收敛半径 $R=1$. 替换变量 $z=\dfrac{Z}{1+Z}$, 级数化为

$$f(z)=f\left(\frac{Z}{1+Z}\right)=F(Z)=c_0+c_1Z+\cdots+c_nZ^n+\cdots,$$

以 ρ 表示这个级数的收敛半径, 试证明下列论断:

1) $\rho\geqslant\dfrac{1}{2}$; 若点 $z=-1$ 为函数 $f(z)$ 的奇点, 则 $\rho=\dfrac{1}{2}$;

2) 若 $\dfrac{1}{2}<\rho<1$, 则等式 $f(z)=F(Z)=F\left(\dfrac{z}{1-z}\right)$ 使函数 $f(z)$ 解析延拓到由圆 $|z|<1$ 的外部与阿波洛尼厄斯圆 $\left|\dfrac{z}{1-z}\right|=\rho$ 的内部所确定的区域;

3) 若 $\rho=1$, 则第(2)小题中指出的等式将函数 $f(z)$ 解析延拓到半平面 $\mathrm{Re}\, z<\dfrac{1}{2}$;

4) 若 $\rho>1$, 则函数 $f(z)$ 可解析延拓到阿波洛尼厄斯圆 $\left|\dfrac{z}{1-z}\right|=\rho$ 的外部区域.

1084. 证明幂级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$ 表示圆 $|z|<1$ 内解析的函数, 并且以圆周 $|z|=1$ 为其自然边界[即 $f(z)$ 为不能延拓到单位圆之外的函数].

提示: 利用恒等式 $f(z)=z^2+z^4+\cdots+z^{2^k}+f(z^{2^k})$, 对形如 $\zeta=\sqrt[2^k]{1}$ (k 为自然数) 的点, 证明当 $t\to1$ $(0<t<1)$ 时, $f(t\zeta)\to\infty$.

在题 **1085** 至 **1086** 中，证明由已知幂级数所表示的函数不能延拓到单位圆外.

1085. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

提示：若 p 与 q 为互质整数，且 $n\geqslant q$，则 $\left(re^{\frac{2p\pi i}{q}}\right)^{n!}=r^{n!}$。

1086. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$.

注．题 **1084** 至 **1086** 考虑了下述一般的阿达玛 (Hadamard) 缺口定理的特殊情形：

若幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的非零系数的足标构成的序列 $n_1, n_2, \cdots$ 满足 $n_{k+1}>(1+\alpha)n_k$，其中 $\alpha>0$，则级数收敛圆的边界是函数 $f(z)$ 的自然边界.

1087. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z^n}\right)$ 在区域 $|z|<1$ 与 $|z|>1$ 内分别表示两个并不互为解析延拓的解析函数(亦参见题 **845** 至 **848**).

1088. 设 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 为任意的整函数. 又设

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-z^n}{1+z^n}-\frac{1-z^{n-1}}{1+z^{n-1}}\right).$$

证明展开式

$$\psi(z)=\frac{1}{2}[f(z)+\varphi(z)]+\frac{1}{2}S(z)[f(z)-\varphi(z)]$$

在区域 $|z|<1$ 内表示函数 $f(z)$，而在区域 $|z|>1$ 内表示函数 $\varphi(z)$.

1089. 1) 证明：若 α 为实无理数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(z-e^{2in\pi\alpha})}$ 在区域 $|z|<1$ 与 $|z|>1$ 内各表示一个解析函数，两者都以圆 $|z|=1$ 为自然边界；

提示：证明当 z 沿着半径矢量趋于 $e^{2im\alpha\pi}$ 时，级数的和无限增加.

注. 本题是下述一般定理的特殊情形：

设 L 为一条闭或开的曲线，每一点上都有确定的曲率半径. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为一绝对收敛级数，又若点 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 都位于 L 上，且在 L 上分布得使 L 的任一有限弧段总包含无穷多个这种点，则级数 $F(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_n}{a_n-z}$ 在任何不包含曲线 L 的点的区域内表示解析函数，而这条曲线 L 为它的奇异曲线.

2）证明：若 α 为实有理数，则第(1)小题中的级数表示一个有理函数.

1090. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^z+n}$ $(n^z=e^{z\ln n})$ 在 $\mathrm{Re}\,z>1$ 内收敛，且它的和以直线 $\mathrm{Re}\,z=1$ 为自然边界.

1091. 证明函数 $f(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} e^{-m!z}$ 在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 内解析，且以直线 $\mathrm{Re}\,z=0$ 为自然边界.

1092. 设 $a_n=(-1)^{n+1}$，$\lambda_{2k-1}=2k$，$\lambda_{2k}=2k+e^{-2k}$ $(k=1, 2, \cdots)$. 证明由狄利克雷级数 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$ 内定义的函数 $f(z)$ 可解析延拓到半平面 $\mathrm{Re}\,z>-1$ 内.

提示：将 $f(z)$ 写成 $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-e^{-ze^{-2k}})e^{-2kz}$ 的形式，并证明在任何有限区域内 $|1-e^{-ze^{-2k}}|<Me^{-2k}$，其中 M 对于所考虑的区域而言是常数.

注. 本题说明在收敛半平面的边界直线上，狄利克雷级

数的和可以没有奇点.

1093*. 函数 $f(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}s>0$ 内由拉普拉斯积分 $f(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^t\sin e^t dt$ 定义. 试将这个函数解析延拓到半平面 $\mathrm{Re}s>-1$ 内.

1094. 欧拉 Γ-函数是用积分 $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ ($t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}$) 定义在半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 内. 分部积分这个等式的右端, 证明函数 $\Gamma(z)$ 可解析延拓到整个平面上, 成为有简单极 $0, -1, -2, \cdots, -n, \cdots$ 的亚纯函数, 且在极点 $-n$ 的残数等于 $\frac{(-1)^n}{n!}$.

1095. 证明利用公式 $\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ 可以解析延拓 Γ-函数.

提示: 在积分 $\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ 中, 用 e^{-t} 的幂级数展开式来代替 e^{-t}.

1096. 在题 **411** 中已证明: 当 $0<x<1$ 时,

$$\int_0^\infty t^{x-1}\cos t dt=\Gamma(x)\cos\frac{\pi x}{2},$$

$$\int_0^\infty t^{x-1}\sin t dt=\Gamma(x)\sin\frac{\pi x}{2}.$$

试问公式在 z-平面的什么区域中仍然成立?

1097. 证明借助于公式

$$\Gamma(z)=\frac{i}{2\sin\pi z}\int_C e^{-w}(-w)^{z-1}dw$$

$$((-w)^{z-1}=e^{(z-1)\ln(-w)}),$$

$\Gamma(z)$ 可延拓到它的整个存在域上, 其中围道 C 由沿正实轴的截口与取逆时针方向绕原点的回路所组成.

1098. 设 $\zeta(z)$ 为黎曼 ζ-函数(参见题 **844**)

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\quad(\mathrm{Re}\,z>1).$$

证明当 $\mathrm{Re}\,z>1$ 时，$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty\frac{w^{z-1}}{e^w-1}dw$；并由此求出函数 $\zeta(z)$ 到除了点 $z=1$ 之外的整个平面上的解析延拓；阐明函数 $\zeta(z)$ 在 $z=1$ 处的奇点属性.

提示：欲解析延拓，考虑积分 $\int_C\frac{(-w)^{z-1}}{e^w-1}dw$，其中 C 为题 **1097** 中指出的围道.

1099*. 设函数 $f(z)$ 展开为幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，收敛半径 $R=1$. 设 $\varphi(z)$ 表示级数 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nz^n}{n!}$ 的和(波莱尔(Borel)称 $\varphi(z)$ 共轭于函数 $f(z)$，$\varphi(z)$ 为整函数，可参见题 **535**).

证明当 $|z|<1$ 时，下面的等式成立：

$$\int_0^\infty e^{-t}\varphi(tz)\,dt=f(z).$$

再证明函数 $\int_0^\infty e^{-t}\varphi(tz)\,dt$ 实现了函数 $f(z)$ 到下述区域 G 的解析延拓. 区域 G 以下面的方法确定：通过 $f(z)$ 的每一个奇点画一条垂直于该点与原点连线的直线；G 即为其边界由这种直线上的点组成的凸域(包含圆 $|z|<1$)；若直线的条数有限，则 G 为多边形(波莱尔延拓方法).

1100. 对下列级数验证波莱尔延拓方法：

1) $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$;　　2) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}$;　　3) $\sum_{n=0}^{\infty}z^{4n}$.

1101. 在柯西型积分 $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}$ 中，设 C 为

简单闭围道，而 $\varphi(\zeta)$ 沿 C 连续．证明函数 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$（参见第七章§1的引言）互为越过弧 $\gamma\in C$ 的解析延拓的充要条件为：在弧 γ 上 $f(z)\equiv 0$．

1102． 证明：若函数 $\varphi(\zeta)$ 在简单开弧 C 上的任何点都不解析[1)]，则弧 C 的所有的点都是柯西型积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$ 的奇点．

提示： 从柯西型积分极限值的索霍茨基公式着手．

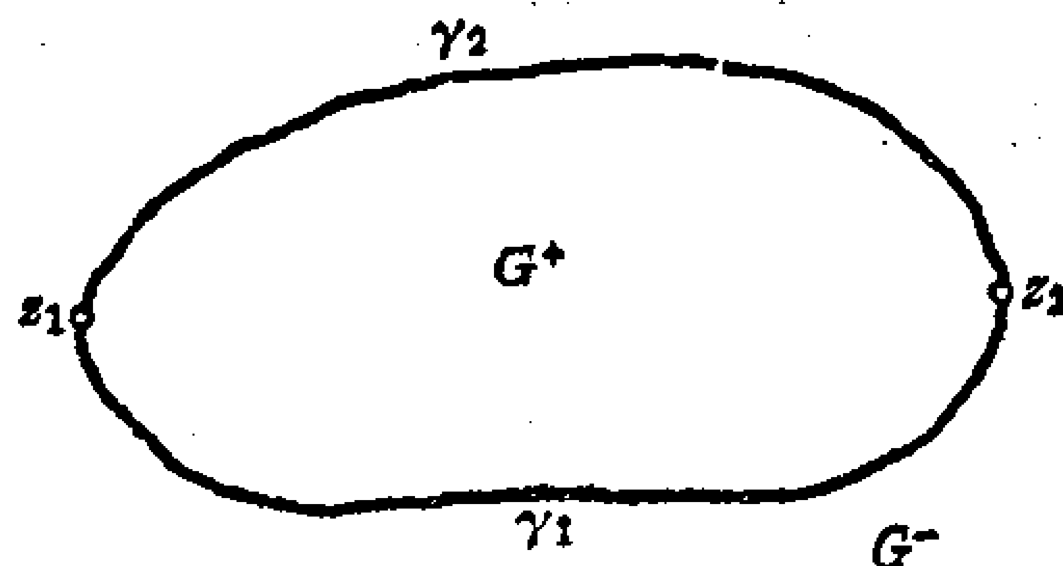


图 31

1103． 设 γ 为一取正方向的简单闭围道，由弧 γ_1 与 γ_2 组成，γ_1 与 γ_2 有公共的端点 z_1 与 z_2（图 31），并设 G^+ 为 γ 的内部区域，G^- 为 γ 的外部区域．此外，设

$$F(z)=\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

其中 $\varphi(\zeta)=a$，若 $\zeta\in\gamma_1$；$\varphi(\zeta)=b$，若 $\zeta\in\gamma_2$（a 与 b 为复常数）．

求函数 $F^+(z)$ 与 $F^-(z)$，并将函数 $F^-(z)$ 解析延拓到区域 G^+：

a) 越过弧 γ_1； b) 越过弧 γ_2．

1104． 设 G 为双连通区域，边界由内围道 γ 与外围道 Γ 组成，又设 $\varphi(z)$ 为在闭区域 $G+\gamma+\Gamma$ 上解析的函数．

证明函数

$$\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

可解析延拓到围道 γ 的整个外部，而函数

1) 即不存在与 $\varphi(\zeta)$ 在属于 C 的任何弧段上重合的解析函数．

$$\varphi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

可解析延拓到围道 Γ 的整个内部. 围道 γ 与 Γ 都取逆时针方向。

§2. 具有多值特征的奇点. 黎曼面

函数 $w(z)$ 的 $k-1$ 阶孤立枝点 $z=a$(k 为自然数, $k\geqslant 2$)由下述的事实刻划其特征: 存在 $w(z)$ 的一个分枝, 在点 $z=a$ 的邻域内可表示为

$$w=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^{\frac{n}{k}}\quad(a\neq\infty)$$

或
$$w=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n z^{-\frac{n}{k}}\quad(a=\infty).$$

若仅有有限个带负足标的 c_n 不为零, 则点 $z=a$(或 $z=\infty$)称为**代数枝点**. 否则, 该点称为**超越枝点**(具有多值特征的本性奇点).

在 z-平面一点上方的相同各点上, 函数 $w(z)$ 至多只能有可数个不同的代数枝点与超越枝点, 具有单值特征的正则点与奇点. 在函数 $w(z)$ 的黎曼面上, 这种点在 z-平面的上方有着不相交的邻域.

在每个这种邻域内, w 为局部参数 t 的单值函数:

$$w=\sum_{n=-N}^{\infty}c_n t^n,$$

其中
$$t=\begin{cases}(z-a)^{\frac{1}{k}} & (a\neq\infty),\\ z^{-\frac{1}{k}} & (a=\infty).\end{cases}$$

对数枝点包括具有下述性质的点 $z=a$ 或 $z=\infty$: 在该点, 某一枝 $w(z)$ 可在区域 $0<|z-a|<r$(或 $R<|z|<\infty$)内无穷次地解析延拓, 因而 $w(z)$ 在此区域内无穷多值. $w(z)$ 的这样一个分枝在对数枝点的邻域内可通过参数 $t=\mathrm{Ln}(z-a)$, $\mathrm{Re}\,t<\rho$(或 $t=\mathrm{Ln}\,z$, $\mathrm{Re}\,t>\rho$)而变成单值解析函数. 应当记住, 在完全相同的一个点 z 的上方的黎曼面上, 除了不同的对数枝点之外, 还可能有具有单值与多值特征的其它的点.

1105. 试问 z 取什么值时, $w(z)$ 在其基于 z-平面上方的黎曼面的所有各叶上都取相同的值, 若:

1) $w=(z^2-9)\sqrt{z}$; 2) $w=\sin z+(z^2+4)\operatorname{Ln} z$;

3) $w=\sin z+(z^2+4)^2\operatorname{Ln} z$.

在相同点上，$w'(z)$的值是否恒等？

1106. 验证下列每个函数在点 $z=0$ 存在对于所有分枝都相同的一阶导数，但是没有有限的二阶导数：

1) $w=z\sqrt{z}$; 2) $w=z^2\operatorname{Ln} z$, $w(0)=0$.

在题 **1107** 至 **1115** 中，将已知函数 $w(z)$ 展开成关于它在已知 z-点上方的黎曼面上所有点的、局部参数 t 的幂级数，并指出所得级数的收敛域.

1107. $w=\dfrac{1}{1+\sqrt{2-z}}$, $z=1$, $z=2$.

1108. $w=\sqrt{\sqrt{z-1}-2}$, $z=1$, $z=5$, $z=\infty$.

1109. $w=\sqrt{1+\sqrt{z-1}}$, $z=1$, $z=2$, $z=\infty$.

1110. $w=\sqrt[3]{1+\sqrt{z-1}}$, $z=1$, $z=2$, $z=\infty$.

1111. $w=\sqrt{(\sqrt{z}-a)(\sqrt{z}-b)}$, $z=\infty$ $(a\neq b)$.

1112. $w=e^{\frac{1}{\sqrt{z}}}$, $z=0$.

1113. $w=\dfrac{\sin\sqrt{z}}{z^2}$, $z=0$.

1114. $w=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{z}$, $z=0$.

1115. $w=\sqrt{\sin z}$, $z=0$.

在题 **1116** 至 **1122** 中，求 z-平面的点，使在该点之上方，至少有已知多值函数的一个奇点，并指出位于 z-平面的这些点上方的黎曼面上的所有相应点的性质.

1116. $\sin\dfrac{1}{\sqrt{z-1}}$.

1117. $\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$

1118. $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}}$. **1119** $\dfrac{1}{\sin\sqrt{z}}$.

1120. $\sqrt[3]{\sqrt{z}+\sqrt{2-z}}$. **1121.** $\operatorname{tg}(i\,\mathrm{Ln}\,z)$.

1122. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{i}{4}\mathrm{Ln}\,z\right)$.

若函数 $w=f(z)$ 单值而它的逆函数 $z(w)$ 多值，则为了确定 $z(w)$ 的代数枝点，必须求出 $f'(z)$ 的零点，$f(z)$ 的高阶极点，并研究 $f(z)$ 在无穷远点的性状. 在 $z_0\neq\infty$ 的情形中，若在 z_0 的邻域内 $f(z)$ 的劳伦展开式形如

$$f(z)=w_0+\sum_{n=k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (c_k\neq 0)$$

或者
$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (c_{-k}\neq 0),$$

则函数 $z(w)$ 有相应的 $k-1$ 阶代数枝点。若 $z_0=\infty$，则上面的展开式必有形式

$$f(z)=\sum_{n=k}^{-\infty}c_nz^n \quad (c_k\neq 0)$$

或者
$$f(z)=w_0+\sum_{n=-k}^{-\infty}c_nz^n \quad (c_{-k}\neq 0).$$

在题 **1123** 至 **1129** 中，w 为已知函数，确定 $z(w)$ 的奇点。

1123. $w=z(1-z)$。 **1124.** $w=z^3-3z$

1125. $w=\dfrac{z}{(1+z)^2}$. **1126.** $w=\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^2$.

1127. $w=\dfrac{z-a}{z^2-1}$ $(0<a<1)$.

1128. $w=P_n(z)$ （n 次多项式）.

1129. $w=R(z)$ （有理函数）.

在题 **1130** 至 **1138** 中，讨论由函数 $w(z)$ 实现的映射，构造 w-平面上方的黎曼面 R，并将 z-平面划分为对应于 R 的叶或半叶的区域。

1130. $w=\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$。考虑 $n\to\infty$ 的极限情形。

1131. $w=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$. **1132**. $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

1133. $w=\frac{z}{(1-z)^2}$.

1134. $w=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$. 又求关于函数$w$不变的线性变换群，并求出黎曼面的什么变换对应于群的变换.

1135. $w=\frac{z}{(1+z^n)^2}$. **1136**. $w=z-\frac{z^n}{n}$.

1137. $w=\frac{1}{z}+\frac{z^n}{n}$.

1138. $w=T_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z)$, $n\geqslant 1$ ($T_n(z)$ 为切比雪夫多项式).

在题 **1139** 至 **1142** 中，求已知函数的逆函数的奇点.

1139. $w=e^{\frac{1}{z}}$.

1140. $w=e^{t\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ (t 为复数).

1141. $w=\cos z+\sin z$. **1142**. $w=\frac{\sin z}{z}$.

在题 **1143** 至 **1151** 中，构造 w-平面上方的黎曼面.

1143. $w=\cos z$. **1144**. $w=\sin z$. **1145**. $w=\operatorname{tg} z$.

1146. $w=\operatorname{ctg} z$. **1147**. $w=\operatorname{ch} z$. **1148**. $w=\operatorname{sh} z$.

1149. $w=\operatorname{th} z$. **1150**. $w=\operatorname{cth} z$. **1151**. $w=z+e^z$.

1152. 假设已知有理函数 $w=R(z)$的 w-平面上方的黎曼面. 构造函数 $z(w)$的黎曼面，若:

1) $w=R(e^z)$; 2) $w=R(\sin z)$.

在题 **1153** 至 **1158** 中，构造已知函数的(z-平面上方的)黎曼面.

1153. 1) $w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$;

2) $w=\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$;

3) $w=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}$（分别考虑 n 为奇数与偶数的情形）.

1154. 1) $w=\sqrt[3]{z-a}$;　　2) $w=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$;

3) $w=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)(z-c)}$;

4) $w=\sqrt[3]{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)}$, $n>3$.

1155. $w=\sqrt[n]{(z-a)(z-b)(z-c)}$, $n>3$.

1156. $w=\sqrt[3]{\dfrac{z-a}{(z-b)^2}}+\sqrt{z-c}$.

1157. $w=\sqrt{\sqrt[3]{z}-1}$.　　**1158.** $w=\sqrt{\sin z}$.

在题 **1159** 至 **1164** 中，讨论代数函数 $w(z)$ 与 $z(w)$ 的映射，并构造其黎曼面.

1159. $w^2+z^2=1$.　　**1160.** $w^2=\dfrac{z}{(1-z)^2}$.

提示：利用题 **1133** 的解.

1161. $w^3+z^3-3wz=0$.

提示：利用参数表示 $z=\dfrac{3t}{1+t^3}$, $w=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

1162. $w^2=\dfrac{z^3}{1-z}$.

提示：利用参数表示 $z=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $w=\dfrac{t^3}{1+t^2}$.

1163. $w^2=z^2\dfrac{1+z}{1-z}$.

提示：令 $z=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $w=t\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.

1164. $w^n=\dfrac{z^n}{(1+z^n)^2}$.

提示：分别考虑 n 为奇数与偶数的情形.

若 $z=a$ 为函数 $w(z)$ 的一个分枝 $f(z)$ 的奇点，$f(z)$ 在 $|z-a|<r$ 上方 $z=a$ 的邻域内取的值当 $r\to 0$ 时的极限值的集合，称为 $f(z)$ 的不定区域。对于代数枝点与极点而言，不定区域仅由一点组成。若函数单值，且点 a 是孤立本性奇点，则由索霍茨基定理，不定区域是整个平面(参见题 618)。对于超越枝点与对数枝点，以及对于非孤立奇点，不定区域的构造可能更为复杂。

在题 **1165** 至 **1176** 中，确定已知函数的奇点，并求出在超越枝点与对数枝点处的不定区域。

1165. $w=(\sqrt[6]{z})^4$.

1166. $w=(\sqrt[m]{z})^n$ (n, m 为自然数).

1167. $w=e^{\frac{1}{\sqrt{z}-1}}$.

1168. $w=\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

1169. $w=\operatorname{tg}\dfrac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$.

1170. $w=e^{(\operatorname{Ln} z)^n}$ (n 为整数).

1171. $w=z^i=e^{i\operatorname{Ln} z}$.

1172. $w=\sin \operatorname{Ln} z$.

1173. $w=\dfrac{1}{z}\operatorname{Ln}\dfrac{1}{1-z}$.

1174. $w=z+\operatorname{Ln} z$.

1175. $w=\dfrac{1}{z}\operatorname{Arc\,sin} z$.

1176. $w=\dfrac{1}{z^2}+\operatorname{Arc\,tg} z$.

在题 **1177** 至 **1180** 中，构造已知函数的黎曼面。

1177. $w=z^a$ (a 为复数).

1178. $w=\operatorname{Ln}[(z-a)(z-b)]$.

1179. $w=\operatorname{Ln}[(z-a)(z-b)(z-c)]$.

1180. $w=\operatorname{Ln}\sin z$.

1181. 设 $\zeta=\varphi(z)$ 为单值或多值解析函数，$R_{z,\varphi}$ 为它在 z-平面上方的黎曼面，又设 $w=f(\zeta)$ 为单值解析函数，定义域为 G_ζ. 试问下列每个表达式在 $R_{z,\varphi}$ 上的什么区域内定义唯一的解析函数?

1) $w(z)=f[\varphi(z)]$;　　2) $w(z)=f(z)+\varphi(z)$;

3) $w(z)=f(z)\varphi(z)$.

特别考虑 φ 为代数函数或亚纯函数的逆函数，而 f 为有理函数或超越亚纯函数的情形.

在题 **1182** 至 **1219** 中，指出哪些已知函数 $w(z)$ 能分解为不同的解析函数，而哪些则不能；再确定它们的奇点，并在要求的题中构造黎曼面(n 与 m 为自然数).

1182. $w=\sqrt{z^2}$　(与$(\sqrt{z})^2$比较).

1183. $w=\sqrt[6]{z^4}$　(与$(\sqrt[6]{z})^4$比较).

1184. $w=\sqrt[n]{z^m}$　(与$(\sqrt[n]{z})^m$ 比较).

1185. $w=\sqrt[n]{e^z}$.　　**1186**. $w=\sqrt[n]{\sin z}$.

1187. $w=\operatorname{Ln} z^i$.　　**1188**. $w=\operatorname{Ln} e^z$.

1189. $w=\operatorname{Ln}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$.

1190. $w=\operatorname{Ln}(e^z-1)$. 构造黎曼面.

1191. $w=\operatorname{Ln}\sin z$. 构造黎曼面.

1192. $w=\operatorname{Ln}\operatorname{tg} z$. 构造黎曼面.

1193. $w=\operatorname{Arc}\cos(\cos z)$　[与 $\cos(\operatorname{Arc}\cos z)$ 比较].

1194. $w=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg} z)$　[与 $\operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z)$ 比较].

1195. 1) $w=(z_1^{r_1})^{r_2}$(r_1、r_2 为有理数)与 $(z^{r_2})^{r_1}$ 比较. 特别考虑 $r_1=\dfrac{2}{3}$, $r_2=\dfrac{3}{2}$;

2) $w=z^{r_1}z^{r_2}$;　　3) $w=z^{r_1}+z^{r_2}$.

1196. $w=\sqrt[n]{z}\sqrt[m]{1-z}$.　　**1197**. $w=\sqrt[n]{\sqrt[m]{z}-1}$.

1198. $w=\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{z}+1}$.

1199. $w=\sqrt[n]{\operatorname{Ln} z}$. 构造黎曼面.

1200. $w=\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$. 构造黎曼面.

1201. $w=[\mathrm{Ln}(z-1)]^i$.

1202. $w=\sqrt[n]{\mathrm{Arc}\sin z}$. 构造黎曼面.

1203. $w=\mathrm{Arc}\sin \mathrm{Ln}\, z$. 构造黎曼面.

1204. $w=\mathrm{Ln}(\sqrt[n]{z}-1)$. 构造黎曼面.

1205. $w=\mathrm{Ln}\,\dfrac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$.

1206. $w=\mathrm{Arc}\sin\dfrac{\sqrt{z}}{1+z}$.

1207. $w=\mathrm{Ln}\, z^{\alpha}$ （α 为实数）.

1208. $w=\sqrt{z}+\mathrm{Ln}\, z$. 构造黎曼面.

1209. $w=\mathrm{Ln}\, z+\mathrm{Ln}(-z)$.

1210. $w=\mathrm{Arc}\sin z+\mathrm{Arc}\cos z$.

1211. $w=\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\, z+\mathrm{Arc}\,\mathrm{ctg}\, z$.

1212. $w=\mathrm{Ar}\,\mathrm{th}\, z-\mathrm{Ar}\,\mathrm{cth}\, z$.

1213. 构造函数 $w=(\mathrm{Ln}\, z)^i$ 的黎曼面，并对位于点 $z=0$ 上方的对数枝点，讨论 w 的极限值组成的集合，极限值是通过下列途径得到的：1) $r\to 0$, $\varphi=$ 常数；2) $r\to 0$, $\alpha<\varphi<\beta$; 3) $r=$ 常数，$\varphi\to\pm\infty$；4) $r\to 0$, $\varphi\to\pm\infty$.

1214. 设 $\chi(z)$ 为圆 $|z|<1$ 内的单值解析函数，不能延拓到圆 $|z|=1$ 外. 试指出对 a 的哪些值，已知函数可以分解为不同的解析函数，而对 a 的哪些值，则不能分解为不同的解析函数：

1) $w=\chi(z)+\sqrt[n]{z-a}$；　　2) $w=\chi(z)\mathrm{Ln}(z-a)$；

3) $w=\chi(a+z^n)$；　　4) $w=\chi(a+e^z)$.

1215. 阐明下列函数的分解：

1) $w=\sqrt[n]{\zeta-a}$；

2) $w=\mathrm{Ln}(\zeta-a)$，其中 $\zeta=\chi^{-1}(z)$，而 χ 为题 **1214** 中

的函数.

1216. 讨论由下列等式定义的解析函数的性状:

1) $w=\chi(z)(\mathrm{Ln}\, z)^{i}$;

2) $w=\chi(z)\{\mathrm{Ln}(z-1)\}^{i}$, 其中$\chi(z)$为题 **1214** 中的函数。

特别求出在对数枝点邻域内的不定区域.

提示: 利用题 **1213** 的解.

1217. 设 $f(z)$为整函数, 构造下列函数的黎曼面:

1) $w=\sqrt{f(z)}$;　　　　2) $w=\mathrm{Ln} f(z)$;

3) $w=\{f(z)\}^{\alpha}$　(α 为无理数).

1218. 构造函数 $w=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}}$ 的黎曼面.

1219. 设 $f(z)=z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2^n}+2}{(2^n+1)(2^n+2)}$. 构造下列函数的黎曼面:

1) $w=\sqrt{f(z)}$;　　　　2) $w=\mathrm{Ln} f(z)$;

3) $w=\mathrm{Ln} f\left(\frac{z}{2}\right)+\mathrm{Ln} f\left(\frac{1}{2z}\right)$.

提示: 首先证明函数$f(z)$在圆 $|z|<1$ 内单叶, 且其自然边界为圆$|z|=1$。

第 九 章

保形映射(续)

§1. 许瓦尔兹-克里斯托弗尔公式

设 P 表示 w- 平面上有界的多边形，$A_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 为其顶点，按关于 P 内部为正向的方向排列，$\alpha_k\pi$ 表示 P 的内角 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=n-2\right)$. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到 P 内部的函数 $w=f(z)$ 由许瓦尔兹-克里斯托弗尔公式定义：

$$w=f(z)=C\int_0^z\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_1, \qquad (1)$$

其中 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<\infty$ 为实轴上的点，对应于多边形 P 的顶点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$; C 与 C_1 为复常数.

公式(1)包含了待定点 a_k (已知多边形的顶点 A_k 的象)、常数 C 与 C_1. n 个点 a_k 中的三个可任意选择，因为它们可以由上半平面到自身的分式线性变换变到三个已知点. 应用公式(1)时，主要的困难是确定剩下的$(n-3)$个点以及复常数 C 与 C_1(总共 $n+1$ 个实参数). 原则上，未知参数可由下述推理求得. 边 $A_iA_{i+1}(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 的长度 l_i 等于：

$$l_i=\int_{a_i}^{a_{i+1}}|f'(x)|dx=|C|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k-1}dx.$$

边 A_nA_1 的长度为

$$l_n=|C|\left[\int_{a_n}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k-1}dx+\int_{-\infty}^{a_1}\prod_{k=1}^{n}|x-a_k|^{\alpha_k-1}dx\right].$$

求出 $n-3$ 条边的长度与其余三条边之一的长度的比，我们可得到确定 $n-3$ 个点 a_k 的 $n-3$ 个独立方程. 这样，函数 $t=\int_0^z\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz$ 定义了上半平面到 t-平面的多边形 P' 上的映射，多边形 P' 与

已知多边形相似. 于是可构造将 P' 变为 P 的线性变换 $w=Ct+C_1$.

函数

$$F(z)=C\int_0^z \prod_{k=1}^{n}(z-a_k')^{\beta_k-1}\frac{dz}{(z-b)^2(z-\bar{b})^2}+C_1 \qquad (2)$$

给出了上半平面到同一多边形 P 外部的映射，其中 b 为上半平面的一点，对应于 w-平面的无穷远点；a_k' 为多边形顶点 A_k 的对应点（于此 $\infty>a_1'>a_2'>\cdots>a_n'>-\infty$）；$\beta_k\pi$ 为多边形的外角（$\beta_k=2-\alpha_k$, $\sum_{k=1}^{n}\beta_k=n+2$）.

1220. 证明：若多边形有一顶点为无穷远点（比如 $a_n=\infty$）的象，则映射函数为如下形式

$$f(z)=C\int_0^z \prod_{k=1}^{n-1}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_1.$$

提示：若所有的 $a_k\neq 0$，则作变换 $\zeta=-\frac{1}{z}$；若有一点 $a_k=0\ (k=1, 2, \cdots, n-1)$，则作变换 $\zeta=-\frac{1}{z-a}$，其中 $a\neq a_k$.

1221. 证明：若一个或几个顶点 A_k 位于无穷远处，则公式(1)仍然成立，只要将 $\alpha_k\pi$ 理解为相应的射线在有限交点处的角（取负号）.

提示：设 $A_k=\infty$. 若 $\alpha_k<1$，则考虑多边形 P'. P' 由线段 $A_k'A_k''$ 截割 P 而成，此处 A_k' 与 A_k'' 分别位于边 $A_{k-1}A_k$ 与边 $A_{k+1}A_k$ 上的充分远处（图 32, 1），再在关于 P' 的公式(1)中取极限 $A_k'\to\infty$, $A_k''\to\infty$. 但若 $\alpha_k\geqslant 1$，则用折线（见图 32, 2）在 P 内联结 $A_k'A_k''$，再将此折线保持相似性地扩张移动到无穷远.

1222. 对于由平行射线构成的"多边形"移到无穷远处的顶点，试确定公式(1)中的量 α_k（参见图 33）.

提示：如题 **1221** 提示中指出的那样取极限.

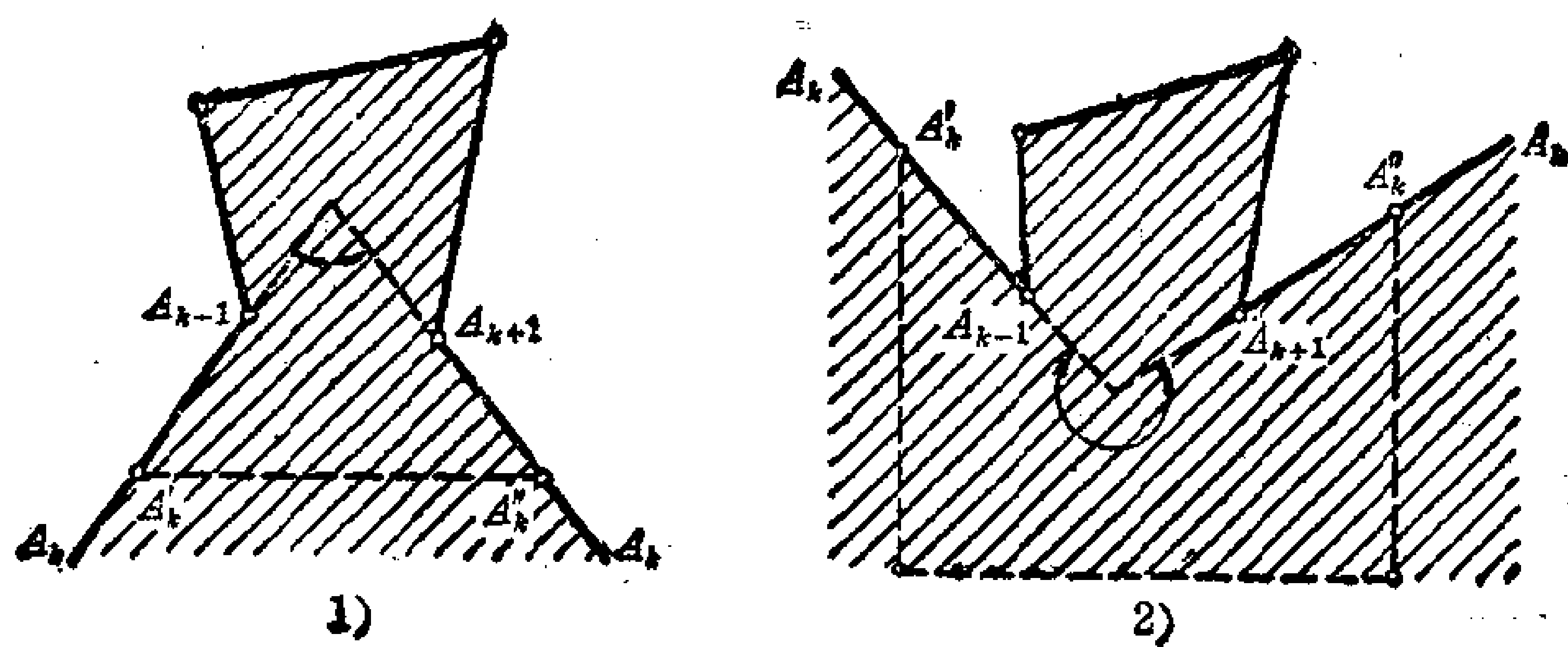
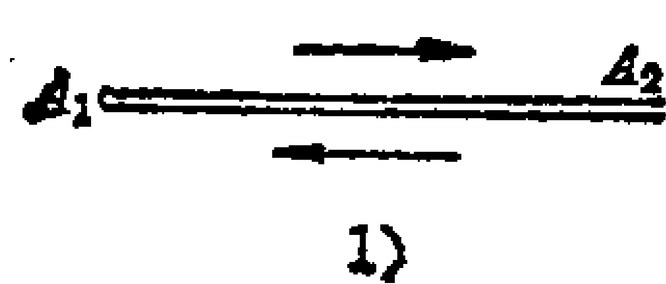
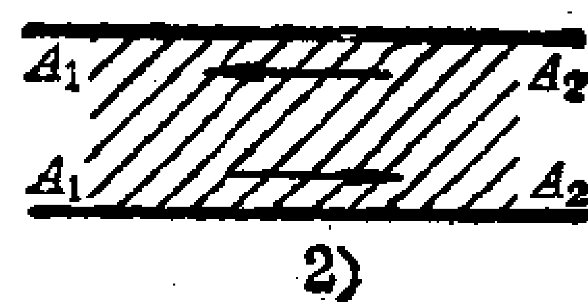


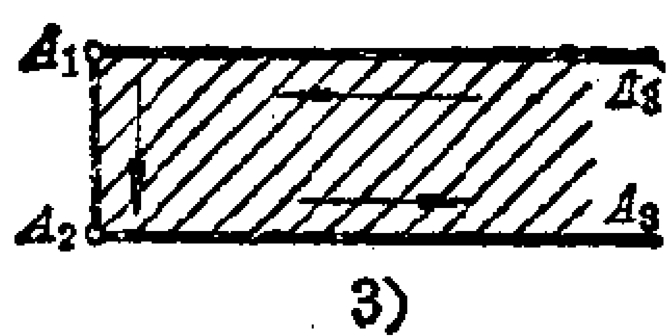
图 32



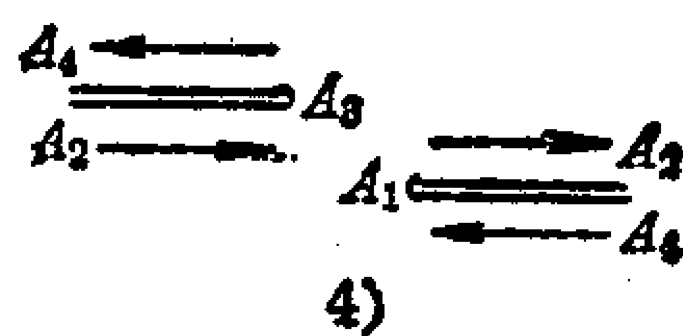
1)



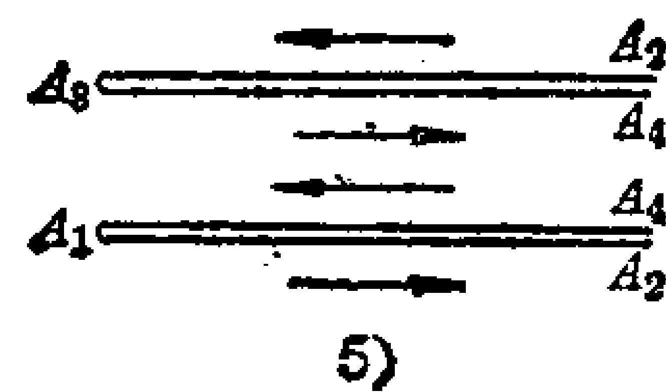
2)



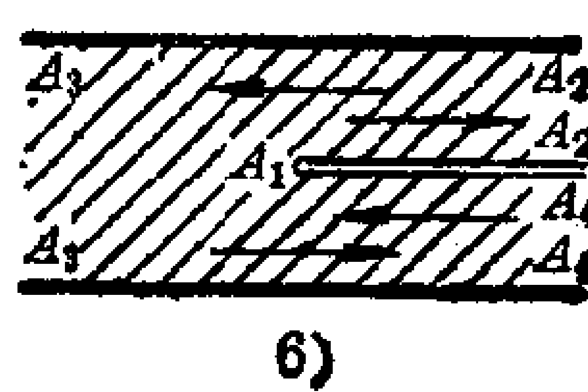
3)



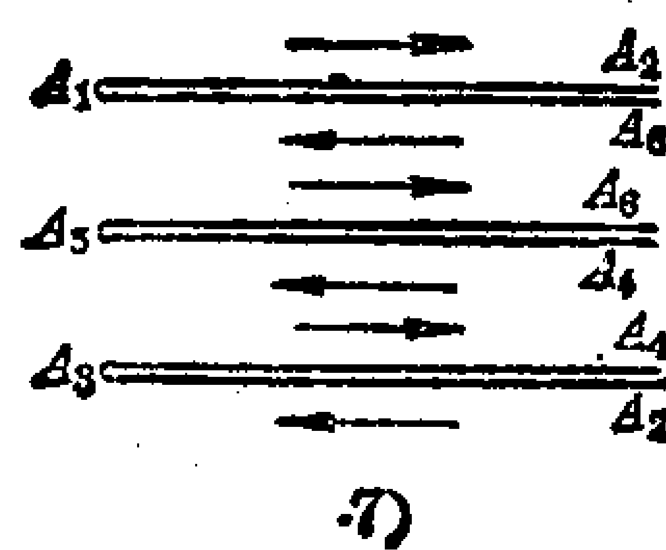
4)



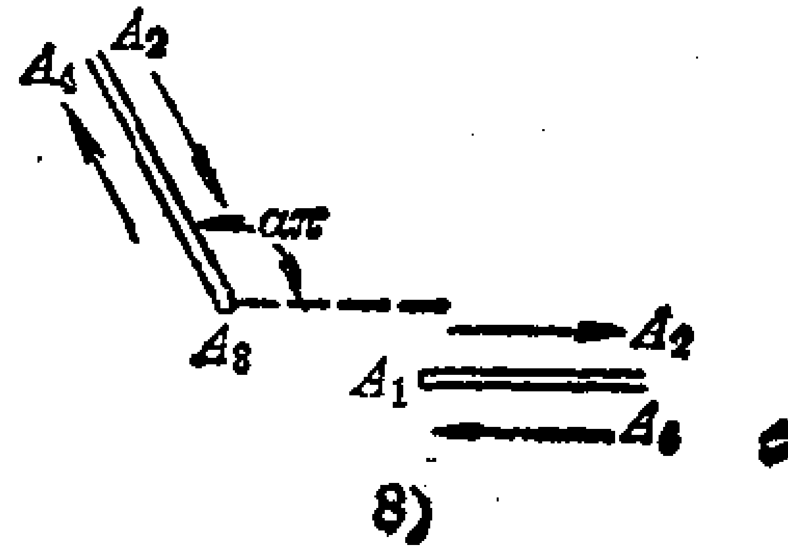
5)



6)



7)



8)

图 33

1223. 1) 证明当单位圆 $|z|<1$ 被映射到有界多边形 P 上时，映射函数取如下形式：

$$f(z)=C\int_0^z \prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k-1}dz+C_1,$$

其中 $a_k=e^{i\varphi_k}(\varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_n)$ 为圆 $|z|=1$ 上对应于顶点 A_k 的点，A_k 的顺序为正向，$\alpha_k\pi$ 为多边形 P 的内角；

2) 证明将单位圆 $|z|<1$ 映射到同一多边形 P 外部的函数取如下形式(若点 $z=0$ 映射到点 $w=\infty$)：

$$f(z)=C\int_1^z \prod_{k=1}^{n}(z-a_k')^{\beta_k-1}\frac{dz}{z^2},$$

其中 $a_k'=e^{i\varphi_k'}(\varphi_1'>\varphi_2'>\cdots>\varphi_n')$，$\beta_k\pi$ 为 P 的外角。

1224. 试找出许瓦尔兹-克里斯托弗尔公式(1)的单值变换的所有情形；即确定 P 为何种多边形时逆函数 $z=z(w)$ 有定义，且在整个 w-平面上单值.

提示：从 P 出发，关于其边作任意偶数次对称反射，得到的多边形必覆盖整个 w-平面，不留空隙也无重迭.

在题 **1225** 至 **1227** 中，将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到 w-平面的指定区域 P 上，P 的顶点与实轴的点之间满足已知的对应关系. 再确定映射函数的周期或其逆函数 $z(w)$ 的周期，并求出映射在 w-平面上的不变线性变换群 G 以及该群的基本域 B(参见题 **259** 前的说明).

1225. 1) P 为带形 $0<v<h$; $w(-\infty,\ \infty)\to z(0,\ \infty)$[1]；

2) P 为带形 $0<v<h$; $w(-\infty,\ \infty)\to z(-1,\ 1)$.

1226. P 为半带形 $0<u<\pi$, $v<0$; $w(0,\ \pi,\ -i\infty)\to z(1,\ -1,\ \infty)$.

1227. 1) P 是锐角为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$ 的直角三角形; $w\Big(0,\ \omega,\ \omega$

1) 此处以及在别处，$w(A,\ B,\ \cdots)\to z(a,\ b,\ \cdots)$ 表示 w-平面与 z-平面的点之间的对应关系：$A\longleftrightarrow a$, $B\longleftrightarrow b$, $\cdots$.

$+\frac{i\omega}{\sqrt{3}}\Big)\to z(0,\ 1,\ \infty)$;

2) P 为等腰直角三角形; $w(0,\ \omega,\ \omega+i\omega)\to z(0,\ 1,\infty)$;

3) P 为等边三角形; $w\Big(0,\ \omega,\ \omega\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)\to z(0,\ 1,\ \infty)$.

1228. 试求出 w–平面上的区域, 使得函数

$$w(z)=\int_0^z t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

$$(\text{若 } 0<x<1,\ \text{则} \arg w'(x)=0)$$

将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到此区域上. 已知:

1) $0<\alpha\leqslant 2,\ 0<\beta\leqslant 2$; 考虑下列情形: a) $\alpha+\beta<1$, b) $\alpha+\beta=1$, c) $\alpha+\beta>1$, 特别 $\alpha+\beta=2$ 与 $\alpha=\beta=\frac{3}{2}$;

2) $1\leqslant\alpha\leqslant 2,\ -1\leqslant\beta\leqslant 0,\ \alpha+\beta\geqslant 1$; 考虑下列情形: a) $\alpha=1,\ \beta=0$, b) $\alpha+\beta=1$, c) $\alpha=2$, d) $\alpha=2,\ \beta=-\frac{1}{2}$, e) $\alpha=2,\ \beta=-1$.

1229. 1) 试求出 w–平面上的区域, 使得函数

$$w(z)=\int_0^z\frac{t-\lambda}{\sqrt{t(t-1)}}dt$$

$$=\sqrt{z(z-1)}+(1-2\lambda)\Big[\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})-\frac{i\pi}{2}\Big]$$

将上半平面映射到此区域上. 考虑下列情形: $\lambda<0,\ 0<\lambda<\frac{1}{2},\ \lambda=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\lambda<1$ 与 $\lambda>1$;

2) 试求出 w–平面上的区域, 使得函数

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_1^z\frac{t-\lambda}{\sqrt{t(t-1)}}\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{1}{\pi i}\Big[\ln(\sqrt{z}+\sqrt{z-1})-\lambda\sqrt{\frac{z-1}{z}}\Big]$$

将上半平面映射到此区域上．考虑下列情形：$\lambda<0$，$0<\lambda<1$ 与 $\lambda>1$．

1230．将上半平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ 映射到如图 34 所示的 w–平面的区域上，满足点与点之间的已知对应关系：

1) $w(A=0,\ B=1,\ C=\infty)\to z(0,\ 1,\ \infty)$；

2) $w(A=0,\ B=1,\ C=\infty)\to z(0,\ 1,\ \infty)$；

3) $w(A=0,\ B=\infty,\ C=\infty)\to z(0,\ 1,\ \infty)$；

4) $w(A=0,\ B=\infty,\ C=\infty)\to z(0,\ 1,\ \infty)$；

5) $w(A=0,\ B=ia,\ C=\infty)\to z(0,\ 1,\ \infty)$．

1231．将上半平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ 映射到图 35 所示的 w–平面的区域上 $(0<\theta<1)$．

1) $w(A,\ B=0,\ C=\infty)\to z(0,\ 1,\ \infty)$；

2) $w(A,\ B=0,\ C=\infty)\to z(0,\ 1,\ \infty)$．

若 θ 为有理数 $\left(\theta=\dfrac{p}{q}\right)$，试用初等函数表示所得到的积分。

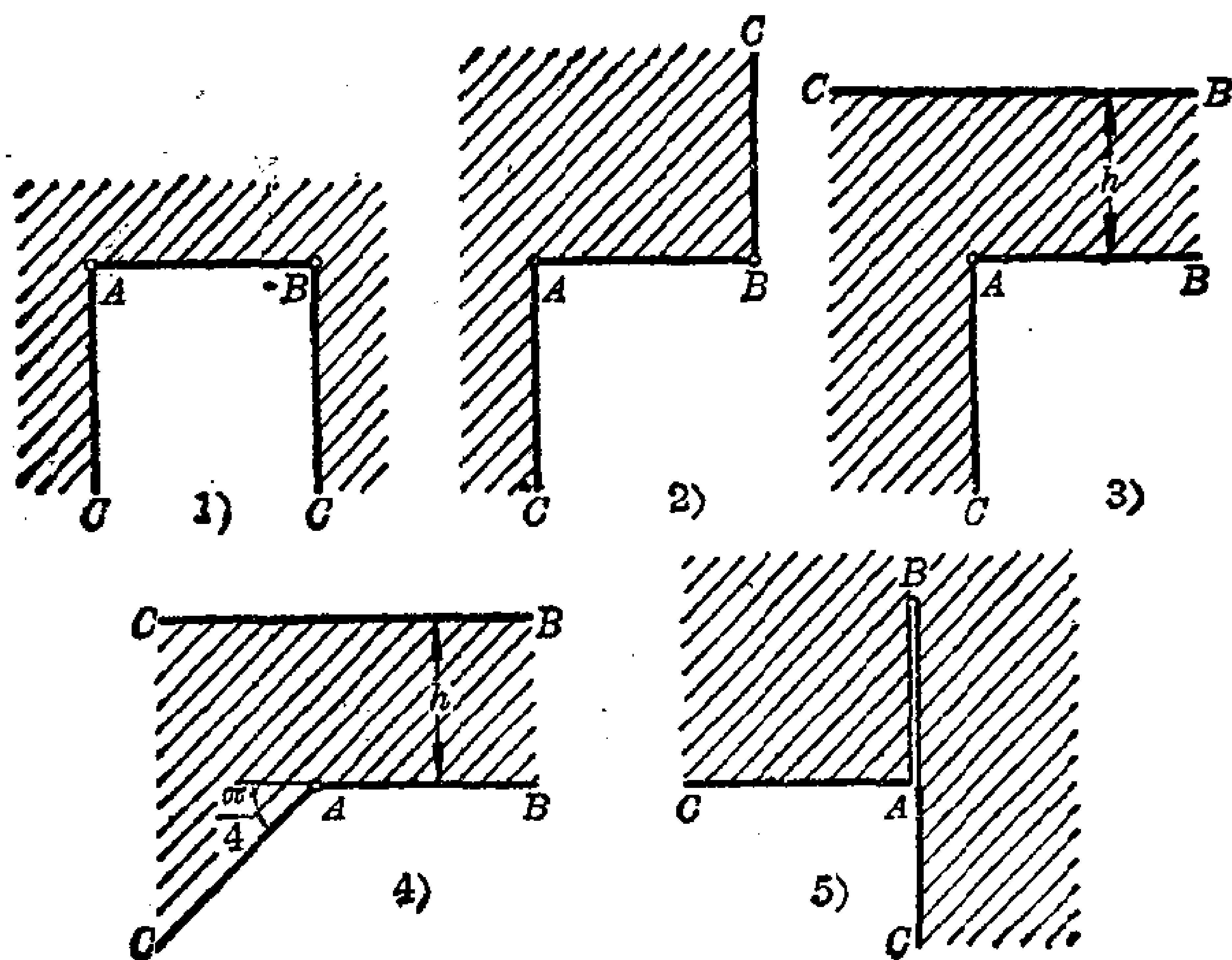


图 34

1232. 将上半平面映射到图 36 所示的区域(弧 AC 为半圆),使得:

$$w(A=ai,\ B=\infty,\ C=0)\to z(0,\ 1,\ \infty).$$

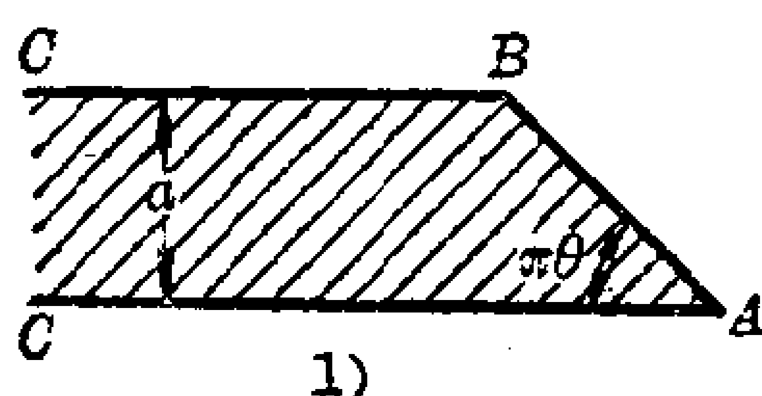
提示: 映射 $\zeta=\dfrac{a}{w}$ 将此题归结为题**1231**(2)的特殊情形.

1233. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到如图 37 所示的 w-平面的区域上,已知

$$w(A=-h,\ B=\infty,\ C=h,\ D=\infty)\to z(-1,\ 0,\ 1,\ \infty)$$

(映射的可能性由对称原理推出).

1234. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到 w-平面的菱形上,菱形在顶点 A 的角为 $\pi\alpha$,边长为 d(图 38). 点与点之间的对应



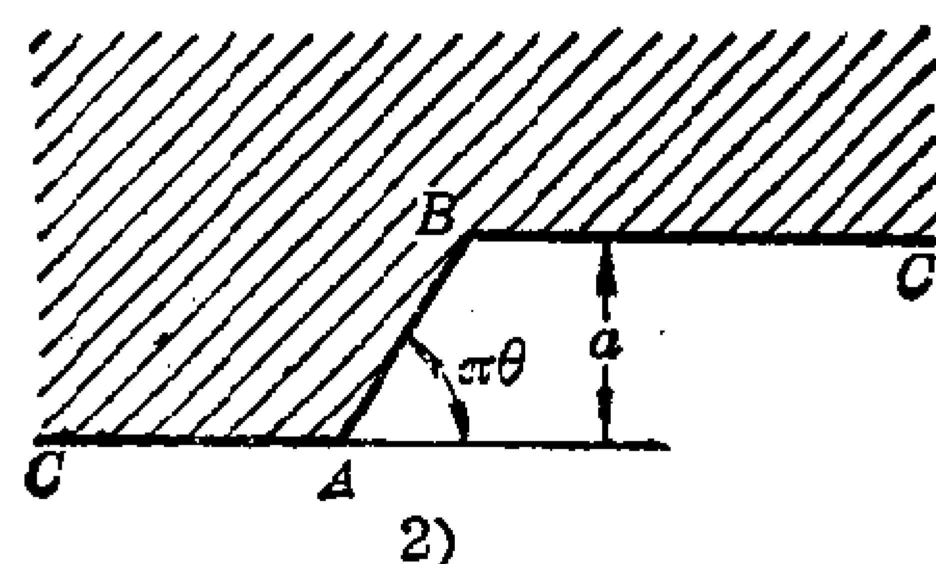


图 35

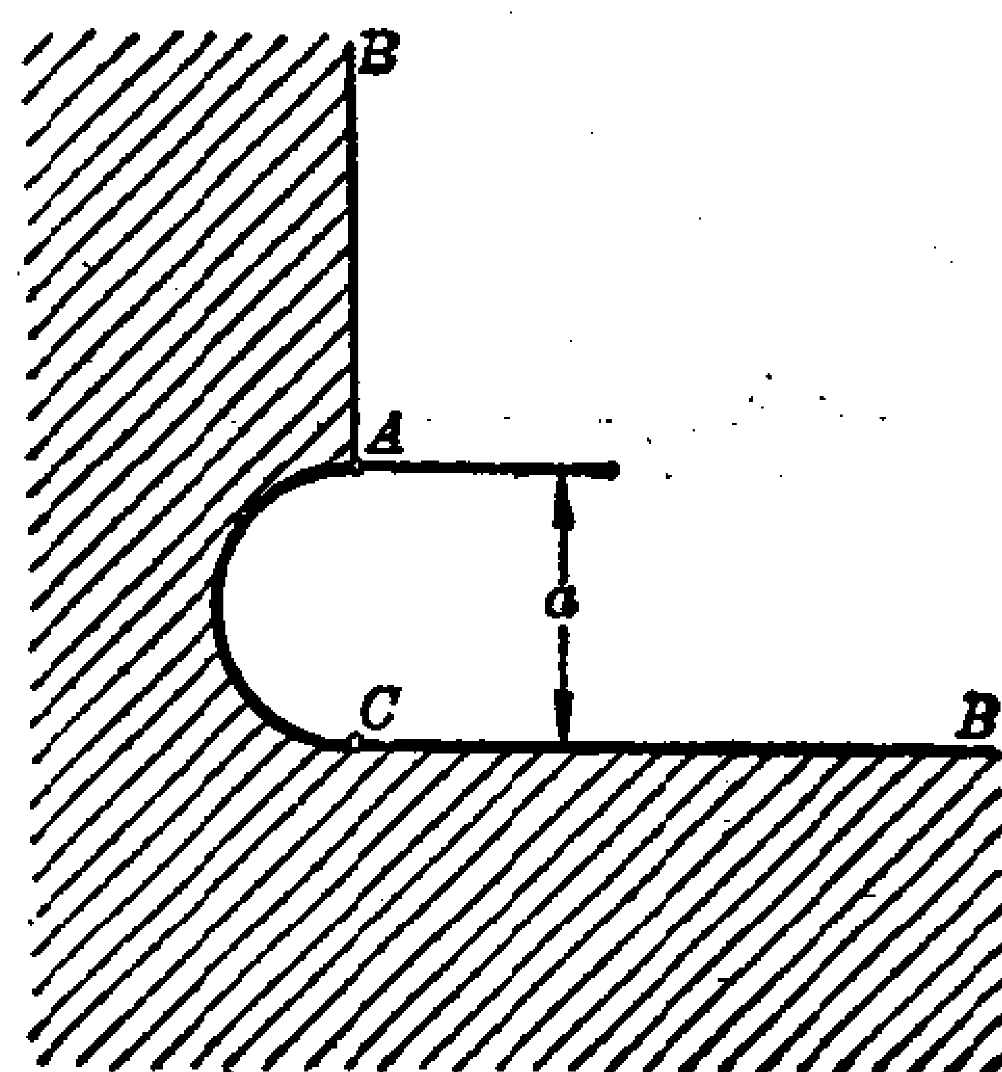


图 36

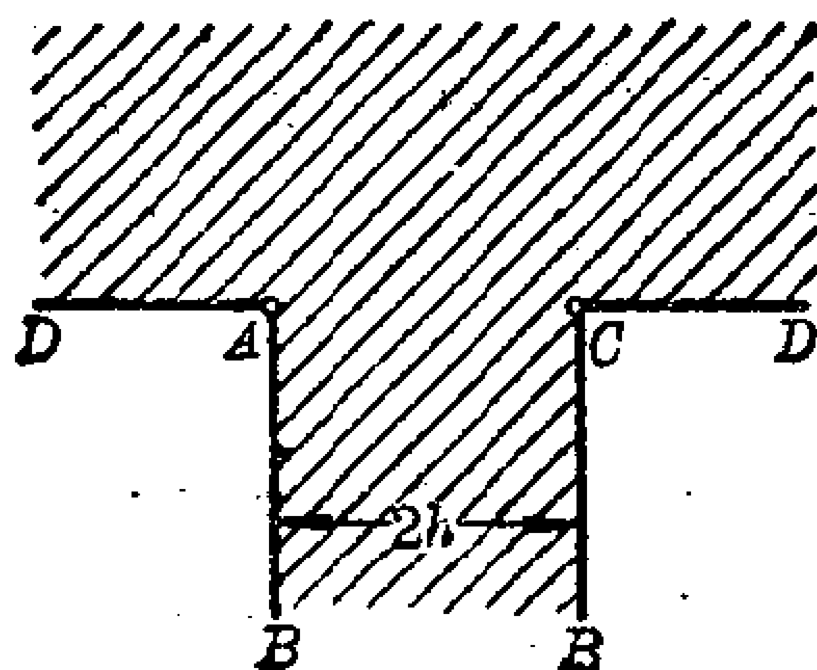


图 37

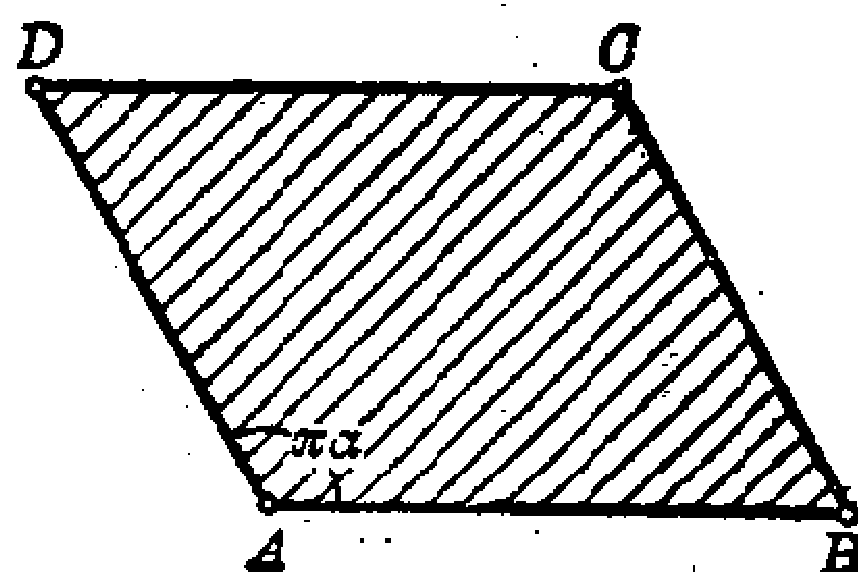


图 38

关系由 $w(A=0,\ B=d,\ C=d(1+e^{i\pi\alpha}),\ D=de^{i\pi\alpha})\to z(0,\ 1,\ \infty,\ -1)$ 给出. 试验证这个映射的可能性.

1235. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到如图 39 所示的 w-平面的区域上. 参数 a 与 $b\ (a>0,\ b>0)$ ——相应顶点的原象——不能任意指定, 而由下列条件确定:

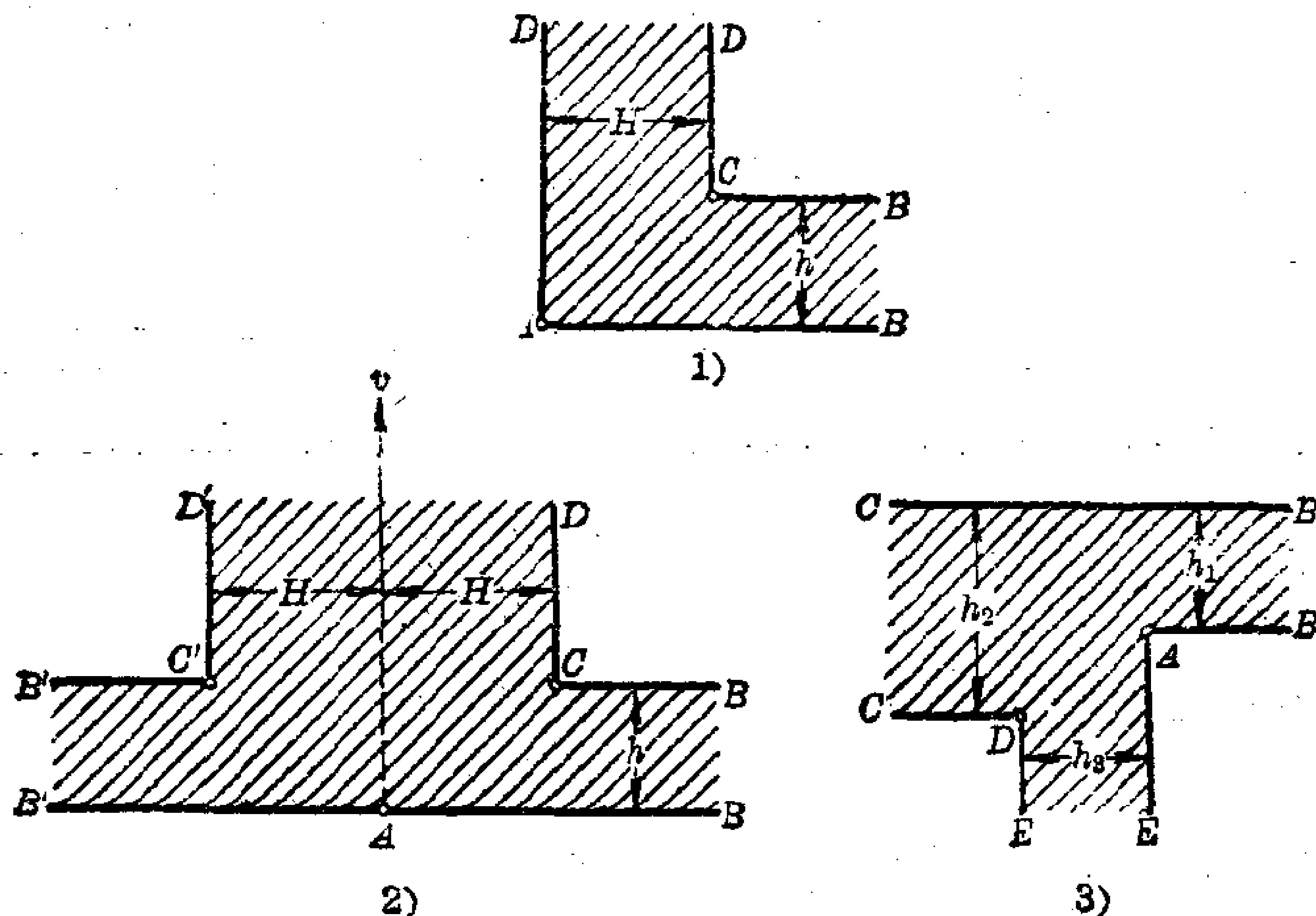


图 39

1) $w(A=0,\ B=\infty,\ C=H+ih,\ D=\infty)\to z(0,\ 1,\ a,\ \infty)$;

2) $w(B=\infty,\ C=H+ih,\ D=\infty,\ C'=-H+ih,\ B'=\infty)\to z(1,\ a,\ \infty,\ -a,\ -1)$;

提示: 沿虚轴作一个附加的截口, 并利用对称原理.

3) $w(A=0,\ B=\infty,\ C=\infty,\ D=-h_3-i(h_2-h_1),\ E=\infty)\to z(0,\ 1,\ a,\ \infty,\ -b)$.

1236. 1) 试求函数 $w(z)$, 它将圆 $|z|<1$ 映射到中心在原点, 一个顶点在点 $w=1$ 的正 n 边形的内部; 已知 $w(0)=0$, $w'(0)>0$;

2) 将圆 $|z|<1$ 映射到同样的 n 边形的外部；已知 $w(0)=\infty$，$w(x)>0(0<x<1)$；并确定展开式 $w(z)=\frac{c_{-1}}{z}+\cdots$ 中的 c_{-1}.

1237. 1) 试求函数 $w(z)$，它将圆 $|z|<1$ 映射到中心在原点，一个顶点在点 $w=1$ 的正五角星的内部；规范条件为 $w(0)=0$，$w'(0)>0$；

2) 将圆 $|z|<1$ 映射到同一个星的外部；$w(0)=\infty$，$w(x)>0(0<x<1)$；并确定展开式 $w(z)=\frac{c_{-1}}{z}+\cdots$ 中的 c_{-1}.

1238. 函数

$$w(z)=\int_0^z\frac{(1+t^n)^\lambda dt}{(1-t^n)^{\frac{2}{n}+\lambda}},\ w'(0)>0,\ -1<\lambda<1-\frac{2}{n},$$

将单位圆 $|z|<1$ 映射到某个区域上，试求出这个区域.

1239. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到 w-平面上中心在原点、一个顶点在点 $w=1$ 的正 n 边形上；规范条件为 $w(i)=0$，$w'(i)=1$.

1240. 设 w-平面的区域 P 为一"星"的外部，这个"星"由 n 条从点 $w=0$ 发出的线段所组成（图 40）. 设 A_k 为 P 在原点的顶点，$\alpha_k\pi$ 为相应的角 $\left(\sum_{k=1}^n\alpha_k=2\right)$，$B_k$ 为 P 在星的线段终点处的顶点（A_1，B_1，A_2，B_2，$\cdots$ 绕 P 正向的顺序排列），$l_k=\overline{A_kB_k}$ 为星的线段的长度. 试证将单位圆 $|z|<1$ 映射到 P 上的函数 $w=f(z)$，$f(0)=\infty$ 形如

$$f(z)=\frac{C}{z}\prod_{k=1}^n(z-a_k)^{\alpha_k},$$

其中 C 为复常数，$a_k=e^{i\varphi_k}$ 为圆 $|z|=1$ 上对应于 A_k 的点. 对

应于顶点 B_k 的点 $b_k=e^{i\psi_k}$ 为方程

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z-a_k}-\frac{1}{z}=0 \tag{3}$$

的根.

试问参数 C、a_k 与 b_k 怎样确定?

提示: 当按照对称原理进行延拓时, 函数 $f(z)$ 乘以常数因子, 因此函数 $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 z-平面内单值.

注. 所得到的公式对第二章中许多习题, 例如 **320**(2); **321**(1); **323**; **329** 等立即提供了解答.

建议重新解这些题,并确定一般公式中的常数.

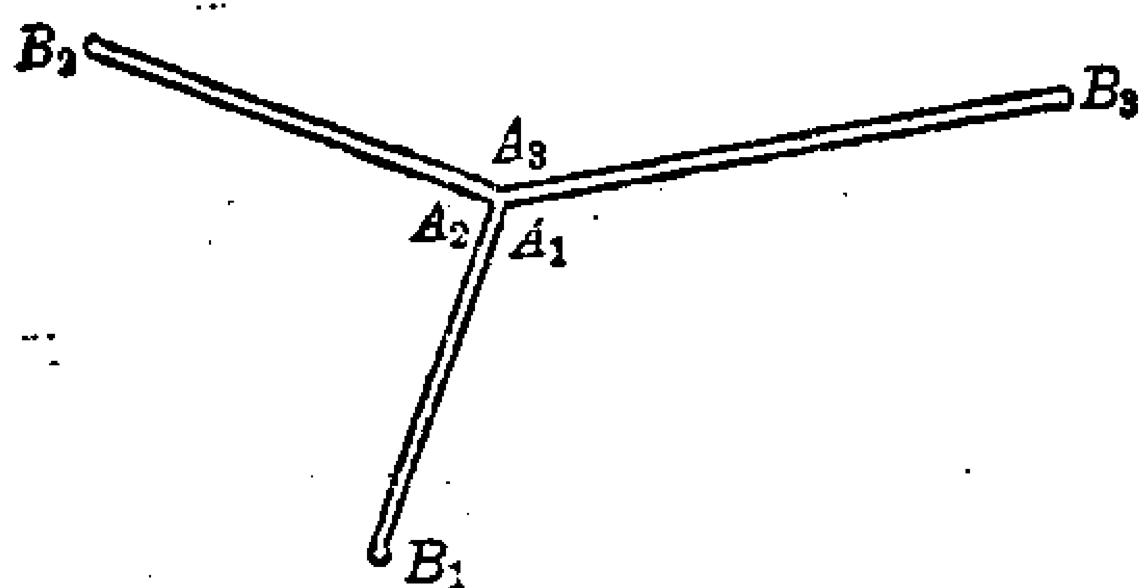


图 40

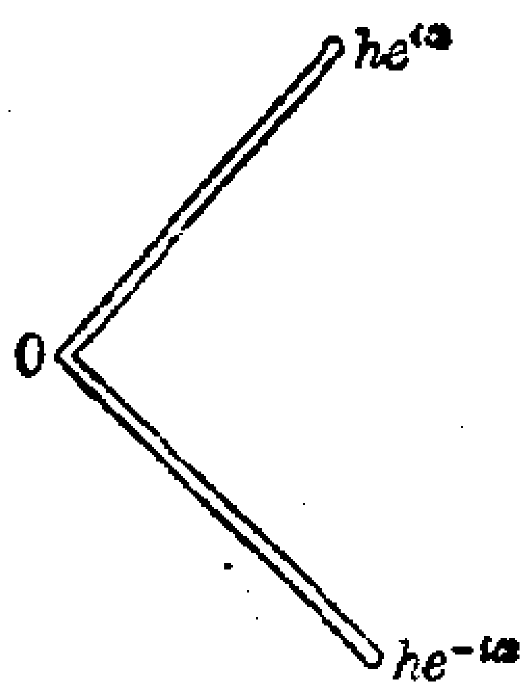


图 41

1241. 将图 41 中由两条线段组成的折线的外部映射到圆 $|z|=1$ 的外部 $|z|>1$. 已知 $w(\infty)=\infty$, $w'(\infty)>0$.

1242. 证明: 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到题 **1240** 中的星形外部的函数 $w=f(z)$ 形如

$$f(z)=C\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k}}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)},$$

其中 z_0 为上半平面的一点,映射到无穷远点.

1243. 设 w-平面的区域 P 由射线 $[0, \infty)$, $n-1$ 条从 $w=0$ 到点 $B_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 的线段与 $m-1$ 条从点 D_s(s

$=1, 2, \cdots, m-1$) 发出到∞的射线所界，这些射线的反向延长线与坐标原点相交（参见图 42）．设 $A_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 为 P 在原点的顶点，$\alpha_k\pi$ 为相应的角，$C_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 为 P 在∞的顶点，$\gamma_j\pi$ 为相应的角，设 $A_1B_1A_2\cdots A_nC_1D_1\cdots C_m$ 表示 P 的边界沿正向的一个回转．试证：将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到 P 上的函数 $w=f(z)$ 形如

$$f(z)=C\frac{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\alpha_k}}{\prod_{j=1}^{m}(z-c_j)^{\gamma_j}}, \tag{4}$$

其中 a_k 与 c_j 为 x 轴上对应于顶点 A_k 与 C_j 的点．x 轴上对应于顶点 B_i 与 D_s 的点 b_i 与 d_s 为方程

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z-a_k}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\gamma_j}{z-c_j}=0 \tag{5}$$

的根．

试问参数 C, a_k, b_i, c_j 与 d_s 怎样确定？若参数 a_k, b_i, c_j 或 d_s 中有一个等于∞，试问将有什么变化？

提示：证明：

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{z-a_k}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\gamma_j}{z-c_j}=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(z-b_i)\prod_{s=1}^{m-1}(z-d_s)}{\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)\prod_{j=1}^{m}(z-c_j)}.$$

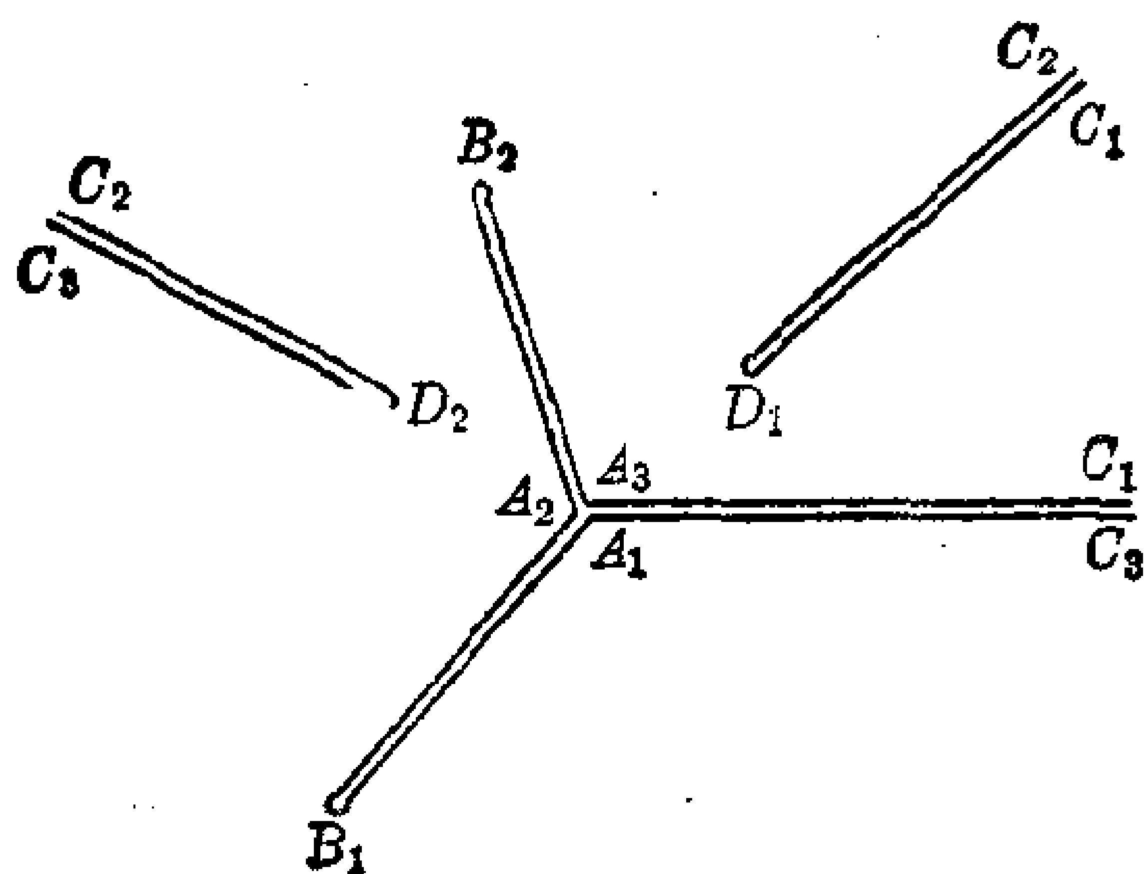


图 42

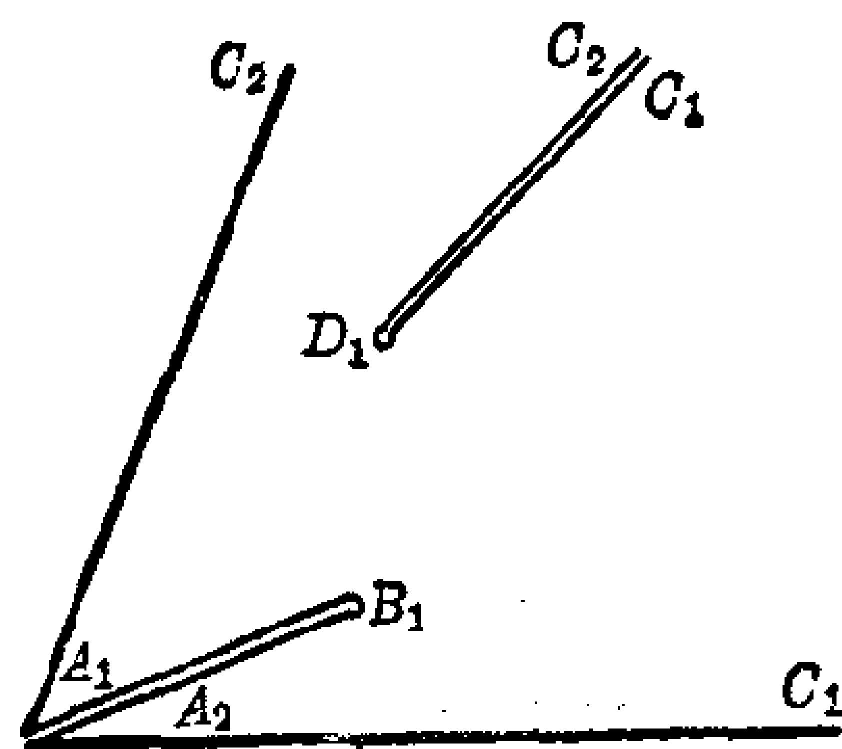


图 43

1244. 证明：对于边界包含两条射线 $[0, \infty)$ 的区域 P（图 43），题 **1243** 中的公式(4)仍然成立．当仅有的两条射线构成从坐标原点发出的一条直线时，作为顶点的坐标原点仍应加以考虑．

在题 **1245** 至 **1249** 中，将上半平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ 映射到相应的图中所示的 w-平面的某区域上，并确定参数 a 与 $b(a>0,\ b>0)$．

1245. 区域如图 44 所示．$w(A_1=0,\ B=he^{i\pi\alpha_2},\ A_2,\ C=\infty)\to z(-1,\ b,\ 1,\ \infty)$．

1246. 区域如图 45 所示．$w(A_1=0,\ B=ih,\ A_2,\ C=\infty,\ D=iH,\ C_2=\infty)\to z\left(-a,\ 0,\ a,\ \dfrac{1}{a},\ \infty,\ -\dfrac{1}{a}\right)$．

1247. 区域如图 46 所示．$w(A_1=0,\ B_1=-he^{-i\pi\alpha},\ A_2,\ B_2=he^{i\pi\alpha},\ A_3,\ C=\infty)\to z(-1,\ -b,\ 0,\ b,\ 1,\ \infty)$．

1248. 区域如图 47 所示．$w(A_1=0,\ B=he^{i\pi\alpha_2},\ A_2,\ C_1=\infty,\ D=He^{i\pi\alpha_1},\ C_2=\infty)\to z\left(-a,\ 0,\ b,\ \dfrac{1}{b},\ \infty,\ -\dfrac{1}{a}\right)$．

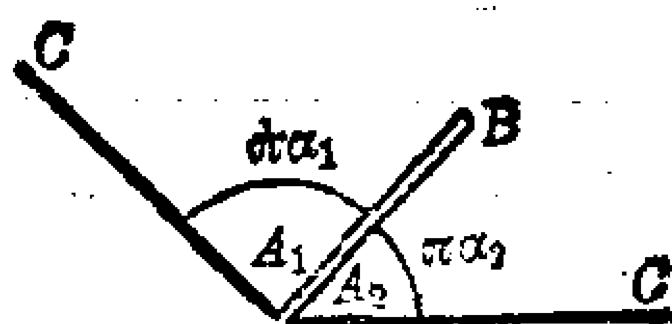


图 44

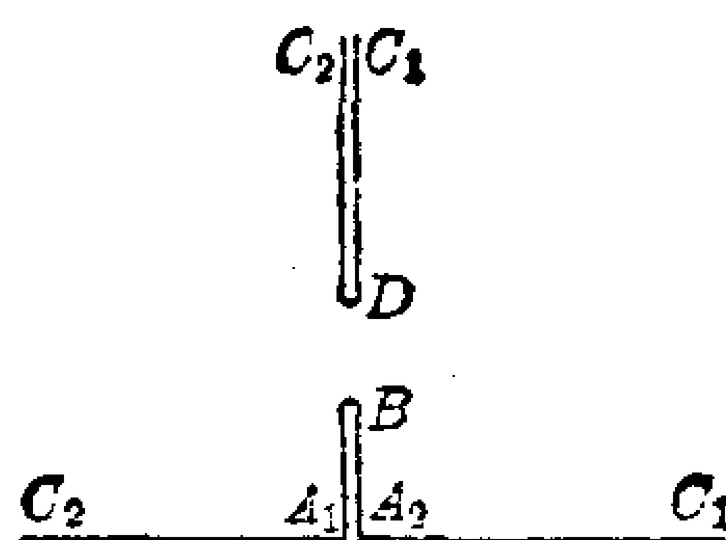


图 45

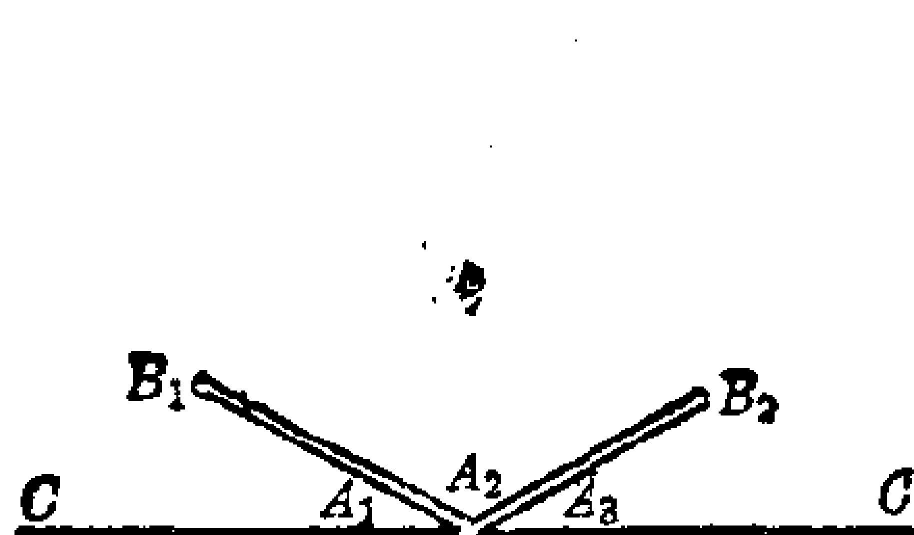


图 46

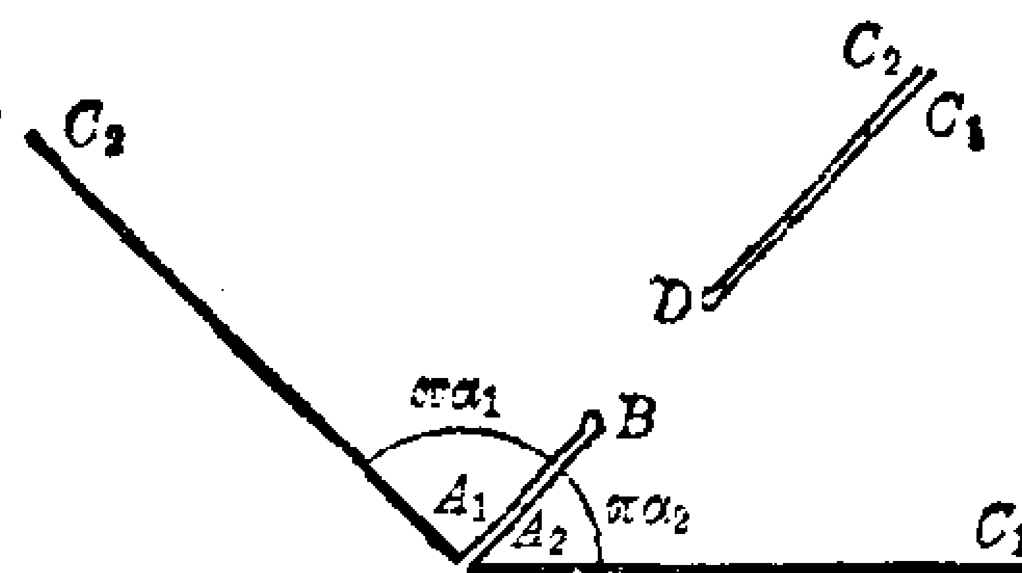


图 47

1249. 1) 区域如图 48, 1 所示. $w(\infty)=\infty$, $w(\pm 1)=\pm 1$;

2) 区域如图 48, 2 所示(截口之间的角度为 $\frac{\pi}{n}$, 两端的截口与相应的实轴的射线交成角度 $\frac{\pi}{2n}$). $w(\infty)=\infty$, $w(A_1, A_n)\to z(-1, 1)$。

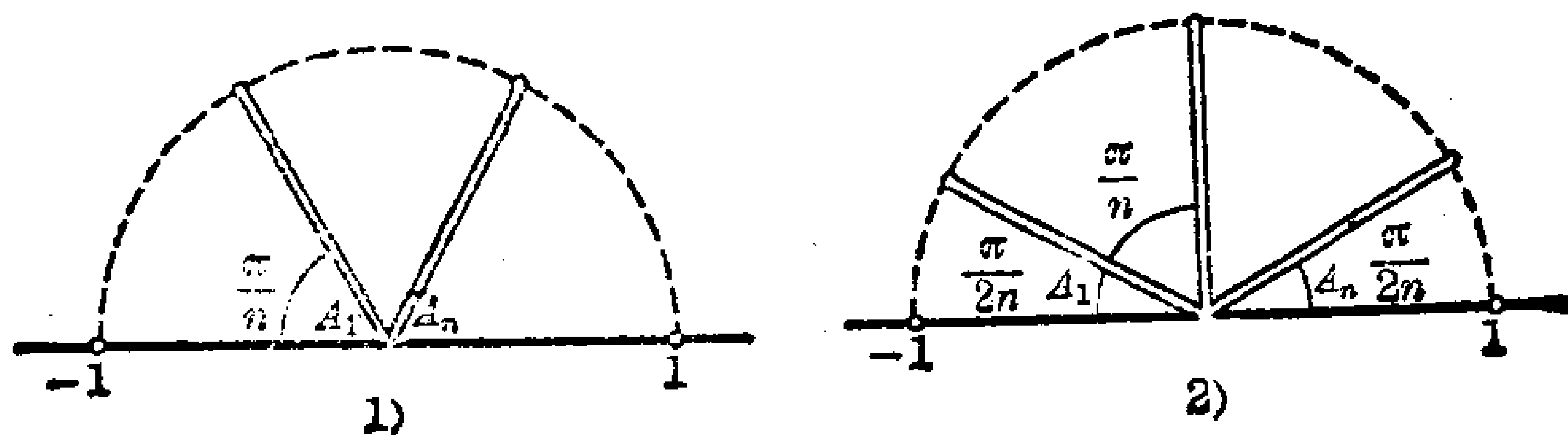


图 48

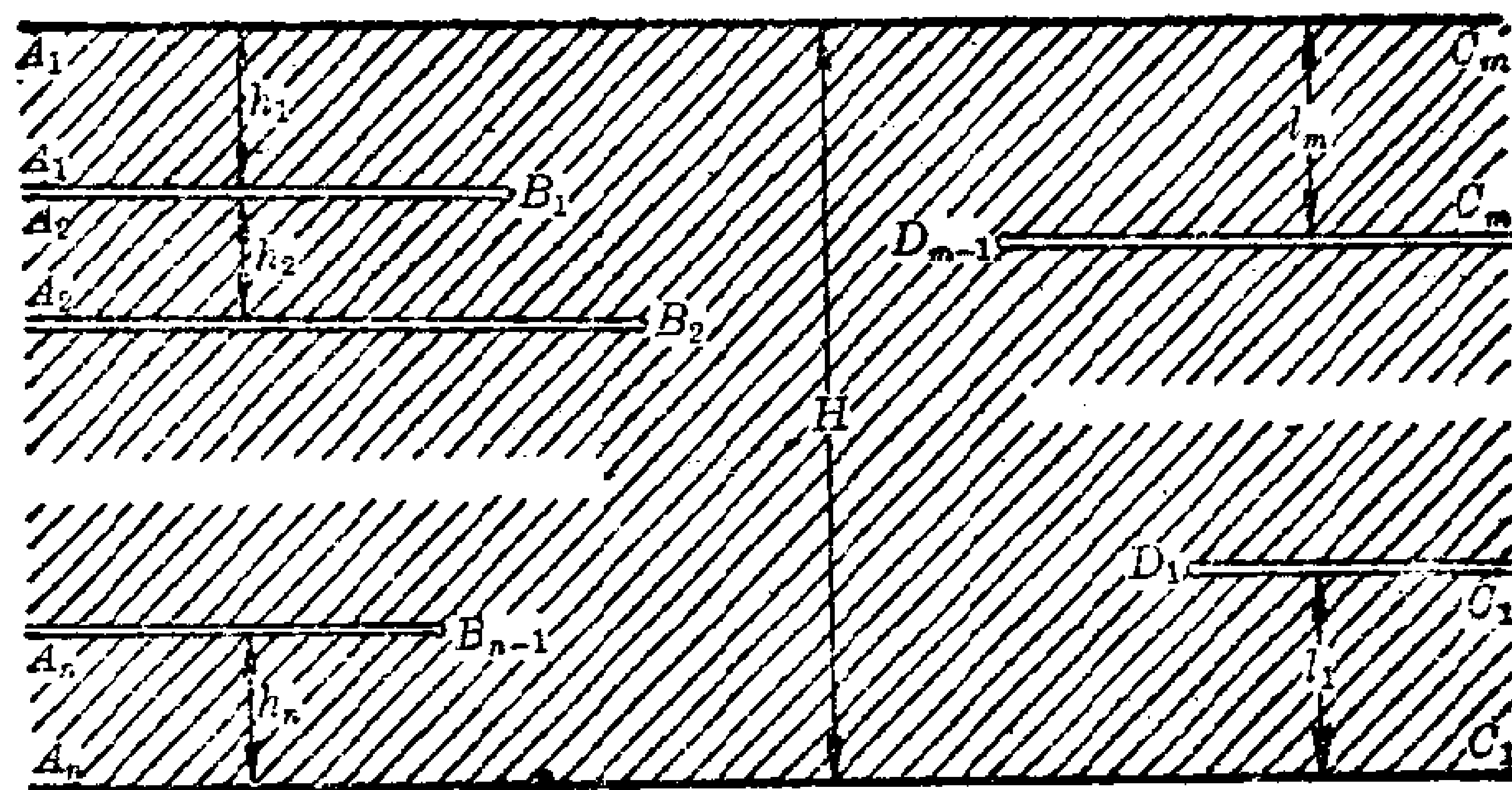


图 49

1250. 设 w-平面的区域 P 为宽度等于 H 的水平带形, 带有截口: 一组从点 $B_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 向左到 ∞, 另一组从点 $D_s(s=1, 2, \cdots, m-1)$ 向右到∞(图 49). 证明将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到区域 P 的函数 $w=f(z)$ 形如

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k)-\sum_{j=1}^{m}\frac{l_j}{\pi}\ln(z-c_j)+C, \tag{6}$$

其中 a_k 与 c_j 为 x 轴上对应于区域 P 的顶点 A_k 与 C_j 的点，h_k 为左向截口间的距离，l_j 为右向截口间的距离. x 轴上对应于顶点 B_i 与 D_s 的点 $b_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 与 $d_s(s=1, 2, \cdots, m-1)$ 为方程

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{z-a_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j}{z-c_j} = 0 \tag{7}$$

的根.

试问参数 C、a_k、b_i、c_j 与 d_s 怎样确定？若参数 a_k、b_i、c_j 或 d_s 中有一个等于 ∞，试问将有什么变化？

提示： 本题归结为题 **1244**. 求出单值函数 $f'(z)$ 或直接从许瓦尔兹-克里斯托弗尔公式着手均可.

1251. 设区域 P 为带有水平截口的上半平面 $\operatorname{Im} w>0$，截口从点 $B_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 向左到 ∞，从点 $D_s(s=1, 2, \cdots, m)$ 向右到 ∞（图 50）. 证明将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到区域 P 上的函数 $w=f(z)$ 形如

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\pi} \ln(z-a_k) - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j}{\pi} \ln(z-c_j) + Az + B, \tag{8}$$

其中 a_k 与 c_j 为 x 轴上对应于区域 P 的顶点 A_k 与 C_j 的点，h_k 与 l_j 为同一方向中截口之间的距离. 点 A_0 变到 ∞，$A>0$ 且 $\operatorname{Im} B = \sum_{j=1}^{m} l_j$. x 轴上对应于顶点 B_i 与 D_s 的点 $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 与 $d_s(s=1, 2, \cdots, m)$ 为方程

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{z-a_k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{l_j}{z-c_j} + A\pi = 0 \tag{9}$$

的根.

试问参数 A、B、a_k、b_i、c_j 与 d_s 怎样确定？证明：若点 A_0 变到点 $a_0 \neq \infty$，则

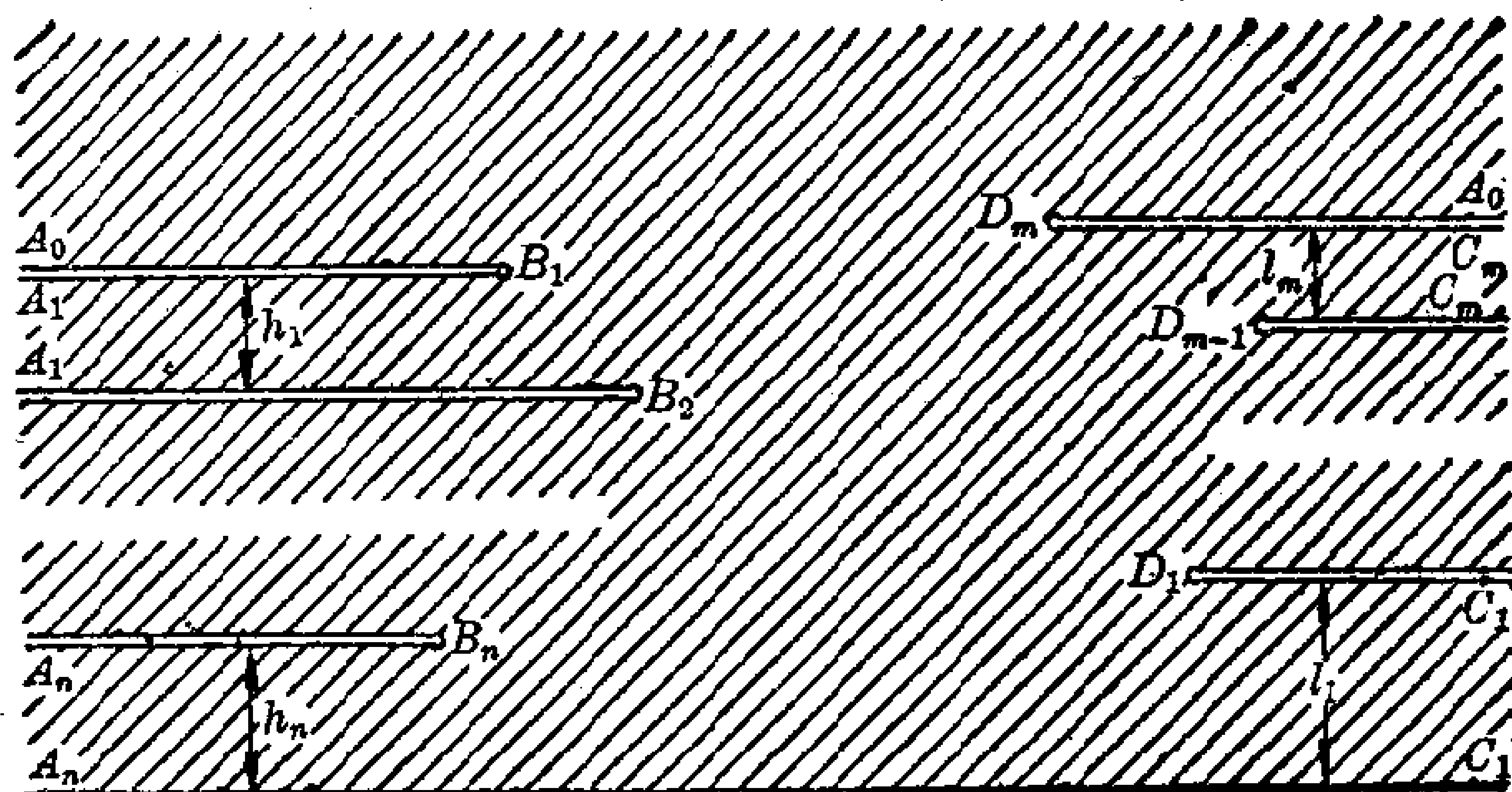


图 50

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k)-\sum_{j=1}^{m}\frac{l_j}{\pi}\ln(z-c_j)$$
$$+\frac{L-H}{\pi}\ln(z-a_0)+\frac{A}{z-a_0}+B, \qquad (10)$$

其中 $H=\sum_{k=1}^{n}h_k$, $L=\sum_{j=1}^{m}l_j$, $A<0$ 且 $\operatorname{Im}B=L$.

若参数 a_k 或 c_j 等于 ∞, 则删去公式 (10) 中相应的被加项.

提示: 利用许瓦尔兹-克里斯托弗尔公式. 为了确定对数项的系数, 将 w 绕点 a_0、a_k 与 c_j (沿半圆) 的增量进行比较, 这些增量可由关于 $f(z)$ 的公式用几何方法来计算.

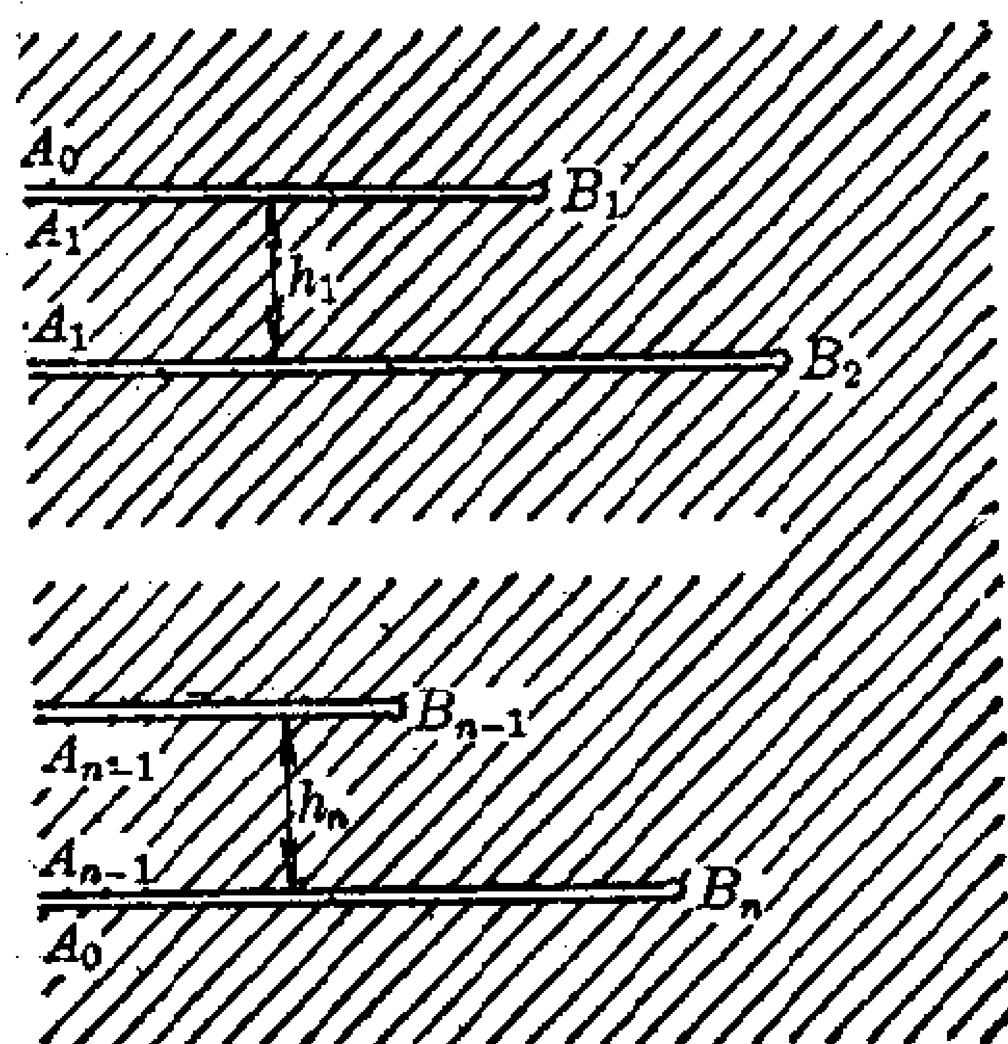


图 51

1252. 设区域 P 为带有水平截口的 w-平面, 截口从点 B_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 向左伸到无穷远 (图 51). 证明将上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 映射到区域 P 上的函数 $w=f(z)$ 形如

$$f(z) = -Az^2 + Bz + C + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{\pi} \ln(z - a_k),$$

其中 a_k 为 x 轴上对应于区域 P 的顶点 A_k 的点，h_k 为截口间的距离．点 A_0 变到 ∞，$A>0$，而 B 为实数．对应于顶点 B_i 的点 $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为导数 $f'(z)$ 的零点．试问参数 A、B、C、a_k 与 b_i 怎样确定？

提示：参见题 **1251** 的提示。

1253．设区域 P 为带有向左与向右伸到无穷远的水平截口的 w-平面（图 52）．证明将上半平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ 映射到区域 P 上的函数 $w=f(z)$ 形如：

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k}{\pi} \ln(z - a_k) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{l_j}{\pi} \ln(z - c_j) + \frac{A}{z-a_0} + \frac{C}{z-c_0} + B, \tag{11}$$

其中 $A>0$, $C>0$, $h_0=\mathrm{Im}(D_m-B_1)$, $l_0=\mathrm{Im}(D_1-B_n)$，其余的参数（包括对应于顶点 B_i 与 D_s 的 b_i 与 d_s）值则同题 **1251**

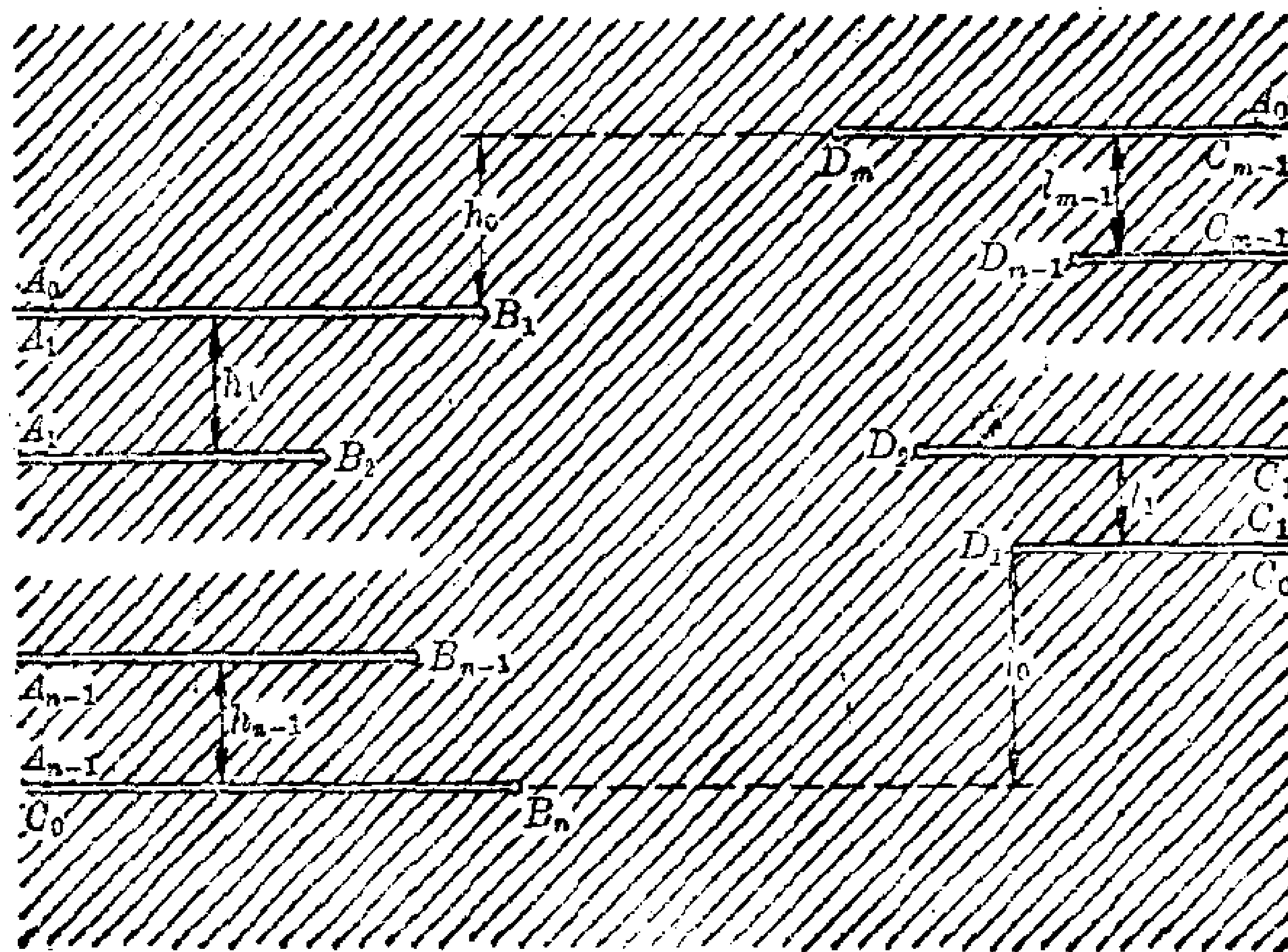


图 52

中一样. 试问参数 A、B、C、a_k、b_i、c_j 与 d_s 怎样确定? 证明: 若 $a_0=\infty$, 则

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h_k}{\pi}\ln(z-a_k)-\sum_{j=0}^{m-1}\frac{l_j}{\pi}\ln(z-c_j)$$

$$-\frac{C}{z-c_0}+Az+B, \qquad (12)$$

其中 $A>0$, $C>0$. 若参数 $a_k(k\neq 0)$ 或 $c_j(j\neq 0)$ 等于∞, 则删去公式(12)中相应的被加项.

提示: 参见题 **1251** 的提示.

1254. 对于下列已知条件, 将上半平面 $\mathrm{Im}\, z>0$ 映射到图 53 中所示的 w-平面的区域上(所有尺寸都在相应的图中标出); 并求出 a 与 $b(a>0,\ b>0)$.

1) $(A_1,\ B,\ A_2,\ C)\to(-1,\ b,\ 1,\ \infty)$;

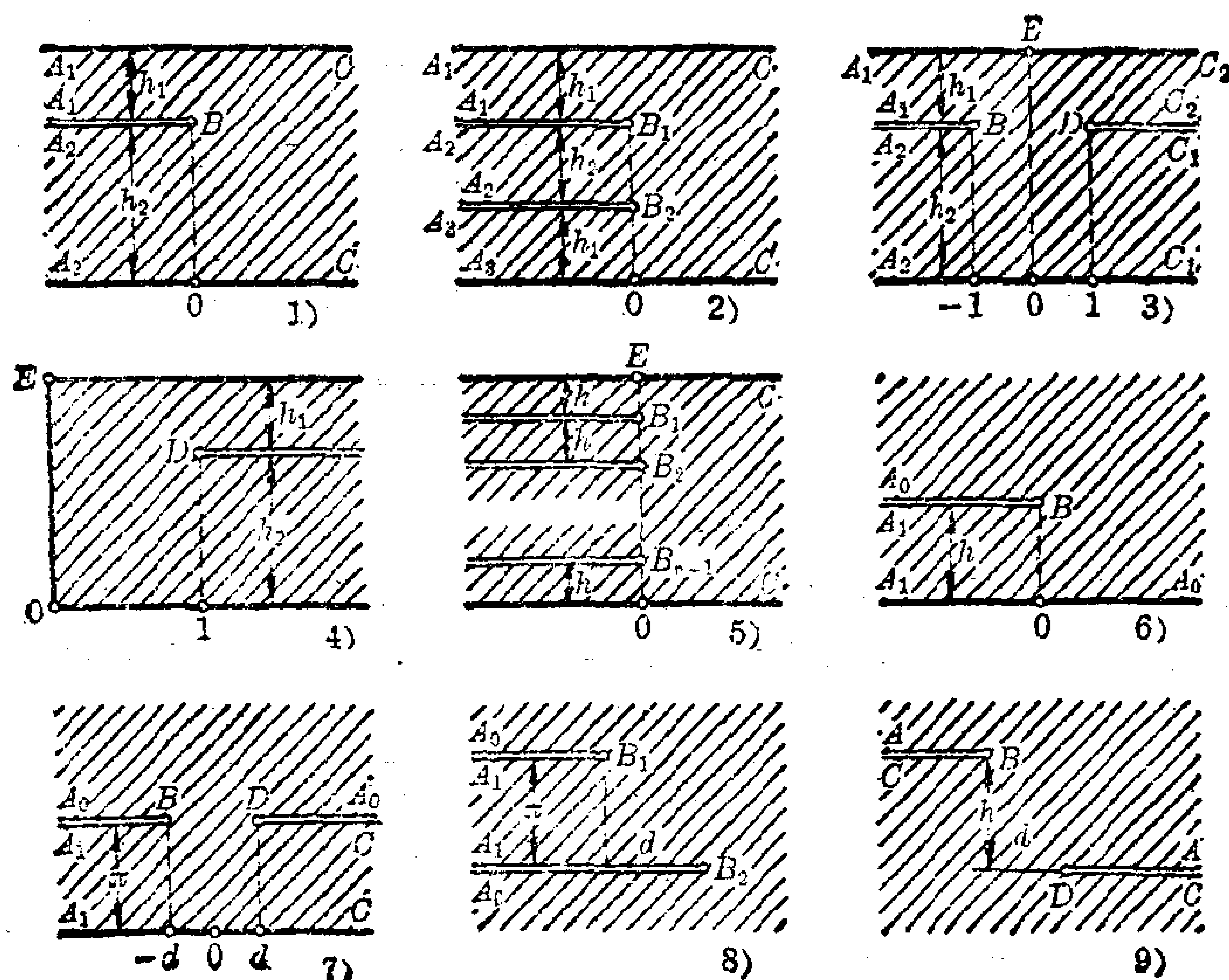


图 53

2) $(A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, C) \to (-1, -b, 0, b, 1, \infty)$;

3) $(E, O, D) \to (-1, 1, \infty)$;

4) $(E, O, D) \to (-1, 1, \infty)$;

5) $(E, O, C) \to (-1, 1, \infty)$;

6) $(A_0, B, A_1) \to (\infty, 0, 1)$;

7) $(A_1, O, C) \to (-1, 0, 1)$;

8) $(A_0, B_1, A_1, B_2) \to (\infty, -(1+a), -1, 0)$;
$d=\mathrm{Re}(B_2-B_1)$;

9) $(A, B, C, D) \to (\infty, -1, a, 1)$; $d=\mathrm{Re}(D-B)$, $h=\mathrm{Im}(B-D)$.

§2. 应用椭圆函数的保形映射

积分

$$u(z, k)=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{1}$$

称为勒让德形式下的第一类标准椭圆积分，其中被积函数当 $t=0$ 时等于1. 参数 k 称为模；以后假定 $0<k<1$.

替换自变量 $z=\sin\varphi$，并置换 $t=\sin\psi$，将积分化为形式

$$u(\sin\varphi, k)=F(\varphi, k)=\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}. \tag{2}$$

逆函数

$$z=\mathrm{sn}(u, k) \tag{3}$$

(或者用别的记号，$\varphi=\mathrm{am}\, u$) 为基本的雅可比椭圆函数之一，称为雅可比"sn"-函数. 由定义即得 $\mathrm{sn}(0, k)=0$. 与函数 $\mathrm{sn}(u, k)$ 相联系的是另外两个函数:

$$\mathrm{cn}(u, k)=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(u, k)},\quad \mathrm{dn}(u, k)=\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u, k)}, \tag{4}$$

分别称为雅可比"cn"-函数与雅可比"dn"-函数. 根的分枝由条件 $\mathrm{cn}(0, k)=\mathrm{dn}(0, k)=1$ 确定. 若不必指出模 k，则可简写为 $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$.

由(1)至(4)得到:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d(\operatorname{sn} u)}{du}=\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d(\operatorname{cn} u)}{du}=-\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,\\&\frac{d(\operatorname{dn} u)}{du}=-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u。\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

函数 $u(z, k)$ 在 $z=i\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$ 时的值，即积分

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\boldsymbol{K}(k)$$

称为第一类全椭圆积分．量 $k'=\sqrt{1-k^2}$ 称为补模．

$\boldsymbol{K}(k)=\boldsymbol{K}$ 与 $\boldsymbol{K}(k')=\boldsymbol{K}'$ 称为约束(bound)椭圆积分．

以下各题中常使用下列容易证得的关系（第一类全椭圆积分的变换）：

$$\boldsymbol{K}\left(\frac{1}{k}\right)=k(\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}'),\ \boldsymbol{K}\left(\frac{1}{k'}\right)=k'(\boldsymbol{K}'+i\boldsymbol{K}), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{K}\left(\frac{ik}{k'}\right)=k'\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{K}\left(\frac{ik'}{k}\right)=k\boldsymbol{K}'.$$

并注意

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}=\boldsymbol{K}' \quad (\text{置换 } k^2t^2+k'^2\tau^2=1),$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k^2t^2)}}=\boldsymbol{K}' \quad (\text{置换 } t=\operatorname{tg}\psi).$$

1255．证明在第一类标准椭圆积分

$$u=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

构成的映射下，上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 的象为矩形，其顶点为 $\pm\boldsymbol{K}$、$\pm\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}'$，对应于点 ±1、$\pm\frac{1}{k}$.

按照对称原理延拓映射，证明逆函数 $z=\operatorname{sn} u$ 为周期等于 $4\boldsymbol{K}$ 与 $2i\boldsymbol{K}'$ 的双周期函数．

考虑平面 u 与 φ 之间的对应关系，其中 $u=F(\varphi, k)$．

提示：应用边界对应原理．特别注意当 z 跑遍实轴时变

量 $\frac{du}{dz}$ 的变化.

1256. 将上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到 w-平面内顶点为 $\pm a$, $\pm a+ib$ 的矩形上($a>0$, $b>0$).

1257. 求出椭圆积分

$$u=\int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}$$

映射 z-平面第四象限的象.

按照对称原理延拓映射, 求出沿射线 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$, $\left(-i\infty, -\frac{ik'}{k}\right]$, $\left[\frac{ik'}{k}, i\infty\right)$ 截开的整个 z-平面的象. 验证逆函数为 $z=\operatorname{cn}(u, k)$, 并证明它为周期等于 $4K$, $2K+2iK'$ 的双周期函数.

1258. 求出椭圆积分

$$u=\int_z^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}}$$

映射 z-平面第四象限的象.

按照对称原理延拓映射, 并求出沿射线 $(-\infty, k']$, $[k', \infty)$ 截开的整个 z-平面的象. 验证逆函数为 $z=\operatorname{dn}(u, k)$, 并证明它为周期等于 $2K$ 与 $4iK'$ 的双周期函数.

1259. 求出第一类椭圆积分

$$u(z, k_1)=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}}$$

映射 z-平面第一象限的象, 其中 k_1 取值 k, $\frac{1}{k}$, k', $\frac{1}{k'}$, $\frac{ik}{k'}$, $\frac{ik'}{k}$.

提示: 应用公式(6).

积分

$$v(z,\ k)=\int_0^z\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=\int_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi=E(\varphi,\ k)\tag{7}$$

($z=\sin\varphi$)称为勒让德形式下的第二类标准椭圆积分。

当$z=1\left(\varphi=\dfrac{\pi}{2}\right)$时，则得第二类全椭圆积分：

$$\boldsymbol{E}(k)=\boldsymbol{E}=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt.\tag{8}$$

记$\boldsymbol{E}(k')=\boldsymbol{E}'$，易得下列关系式：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}[(\boldsymbol{E}-k'^2\boldsymbol{K})-i(\boldsymbol{E}'-k^2\boldsymbol{K}')],\\&\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{k'}\right)=\frac{1}{k'}[(\boldsymbol{E}'-k^2\boldsymbol{K}')-i(\boldsymbol{E}-k'^2\boldsymbol{K})],\\&\boldsymbol{E}\left(\frac{ik}{k'}\right)=\frac{1}{k'}\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E}\left(\frac{ik'}{k}\right)=\frac{1}{k}\boldsymbol{E}'.\end{aligned}\tag{9}$$

对应于补模为k与k'的第一类与第二类全椭圆积分，由下面的勒让德关系式相联系

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}'+\boldsymbol{E}'\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}'=\frac{\pi}{2}.\tag{10}$$

在定义$v(z,\ k)$的积分中，自变量$z=\operatorname{sn}u$的置换导出雅可比函数

$$E(u,\ k)\equiv E(u)=v(\operatorname{sn}u,\ k)=\int_0^u dn^2\tau d\tau,\tag{11}$$

它是把第二类椭圆积分表示为第一类椭圆积分的函数．与函数$E(u)$相联系的函数$Z(u)$由公式

$$Z(u)=E(u)-\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{K}}u\tag{12}$$

定义．

1260．求出第二类标准椭圆积分

$$v(z,\ k_1)=\int_0^z\sqrt{\frac{1-k_1^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$

映射z-平面第一象限的象，其中k_1取值k，$\dfrac{1}{k}$，k'，$\dfrac{1}{k'}$，$\dfrac{ik}{k'}$，$\dfrac{ik'}{k}$。

提示：应用公式(9)以及事实

$$\int_1^{\frac{1}{k}}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=i(\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{E}')$$

(这个公式由置换 $k^2t^2+k'^2\tau^2=1$ 而得到).

1261*. 将上半平面 $\operatorname{Im}z>0$ 映射到沿直线段 $\operatorname{Re}w=\pm a$, $0\leqslant\operatorname{Im}w\leqslant h$ 有两条铅垂截口的上半平面 $\operatorname{Im}w>0$ 上, 规范条件为 $w(0)=0$, $w(\infty)=0$, $w'(\infty)>0$.

提示：应用下述形式的许瓦尔兹-克里斯托弗尔公式

$$w(z)=C\int_0^z\frac{b^2-z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz$$

$$=C_1[(k^2b^2-1)u(z,\ k)+v(z,\ k)],$$

其中 $C_1=\frac{C}{k^2}$, $w(\pm1)=\pm a$, $w(\pm b)=\pm a+ih$, 并建立方程来确定参数 C_1, k 与 b。

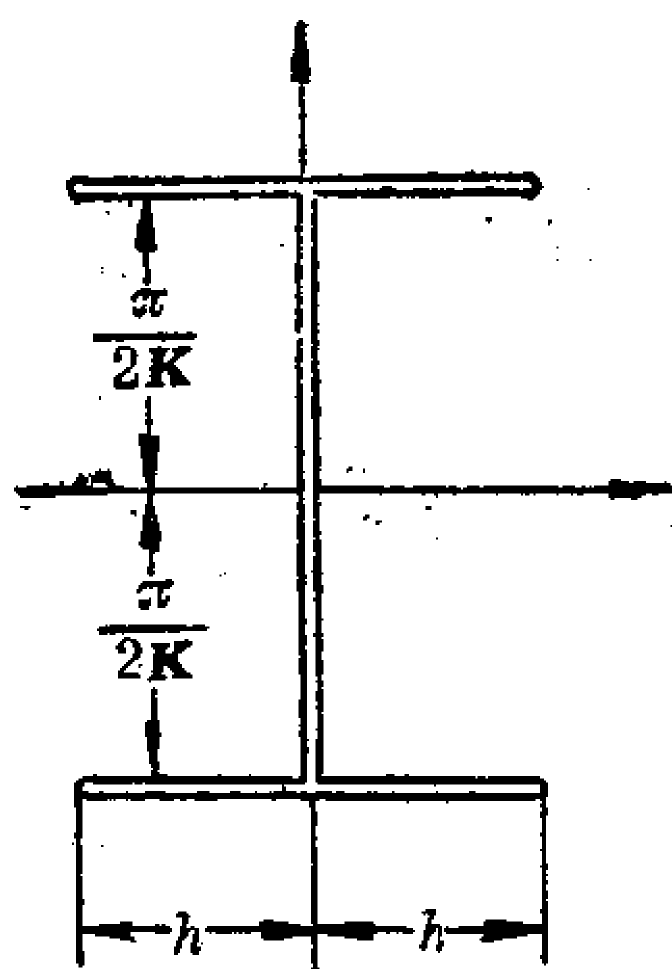


图 54

1262. 证明函数

$$w=Z(u)+\frac{\operatorname{dn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}$$

将位于平面 $u=\xi+i\eta$ 的矩形 $0<\xi<\boldsymbol{K}$, $0<\eta<\boldsymbol{K}'$ 映射到带有截口 $\left[-\frac{\pi i}{2\boldsymbol{K}},\ h-\frac{\pi i}{2\boldsymbol{K}}\right]$ 的 w-平面的第四象限上, 其中 $h-\frac{\pi i}{2\boldsymbol{K}}$ 为点 $u=\xi+i\boldsymbol{K}'$ 的象, 在该点 $\frac{dw}{du}=0$. 按照对称原理延拓映射, 证明带有图 54 所示的截口的整个平面为矩形 $|\xi|<\boldsymbol{K}$, $|\eta|<\boldsymbol{K}'$ 的象.

积分

$$w(z,\ \nu,\ k)=\int_0^z\frac{dt}{(1+\nu t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\nu\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\Pi(\varphi,\nu,k) \tag{13}$$

称为勒让德形式下的第三类标准椭圆积分.

置换自变量 $z=\operatorname{sn}u$ 得到公式

$$w(\operatorname{sn}u,\nu,k)=\int_0^u\frac{d\tau}{1+\nu\operatorname{sn}^2\tau}. \tag{14}$$

量 $\Pi_1(\nu,k)=w(1,\nu,k)=\Pi\left(\frac{\pi}{2},\nu,k\right)$ 称为第三类全椭圆积分.

1263. 映射由第三类标准椭圆积分(13)构成，且(13)中的 k 满足 $0<k<1$. 求出在这种映射下，z-平面第一象限的象. 分别考虑 ν 属于下列区间时的情形:

1) $(-\infty,-1)$; 2) $(-1,-k^2)$;

3) $(-k^2,0)$; 4) $(0,\infty)$.

再考虑 $\nu=-1$ 与 $\nu=-k^2$ 的情形.

利用对称原理越过 z-平面实轴上的不同区间作延拓，指出由此得到的 w-平面上的区域. 在每一情形中，指出 u-平面上相应的区域，其中 $u=\operatorname{sn}u$.

积分

$$w=\int_z^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}=\int_z^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}, \tag{15}$$

其中判别式 $\Delta=g_2^3-27g_3^2\neq0$ (此时 e_1,e_2,e_3 两两不同)，称为维尔斯特拉斯形式下的第一类标准椭圆积分，而逆函数

$$z=\wp(w) \tag{16}$$

称为维尔斯特拉斯“$\wp$”-函数. 这是一个周期为 2ω, $2\omega'\left(\operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}\neq0\right)$ 的基本的椭圆函数，它满足微分方程

$$\wp'^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3=4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3). \tag{17}$$

在周期平行四边形内，$\wp(w)$ 为双叶偶函数(图 55)，在 $w=0$ 处有二阶极点，还有二重点($\wp'=0$)ω, $\omega+\omega'$, ω':

$$\left.\begin{array}{l}e_1=\wp(\omega),\quad e_2=\wp(\omega+\omega'),\\ e_3=\wp(\omega'),\end{array}\right\} \tag{18}$$

由(17)即得

$$\left.\begin{aligned}&e_1+e_2+e_3=0,\\&e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-\frac{1}{4}g_2,\\&e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3.\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

1264*. 讨论借助于 g_2, g_3 为实数及 $\Delta>0$ 的维尔斯特拉斯形式下的第一类标准椭圆积分(15)而实现的 z-平面的映射. 考虑 $g_3>0$, $g_3<0$, $g_3=0$ 的情形. 求出 $\wp(w)$ 的周期.

提示: 考虑通过边界对应原理而实现的上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 的映射.

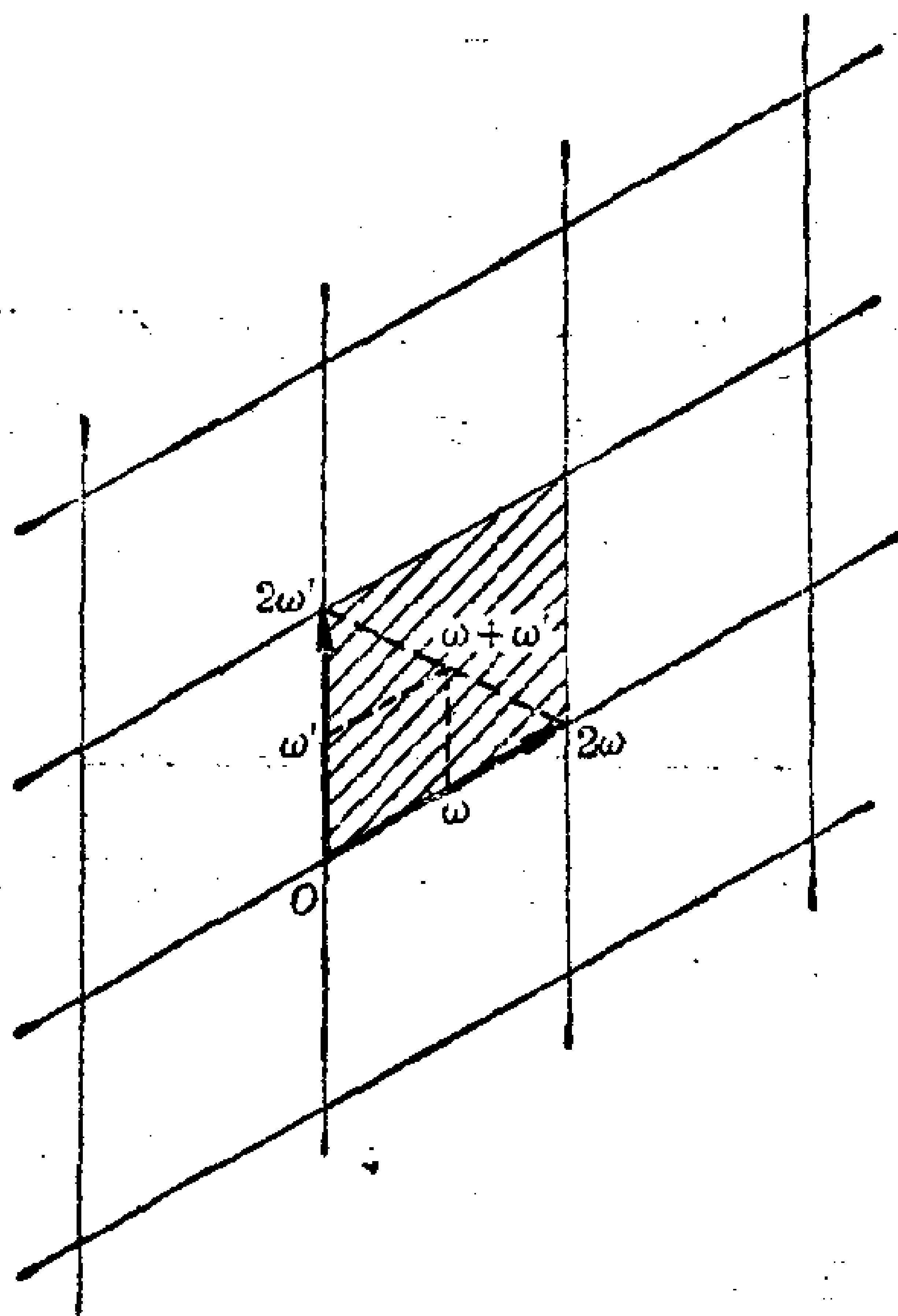


图 55

1265*. 讨论借助于 g_2, g_3 为实数及 $\Delta<0$ 的第一类标准椭圆积分(15)而实现的 z-平面的映射. 特别考虑 $g_2=0$ 的情形. 求出 $\wp(w)$ 的周期.

提示：由于 $\Delta<0$，量 e_1，e_2，e_3 中的两个为共轭复数，一个为实数．设 e_2 为实数，$e_1=\alpha+i\beta$，$e_3=\alpha-i\beta(\beta>0)$．考虑由边界对应原理实现的半圆 $|z-e_2|=|e_1-e_2|$，$\operatorname{Im} z>0$ 的映射，并按照对称原理延拓映射．

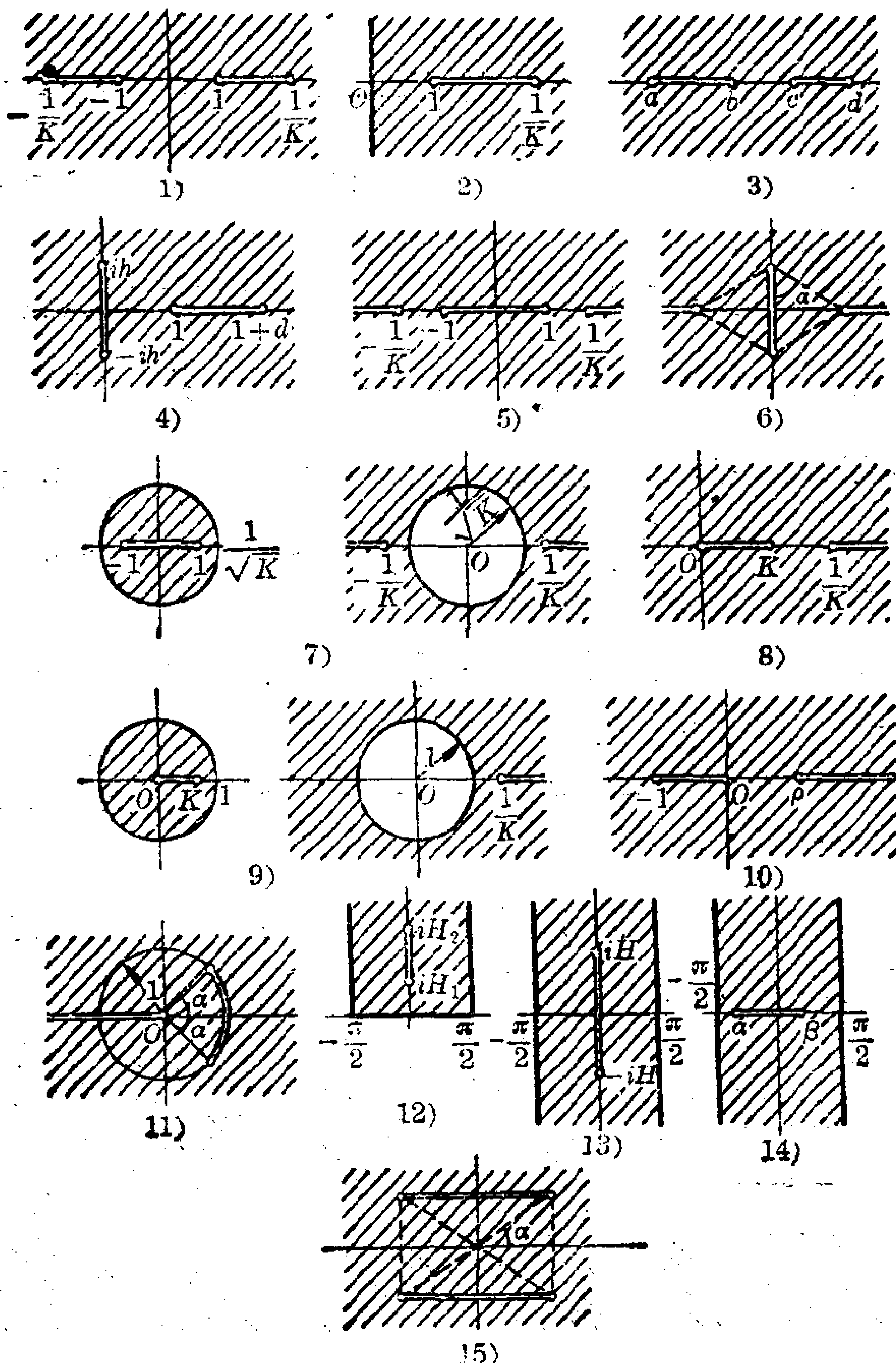


图 56

1266. 求三角形 ABC 到上半平面 $\operatorname{Im} w>0$ 上的映射。若已知:

1) $(A=0,\ B=\omega>0,\ C=\omega(1+i))\to(\infty,\ -1,\ 0)$;

2) $\left(A=0,\ B=a>0,\ C=\frac{a\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\to(\infty,\ -1,\ 1)$;

3) $\left(A=0,\ B=a>0,\ C=\frac{a\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\to(\infty,\ -1,\ 0)$.

提示：利用题 **1264**($g_3=0$ 的情形)与题 **1265**($g_2=0$ 的情形)的解答。

1267. 将 z—平面上双连通区域 1 至 15(图 56)映射到圆环 $\rho_1<|w|<\rho_2$ 上，并确定模 $\mu=\frac{\rho_2}{\rho_1}$ (参见第 36 页)。

在题 **1268** 至 **1270** 中，将给出的区域映射到单位圆 $|t|<1$上.

1268. 矩形 $|\operatorname{Re} u|<K,\ |\operatorname{Im} u|<K'(0<K<1)$。求出映射下顶点的位置.

1269. 带有截口 $[-a,\ -1]$, $[1,\ a]$ 的椭圆 $|z-1|+|z+1|=2a\,(a>1)$ 的内部.

1270. 椭圆 $|z-1|+|z+1|=2a\,(a>1)$ 的内部. 求出映射下焦点的位置.

1271. 将单位圆的外部 $|t|>1$ 映射到图 57 所示的 z—平面的区域 1 至 3 上.

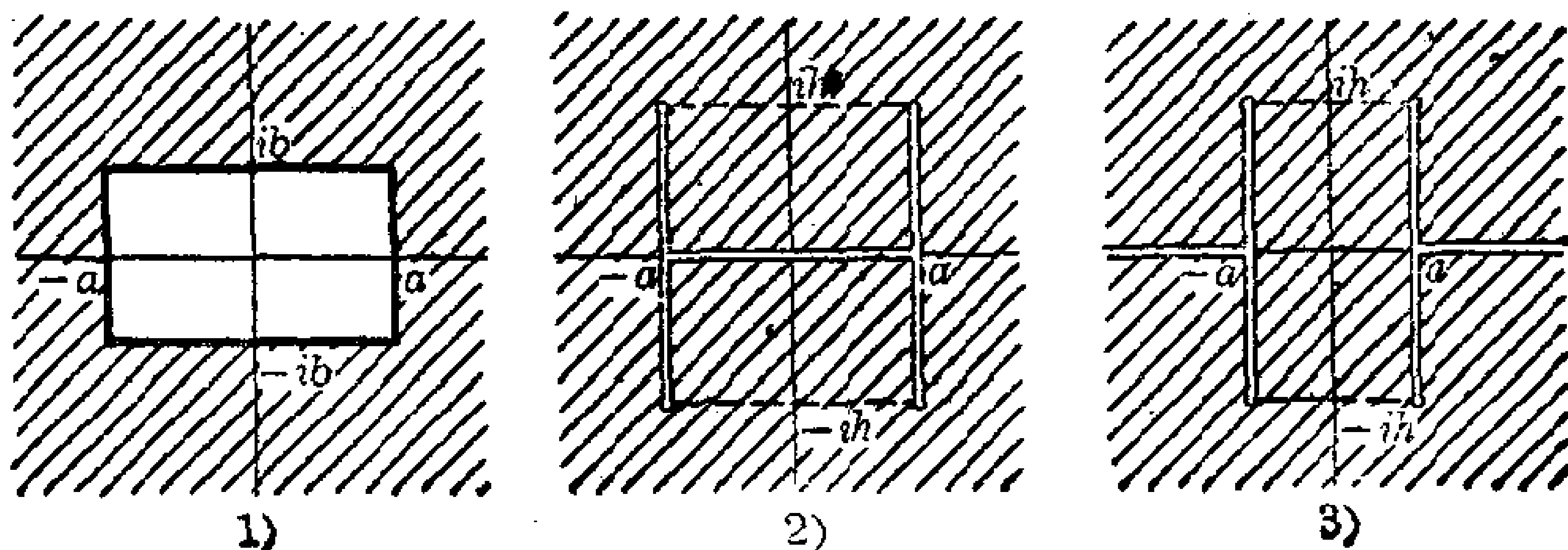


图 57

第 十 章

在力学和物理学上的应用

§1. 在流体动力学上的应用

不可压缩流体的一个稳态二维无旋流动可以由解析函数

$$w(z)=\varphi(x, y)+i\psi(x, y) \tag{1}$$

来表示其特征，$w(z)$ 称为流动的复势或特征函数；φ 称为势函数，ψ 称为流函数．曲线 $\varphi=$常数为等势线，$\psi=$常数为流线（或流动线）．流动的速度 $\boldsymbol{V}$ 与 $w(z)$ 由下列关系式相联系：

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{V}=Ve^{i\alpha}=V_x+iV_y=\overline{w'(z)}, \\ |\boldsymbol{V}|=|w'(z)|, \ \alpha=-\arg w'(z), \\ \boldsymbol{V}=\operatorname{grad}\varphi. \end{array}\right\} \tag{2}$$

设 C 为取正向的闭围道（围道 C 也可由一条弧取相反方向的两侧组成）．量

$$\Gamma=\int_C V_s\,ds=\int_C V_x\,dx+V_y\,dy=\int_C d\varphi \tag{3}$$

称为矢量 $\boldsymbol{V}$ 围绕围道 C 的环流．

量

$$Q=\int_C V_n\,ds=\int_C(-V_y\,dx+V_x\,dy)=\int_C d\psi \tag{4}$$

（n 为取正向的闭围道 C 的外法线）称为矢量 $\boldsymbol{V}$ 通过围道 C 的流量．类似地，矢量 $\boldsymbol{V}$ 通过弧 AB 的流量定义为积分 $\int_{AB} V_n\,ds$（法线 n 的方向必须指定）．

结合公式(3)与(4)，则得到

$$\Gamma+iQ=\int_C w'(z)\,dz. \tag{5}$$

若 $w'(z)$ 在 C 内有定义并只有有限个奇点，则

$$\Gamma+iQ=2\pi i\sum \operatorname{res} w'(z).$$

若 a 为函数 $w'(z)$ 的极点，则 $w(z)$ 在 a 附近有下述形式的展开式：

$$w(z)=\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}$$
$$+\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln(z-a)+C_0+C_1(z-a)+\cdots.$$

项 $\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln(z-a)$（$\Gamma$, Q 为实数）称为在点 a 定义了一个源强为 Q、旋强为 Γ 的**涡旋源**，记作 $(a;\ Q,\ \Gamma)$[1]，项 $\frac{p}{2\pi}\frac{1}{z-a}$ 称为具有矩 p 的**双重源**，记为 $(a;\ p)$（p 为复数；半径矢量 p 确定了沿流线方向通过点 a 的双重源轴线的方向）；其余的项 $\frac{C_{-k}}{(z-a)^k}$ 在点 a 处定义了 $2k$ 阶**多重源**.

相应地，若在 ∞ 处

$$w(z)=C_nz^n+\cdots+\frac{p}{2\pi}z+\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln z+C_0+\frac{C_{-1}}{z}+\cdots,$$

则项 $\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln z$ 在 ∞ 处定义了一个源强为 Q、旋强为 Γ 的**涡旋源**，项 $\frac{p}{2\pi}z$ 定义了具有矩 p 的**双重源**（在 ∞ 处，流线方向与半径矢量 p 的方向重合），其余的项 C_kz^k 定义了 $2k$ 阶**多重源**.

使 $\boldsymbol{V}=0$，从而 $w'(z)=0$ 的点称为流动的**临界点**；流线与等势线交替地从这些点流出. 若一临界点为 $(n-1)$ 阶导数的零点，则这些曲线交成 $\frac{\pi}{2n}$ 的角. 在无穷远点，也可能有这样的曲线分支.

在题 **1272** 至 **1285** 中，已知流动的复势，试构造等势线与流线，确定 $\boldsymbol{V}$，奇点与临界点，涡旋源的旋强与源强以及双重源的矩. 讨论在无穷远点处流动的性状.

1272. $w=cz\quad(c=\alpha+i\beta)$.

1273. $w=z^n\quad$（特别，$n=2,\ 3$）.

---

1) 若 $Q=0$，则为**涡旋** $(a;\Gamma)$. 若 $\Gamma=0$，则为**源** $(a;\ Q)$. 若源强 $Q<0$，则为**汇**.

1274. $w=\dfrac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln z$. 特别考虑 $\Gamma=0$ 与 $Q=0$ 的情形。

1275. $w=\dfrac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln\dfrac{z-a}{z-b}$.

1276. $w=\dfrac{1}{z}$. 再确定在点 $2\pm i$ 处的速度。

1277. 1) $w=z+\dfrac{R^2}{z}$; 2) $w=z-\dfrac{R^2}{z}$.

1278. $w=\dfrac{1}{z^2}$.

1279. $w=\ln(z^2-a^2)\ (a>0)$. 再确定在点 $\pm ia$ 处的速度.

1280. $w=\ln\dfrac{z^2-a^2}{z^2+a^2}\quad(a>0)$.

1281. $w=\dfrac{Q}{2\pi}\ln\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$.

1282. $w=\ln\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)$.

1283. $w=\ln\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)$.

1284. $w=az+\dfrac{Q}{2\pi}\ln z\quad(a>0,\ Q>0)$.

1285. $w=az+\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\quad(a>0,\ \Gamma>0)$.

1286. 若 $w=a\left(z+\dfrac{R^2}{z}\right)+\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\,(a>0,\ \Gamma>0)$, 讨论流动在区域 $|z|\geqslant R$ 内的特征. 考虑 $\Gamma<4\pi aR$, $\Gamma=4\pi aR$, $\Gamma>4\pi aR$ 的情形.

1287. 若流动由涡旋源 $\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 产生, 在无穷远点处, 已知速度 $V_\infty=Ve^{i\alpha}$, 求流动在整个平面

内的复势 $w(z)$.

1288. 若一点为: 1) 涡旋源; 2) 双重源; 3) 同时为涡旋源与双重源. 试问流线能否从该点发出?

1289. 若点 a 或无穷远点为涡旋源、双重源或多重源, 对于在这种点 ($c_1\neq0$, $c_{-1}\neq0$) 邻域内的下述单叶保形映射, 求出支配其变化的规律:

1) $\zeta=\alpha+c_1(z-a)+\cdots$; 2) $\zeta=\alpha+\dfrac{c_{-1}}{z}+\cdots$;

3) $\zeta=\dfrac{c_{-1}}{z-a}+c_0+\cdots$; 4) $\zeta=c_1z+c_0+\cdots$。

1290. 求出支配一个涡旋源在 n 叶映射

$$\zeta=\alpha+c_n(z-a)^n+\cdots,\ c_n\neq0,$$

$$\zeta=\alpha+\frac{c_{-n}}{z^n}+\cdots,\ c_{-n}\neq0$$

下的变化规律.

1291. 证明流动能由对称原理越过流线或等势线的一个直线或圆弧部分而延拓. 这时涡旋源变成涡旋源, 双重源变成双重源, 而一个多重源一般变成一组总计起来等于同样阶数的多重源. 求出支配涡旋源的旋强与源强以及双重源的矩的变化规律.

注. 题 **1291** 表明, 对称原理与保形映射一起, 广泛应用于流动的构造(参见题 **1293** 至 **1301**).

从对称原理得出, 若在流线或在等势线上存在直线段或圆弧段, 则流动关于此直线段或圆弧段必为对称. 这不仅对所指出的这些直线段或圆弧段外的流动的奇点, 而且对这些线段或圆弧段本身或其端点(若存在的话)都要施加某些限制.

1292. z-平面内的一个流动由有限个源、涡旋与双重源构成.

1) 若源、涡旋与双重源 a) 都不在圆上, b) 都在圆上, c) 部分在圆上, 部分在圆外, 求出圆 $|z|=R$ 为流线的充要条件;

2) 在同样的假设下, 求出圆 $|z|=R$ 为等势线的条件.

1293. 求出上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内的流动的复势, 若已知下列奇点与速度 $\boldsymbol{V}_\infty$:

1) 速度 $\boldsymbol{V}_\infty=V$; 2) 涡旋 $(a;\ \Gamma)$ 与速度 $\boldsymbol{V}_\infty=0$; 3) 源 $(a;\ Q)$ 与速度 $\boldsymbol{V}_\infty=0$; 4) 双重源 $(a;p)$ 与速度 $\boldsymbol{V}_\infty=0$; 5) 涡旋源 $\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 双重源 $(a;\ p)$ 与速度 $\boldsymbol{V}_\infty=V$. 试问流动在无穷远点处的性状怎样? 6) 涡旋源 $(0;\ Q,\ \Gamma)$ 与双重源 $(0;\ p)$; $\boldsymbol{V}_\infty=0$. 双重源的矩 p 可以取什么值? 若 $\Gamma\neq 0$, 流动是否总存在?

1294. 在圆 $|z|<R$ 内构造流动, 使其分别有: 1) 涡旋 $(a;\ \Gamma)$; 2) 双重源 $(a;\ p)$.

1295. 求出在圆 $|z|<R$ 内构造流动的条件, 若已知:

1) 仅有位于圆内的源 $\{(a_k;\ Q_k)\}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$;

2) 除了第(1)小题中的源外, 还有位于圆 $|z|=R$ 上的源 $\{(a'_k;\ Q'_k)\}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$.

求出两种情形中流动的复势.

1296. 在区域 $|z|>R$ 内构造流动, 使其分别有:

1) 涡旋 $(a;\Gamma)$, 速度 $\boldsymbol{V}_\infty=0$, 在无穷远处的环流 $\Gamma_\infty=0$;

2) 双重源 $(a;\ p)$, 速度 $\boldsymbol{V}_\infty=0$, 环流 $\Gamma_\infty=0$;

3) 速度 $\boldsymbol{V}_\infty=Ve^{i\alpha}$, 环流 $\Gamma_\infty=0$;

4) 速度 $\boldsymbol{V}_\infty=Ve^{i\alpha}$, 围绕圆 $|z|=R$ 的环流为 Γ.

注. 第(3)、(4)小题讨论了在无穷远点有已知速度的有环流与无环流的绕圆的流动.

在题 **1297** 至 **1300** 中，利用对称原理，由已知的奇点构造流动（在无穷远点与角点处的速度为零）.

1297．在区域 $|z|>1$, $\operatorname{Im} z>0$ 内，具有涡旋 $(ia;\ \Gamma)$, $a>0$.

1298．在角域 $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$ 内，具有源 $(ae^{i\frac{\pi}{6}};\ Q)$, $a>0$.

1299．在第一象限 $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$ 内，具有源 $(1;\ Q)$.

1300．1) 在第一象限 $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$ 内，具有源 $(1;\ Q)$ 与汇 $(i;\ -Q)$.

2) 在第一象限 $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$ 内，具有源 $(1+i;\ Q)$ 与汇 $(0;\ -Q)$.

1301．构造一个在整个 z-平面内的流动，若已知它在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内有涡旋源 $\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 与一个双重源 $(a;\ p)$，x 轴为等势线，速度 $\boldsymbol{V}_\infty=Ve^{i\alpha}$. 这样的流动是否总存在？

1302．构造一个在整个 z-平面内的流动，若已知它在圆 $|z|<R$ 内有涡旋源 $\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 与一个双重源 $(a;\ p)$，圆 $|z|=R$ 为等势线，速度 $\boldsymbol{V}_\infty=Ve^{i\alpha}$. 这样的流动是否总存在？

1303．在以围道 C 为边界的单连通区域 D 内构造一个有流线 C 的流动，它有涡旋源 $\{(a_k;\ Q_k,\ \Gamma_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 这样的流动是否总存在？

1304．在以围道 C 为边界且包含无穷远点的区域 D 内，构造一个有流线 C 的流动，它有涡旋源 $\{(a_k; Q_k,\ \Gamma_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 及已知速度 $\boldsymbol{V}_\infty=Ve^{i\alpha}$. 这样的流动是否总存在？

在题 **1305** 至 **1312** 中，考虑有界与无界围道的流线化. 这些习题可借助于到圆外、上半平面或直线带形上的保形映射来解答.

1305. 构造一个环绕围道 C 的流线的流动，使之有已知环流 Γ 与速度 $V_\infty = Ve^{i\alpha}$. 试问在 $\Gamma=0$ 的情形中，复势 $w(z)$ 实现了一个什么样的映射？

1306. 构造一个环绕椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的流线的流动，使之：

1) 具有已知速度 V_∞ 而无环流；

2) 具有已知速度 V_∞ 与环流 Γ.

1307. 构造一个环绕水平线段 $|x|\leqslant C$, $y=0$ 的流线的流动，使之：

1) 具有已知速度 V_∞ 而无环流；

2) 具有已知速度 V_∞ 与环流 Γ, Γ 由下述条件确定：水平线段有一端点为整个流动的出发点(茹可夫斯基-查普利根(Chaplygin)假设).

1308. 构造一个环绕茹可夫斯基剖面[1]的流线的流动，使之具有已知速度 V_∞ 与借助于茹可夫斯基-查普利根假设(剖面的锐端必须为出发点)而确定的环流 Γ.

在题 **1309** 至 **1312** 中，构造通过已知围道的流动.

1309. 抛物线 $y^2=2px$ (外部与内部).

1310. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的右枝(外部与内部，且速度 $V_\infty=0$).

1311. 半直线：$-\infty<x<-1$, $y=\pm\pi$.

1312. 半直线：$1<|x|<\infty$, $y=0$.

题 **1313** 至 **1317** 涉及周期流动 $\{V(z+\omega)=V(z)\}$ 与在曲线带形(渠道)内的流动. 为了构造这些流动，将曲线带形保形映射到直线带形上，然后按照对称原理延拓流动，并利用亚纯函数的部分分式级数的

1) 参见题 **313** 及其答案。

展开式.

在题 **1313** 至 **1314** 中，讨论奇点，绘出流线与等势线，并对具有已知复势的周期流动确定在周期带形内的无穷远处的速度.

1313. 1) $w=\frac{Q}{2\pi}\ln\sin z$; 2) $w=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\sin z$.

1314. $w=\frac{p}{2\pi}\operatorname{ctg} z\quad\left(0\leqslant\arg p\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

1315. 在 z-平面的直线带形 S: $0<x<\omega$ 内，构造一个由涡旋源 $(a;\ Q,\ \Gamma)$, $a\in S$ 产生的、具有已知速度 $V(x+i\infty)=iV$, $V(x-i\infty)=iV_1$ 的流动. 这样的流动是否总存在？

已知 $\Gamma=0$ 或 $Q=0$, 绘出流线与等势线.

提示：由对称原理延拓流动并利用题 **1313** 的解答.

1316. 在 z-平面的直线带形 S: $0<x<\omega$ 内，构造一个由双重源 $(a;\ p)$, $a\in S$ 产生的、具有已知速度 $V(x\pm i\infty)=iV$ 的流动. 绘出流线与等势线.

1317. 在 (z-平面的) 由围道 C_1, C_2 所界的曲线带形 S 中，构造在 S 内具有已知涡旋源与双重源，以及在带形 S 的无穷远点 Ω_1, Ω_2 处有已知速度 V_1, V_2 的、流线化 C_1, C_2 的流动. 指出这种流动存在的充分条件.

一个流动，若其速度 $\overline{w'(z)}$ 为椭圆函数，则称为*双周期流动*.

*椭圆函数*为周期等于 2ω 与 $2\omega'$ 的*双周期*亚纯函数，其中 $\operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}\neq 0\left(以后假设 \operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}>0\right)$. 由此定义得到 $f(z+2m\omega+2n\omega')=f(z)$, 其中 m 与 n 为任意整数或零.

顶点为 z_0、$z_0+2\omega$、$z_0+2\omega'$、$z_0+2\omega+2\omega'$ (z_0 为任意一点) 的平行四边形称为*周期平行四边形*.

若 $f(z)$ 为非常数椭圆函数，则它具有下列性质(刘维尔定理)：

1) 在周期平行四边形内，$f(z)$ 至少有一个极点；

2) 函数 $f(z)$ 关于周期平行四边形内所有极点的残数之和等于零；

3) 方程 $f(z)=a$ 在周期平行四边形内有相同个数的根，其中 a 为任意有限或无限复数(这个根的个数称为椭圆函数的阶)；

4) 函数 $f(z)$ 位于周期平行四边形内所有零点的和与所有极点的和之差等于该函数的某个周期，即

$$\sum \alpha_k - \sum \beta_k = 2\mu\omega + 2\nu\omega' \quad (\mu \text{ 与 } \nu \text{ 为整数}).$$

维尔斯特拉斯 σ-函数为整函数

$$\sigma(z) = z\prod{}'\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)e^{\frac{z}{\Omega}+\frac{z^2}{2\Omega^2}}, \tag{6}$$

其中 $\Omega=2n\omega+2m\omega'$，而乘积取遍所有非零的 Ω. $\sigma(z)$ 为奇函数。

维尔斯特拉斯 ζ-函数为亚纯函数

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{1}{z}+\sum{}'\left(\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right), \tag{7}$$

其中求和取遍所有非零的 Ω. $\zeta(z)$ 为奇函数.

具有周期 2ω 与 $2\omega'$ 的维尔斯特拉斯函数 $\wp(z)$ (参见第 201 页)通过关系式 $\wp(z)=-\zeta'(z)$ 与 $\zeta(z)$ 相联系.

由于 $[\zeta(z+2\omega)-\zeta(z)]'=\wp(z)-\wp(z+2\omega)=0$,

因此 $$\zeta(z+2\omega)-\zeta(z)\equiv 2\eta,$$

类似地 $$\zeta(z+2\omega')-\zeta(z)\equiv 2\eta',$$

其中 η 与 η' 为常数. 利用函数 $\zeta(z)$ 为奇函数的事实，容易证明 $\eta=\zeta(\omega)$ 与 $\eta'=\zeta(\omega')$.

量 η、η'、ω 与 ω' 通过勒让德关系式

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{\pi i}{2}$$

相联系.

记 $$\eta=\eta_1,\ \eta'=\eta_3 \quad \text{及} \quad \eta+\eta'=\eta_2,$$

$$\omega=\omega_1,\ \omega'=\omega_3 \quad \text{及} \quad \omega+\omega'=\omega_2.$$

函数 $\sigma_k(z)$ 由关系式

$$\sigma_k(z)=-e^{\eta_k z}\frac{\sigma(z-\omega_k)}{\sigma(\omega_k)} \quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{8}$$

定义. 相应地有

$$\zeta_k(z)=\frac{\sigma_k'(z)}{\sigma_k(z)}. \tag{9}$$

函数 $\sigma_k(z)$ 通过下列公式与维尔斯特拉斯函数 $\wp(z)$ 及雅可比函数

$\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ 联系起来：

$$\sqrt{\wp(z)-e_k}=\frac{\sigma_k(z)}{\sigma(z)}, \tag{10}$$

$$\operatorname{sn} u=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)},$$

$$\operatorname{cn} u=\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)},\quad \operatorname{dn} u=\frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}, \tag{11}$$

其中 $u=z\sqrt{e_1-e_3}$ 而 $e_k=\wp(\omega_k)$（参见第201页）。

任何椭圆函数都可用 $\sigma(z)$ 与 $\zeta(z)$ 来表示。

若在周期平行四边形内，$f(z)$ 仅有简单极 b_k，相应的残数为 A_k $(k=1, 2, \cdots, n)$，则

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}A_k\zeta(z-b_k)+C. \tag{12}$$

若在周期平行四边形内，$f(z)$有零点 a_k 与极点 b_k（重点按重数计算个数；$k=1, 2, \cdots, n$），则

$$f(z)=C\,\frac{\sigma(z-a_1)\sigma(z-a_2)\cdots\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1^*)\sigma(z-b_2)\cdots\sigma(z-b_n)}, \tag{13}$$

其中 $b_1^*=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=2}^{n}b_k$.

下述函数称为雅可比 θ-函数：

$$\theta_1(v)=i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n-1)\pi iv}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\pi v, \tag{14}$$

$$\theta_2(v)=\theta_1\left(v+\frac{1}{2}\right),\quad \theta_3(v)=q^{\frac{1}{4}}e^{\pi iv}\theta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right), \tag{15}$$

$$\theta_4(v)=-iq^{\frac{1}{4}}e^{\pi iv}\theta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right),$$

其中 $q=e^{\pi i\tau}$, $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$.

θ-函数与 σ-函数由下列关系式相联系：

$$\sigma(z)=2\omega_1 e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\frac{\theta_1(v)}{\theta_1'(0)}, \tag{16}$$

$$\sigma_i(z)=e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\frac{\theta_{i+1}(v)}{\theta_{i+1}(0)}\quad (i=1, 2, 3), \tag{17}$$

其中 $z=2\omega_1 v$.

θ-函数的优点在于定义它们的级数收敛快，利用公式(16)可将表达式(13)写成如下形式

$$f(z)=C\frac{\theta_1\left(\frac{z-a_1}{2\omega}\right)\theta_1\left(\frac{z-a_2}{2\omega}\right)\cdots\theta_1\left(\frac{z-a_n}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-b_1^*}{2\omega}\right)\theta_1\left(\frac{z-b_2}{2\omega}\right)\cdots\theta_1\left(\frac{z-b_n}{2\omega}\right)}. \tag{18}$$

利用公式(11)、(16)与(17)，可用θ-函数表示雅可比函数 $\operatorname{sn} z, \operatorname{cn} z, \operatorname{dn} z$.

以后假设 ω 为实数，ω' 为纯虚数，即周期平行四边形为矩形.

1318. 证明函数 $f(u)=\frac{M}{2\pi}\zeta(u-\alpha)+Cu$ 为一个双周期流动的复势，它在周期平行四边形内有一个双重源$(\alpha; M)$ (M 为双重源的矩).

特别考虑下列情形：

1) $\alpha=0$ 而直线 $\operatorname{Im} u=\pm\operatorname{Im}\omega'$ 为流线；绘出流线与等势线，讨论由函数 $t=f(u)$ 实现的保形映射；

2) $f(u+2\omega)=f(u)$；绘出流线与等势线，讨论由 $t=f(u)$ 实现的保形映射.

1319. 证明借助于平面 u 与平面 ζ 的转换关系，由复势 $\zeta_k(u)$ $(k=1, 2, 3)$ 定义的流动能化为题 **1318** 中的流动(对于 $C=0$).

提示：应用公式(8)与(9).

1320. 证明借助于线性变换，由复势 $\frac{\theta_k'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_k\left(\frac{u}{2\omega}\right)}$ $(k=1, 2, 3, 4)$ 与 $Z(u)$ (参见题 **1260** 前的说明) 定义的流动能化为题 **1318**(2) 中的流动.

1321. 证明借助于线性变换，由复势 $E(u)$ (参见题 **1260**

前的说明)定义的流动能化为题 **1318**(1) 中的流动.

提示：首先证明关系式：

$$K^2=(e_1-e_3)\omega^2,\ \frac{E}{K}=\frac{e_1}{e_2-e_3}+\frac{\omega}{K^2}\eta.$$

1322. 求出在周期平行四边形内有两个双重源 $(\alpha;\ M)$, $(\beta;\ N)$ 的双周期流动的复势 $f(u)$.

求出函数 $f(u)$ 为椭圆函数而直线 $\operatorname{Im}u=\pm\operatorname{Im}\omega'$, $\operatorname{Re}u=\pm\omega$ 为流线与等势线(或者反之)的条件；绘出流线与等势线。

在题 **1323** 至 **1325** 中，讨论由已知的复势 $f(u)$ 定义的双周期流动.

1323. $\operatorname{sn}u$. **1324**. $\operatorname{cn}u$. **1325**. $\operatorname{dn}u$.

1326. 求出在周期平行四边形内有两个涡旋源 $(\alpha;\ Q,\ \Gamma)$, $(\beta;\ -Q,\ -\Gamma)$ 的双周期流动的复势 $f(u)$. 特别考虑 $\alpha=0$, $\alpha=\omega$, $\alpha=\omega+\omega'$ 与 $\beta=\omega'$ 的情形.

求出满足条件 $f(u+2\omega)=f(u)$ 的函数 $f(u)$ 的形式.

在题 **1327** 至 **1329** 中，讨论由已知复势 $f(u)$ 所定义的流动.

1327. 1) $\ln\operatorname{sn}u$; 2) $\ln\operatorname{cn}u$; 3) $\ln\operatorname{dn}u$.

1328. $\wp(u)$.

1329. $\ln\theta_k(v)$ $\left(v=\dfrac{u}{2\omega},\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4\right)$.

为了构造双连通区域 D 内的复势 $f(z)$，通常先将 D 保形映射到圆环 R: $\rho<|t|<1\left(\mu=\dfrac{1}{\rho}\text{ 为 }D\text{ 的模}\right)$；再借助于函数 $t=e^{\frac{\pi ui}{\omega}}$，把带有径向截口 $[\rho,\ 1]$ 的圆环 R 映射到 u-平面内顶点为 $0,\ 2\omega,\ 2\omega+\omega',\ \omega'$ 的矩形上，使得截口的两缘变为侧边，且 $\tau=\dfrac{\omega'}{\omega}=\dfrac{i}{\pi}\ln\dfrac{1}{\rho}$. 在矩形内流动的特征由解题 **1289** 时所用的方法来确定. 由于矩形的底边为流线，按照对称原理，流动可越过矩形的底边延拓出去(参见题 **1291**). 然后，

确定由此得到的、周期为 2ω、$2\omega'$ 的周期流动的复势 $\Phi(u)$；于是 $f(z)=\Phi[u(z)]$.

1330. 求出流动的复势：

1) 在圆环 R: $r_1<|z|<r_2$ 内，环绕着边界圆有环流 Γ;

2) 在任一有界双连通区域 D 内[1]，环绕着边界围道有环流 Γ;

3) 在两个相互外离的圆的外部，在边界圆上有环流 $\pm\Gamma$，又设 $V_\infty=0$;

4) 在包含无穷远点的双连通区域内，环绕着边界围道有环流 $\pm\Gamma$，又设 $V_\infty=0$.

1331. 构造一个圆环 R: $\rho<|z|<1$ 内的流动，它由双重源 $(a;\ p)$ $(\rho<a<1)$ 产生，并使无环流的边界围道流线化.

讨论映射 $t=f(z)$，并绘出流线.

提示：利用题 **1269**(1) 与 **1322** 的解答.

1332. 构造一个包含无穷远点的双连通区域 D 内的流动，它使在无穷远处速度为 $V_\infty=Ve^{i\alpha}$ 的无环流的边界围道流线化.

1333. 构造一个圆环 R: $\rho<|z|<1$ 内的流动，它由位于点 $z=1$ 处的双重源与四重源产生，并使无环流的边界圆流线化. 绘出流线并讨论映射 $t=f(z)$，特别考虑只有一个双重源的情形.

提示：将复势 $f(z)$ 写成下述形式

$$f(z)=\frac{c_{-2}}{(z-1)^2}+\frac{c_{-1}}{(z-1)}+c_0+c_1(z-1)+\cdots,$$

并确定 c_{-2} 与 c_{-1} 的容许值.

1) 这里及以后，假设将区域 D 映射到圆环上的函数为已知.

1334. 1) 在圆环 R: $\rho<|z|<1$ 内，构造一个流动，它由涡旋 $(a;\ \Gamma)$ $(\rho<a<1)$ 产生，并使具有环流 Γ_1（围绕圆 $|z|=1$）与环流 Γ_2（围绕圆 $|z|=\rho$）的边界圆流线化．是否可以任意指定 Γ, Γ_1, Γ_2? 特别考虑 $\Gamma_2=0$ 或 $\Gamma_2=-\Gamma_1$ 的情形．

讨论由下述函数实现的映射：在第一种情形中，$t=f(z)$, $\mathfrak{Z}=e^{\frac{2\pi i t}{\Gamma}}$；在第二种情形中，$t=f(z)$, $\mathfrak{Z}=e^{-\frac{4\pi i t}{\Gamma}}$ 且 $s=\sqrt{\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0}$ $(\mathfrak{Z}_0=-e^{\frac{4\pi\psi_0}{\Gamma}}$，其中 ψ_0 为流函数在临界点处的值）．并在 u-平面内构造流线与等势线；

2) 在含有无穷远点的双连通区域内，构造一个流动，它使有环流 Γ_1、Γ_2 的边界围道流线化，并具有速度 $V_\infty=Ve^{i\alpha}$.

§2. 在静电学上的应用

强度为 $\mathbf{E}=E_x+iE_y=Ee^{i\alpha}$ 的平面静电场用称为复势的解析函数 $w(z)=u+iv$ 来描述其特征；v 称为势函数（它总是单值!），u 称为力函数．曲线 $v=$常数称为等势线，曲线 $u=$常数称为力线．在此，

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad} v=-i\overline{w'(z)},\ E=|w'(z)|,\ \alpha=-\frac{\pi}{2}-\arg w'(z),$$

$$E_x=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\ E_y=-\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

在本节所有习题中，凡涉及由一条或几条边界围道所界的区域内的静电场时，假设势函数围绕每条简单围道都取常数（即每一条这种围道都是一导体）．

若 a 为 $w'(z)$ 的极点，且 w 在 a 的邻域内有下述展开式：

$$w(z)=\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{pi}{z-a}+2qi\ln\frac{1}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots,$$

则在点 a 处，项 $2qi\ln\dfrac{1}{z-a}$ 定义了一个电量 $\rho=2q$ 的平面点电荷，通常记为 $(a;\ 2q)$（在空间中，则为在点 a 处垂直于 z-平面的单位长度的直线导体，带电荷 q）；项 $\dfrac{pi}{z-a}$ 在点 a 处确定了一个矩为 p 的偶极子，记

为 $(a; p)$(p 为复数，其幅角确定了偶极子轴线的方向)；其余的项 $\frac{C_{-k}}{(z-a)^k}$ $(k=2, \cdots, n)$在点 a 处确定了 $2k$ 阶重极子。

类似地，若在无穷远处

$$w(z)=C_n z^n+\cdots+piz+2qi\ln z+C_0+\frac{C_{-1}}{z}+\cdots,$$

则项 $2qi\ln z$ 在无穷远点定义了一个电量为 $\rho=2q$ 的平面点电荷，项 piz 定义了矩为 p 的偶极子.

若函数 $w=u+iv$ 既看作为静电场 $E=-i\overline{w'(z)}$ 的复势，同时又看作为速度等于 $V=\overline{w'(z)}$ 的流体流动的复势，则有电与流体动力学之间的下述类比:

	流 体 的 流 动	静 电 场
u	势函数	力函数
$u=$常数	等势线	力线
v	流函数(可能多值)	势函数(总是单值)
$v=$常数	流线	等势线
v_2-v_1	流动率	位势差
$\oint du$	环流 $\Gamma=\oint V_s ds$	流量 $N=\oint E_n ds$
—	涡旋$(a; \Gamma)$	点电荷$(a; 2q)$　$q=\frac{\Gamma}{4\pi}$
—	源	—
—	矩为 p 的双重源	矩为 $\frac{p}{2\pi i}$ 的偶极子
—	具有已知涡旋与双重源的流线化	具有已知电荷、偶极子与等势边界线的场

在题 **1335** 至 **1342** 中，从已知的复势 $w(z)$ 出发，确定力函数与势函数、场强、奇点(以及无穷远点)的特征，并绘出力线族与等势线族(q 为实数). 试与题 **1272** 至 **1285** 的解相比较。

1335. $w=cz \quad (c=\alpha+i\beta)$.

1336. $w=2qi\ln\frac{1}{z}$.

1337. $w=2qi\ln\frac{z-a}{z-b}$.

1338. $w=2qi\ln(z^2-a^2)\quad(a>0)$.

1339. $w=\frac{pi}{z}\quad(p=|p|e^{i\alpha})$.

1340. $w=z\pm\frac{R^2}{z}$.

1341. $w=piz+2qi\ln\frac{1}{z}\quad(p>0,\ q>0)$.

1342. $w=piz+2i\sum_{k=1}^{n}q_k\ln\frac{1}{z-a_k}\quad(p>0,\ q_k>0,\ a_1<a_2<\cdots<a_n)$.

1343. 求出支配点电荷$(a;\ 2q)$与偶极子$(a;\ p)$变化的规律：

1) 在一个单叶保形映射下；

2) 在按对称原理越过等势线的直线段或圆弧延拓时.

1344. 证明点电荷$(a;\ 2q)$在任一单连通区域D内产生的静电场的复势由公式

$$w=2qi\ln\frac{1}{f(z,\ a)}+c$$

确定，其中$f(z,\ a)$为将区域D保形映射到单位圆上的函数，满足$f(a,\ a)=0$，而c为实常数.

确定势函数$v(z)$与区域D的格林函数之间的关系（参见题**1043**）.

在题**1345**至**1351**中，利用题**1344**的结果或对称原理，求已知点电荷在给定区域D中产生的静电场的复势.

1345. D：上半平面$\operatorname{Im}z>0$，电荷$(z_0;\ 2q)$.

1346. 1) D：圆$|z|<R$，电荷$(z_0;\ 2q)$；

2) D：圆的外部$|z|>R$，电荷$(z_0;\ 2q)$.

1347. D: 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外部; 电荷$(\infty;\ 2q)$.

1348. D: 直线段 $|x|<R,\ y=0$ 的外部, 电荷$(\infty;\ 2q)$.

1349. D: 正方形$|x|<d,\ |y|<d$ 的外部, 电荷$(\infty; 2q)$.

1350. D: 矩形 $|x|<a,\ |y|<b$, 电荷$(0;\ 2q)$.

1351. D: 矩形 $0<x<2a,\ 0<y<2b$, 电荷$(z_0;\ 2q)$.

在题 **1352** 至 **1356** 中, 构造由给定的偶极子产生的静电场.

1352. 圆 $|z|<R$, 偶极子$(a;\ p)$.

1353. 圆的外部 $|z|>R$, 偶极子$(a;\ p)$.

1354. 线段 $|x|<R,\ y=0$ 的外部, 偶极子$(\infty;\ p)$.

1355. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外部, 偶极子$(\infty;\ p)$.

1356. 矩形 $|x|<a,\ |y|<b$, 偶极子$(0;\ p)$ $(pi=\rho e^{i\alpha})$.

1357. 证明偶极子$(a;\ p)$在任意单连通区域 D 内产生的静电场由复势 $w=f(z)$ 确定, 其中函数 $f(z)$ 将区域 D 映射到一条水平线段的外部, 使得 $f(a)=\infty$, 且 $f(z)$ 在点 a 处的主要部分当 $a\neq\infty$ 时等于 $\frac{pi}{z-a}$, 而当 $a=\infty$ 时等于 piz.

求 $f(z)$, 若已知函数 $t(z)$将区域 D 映射到:

1) 单位圆内部(当 $a\neq\infty$ 时), 其中 $t(a)=0,\ t'(a)>0$;

2) 圆的外部 $|t|>R$ (当 $a=\infty$ 时), 其中 $t(\infty)=\infty$, $t'(\infty)=1$.

1358. 在单连通区域D内, 构造一个由点电荷$\{(a_k;\ 2q_k)\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$与偶极子$(a;\ p)$产生的静电场.

设 $g(\zeta, z)$为区域 D 的格林函数(参见题 **1042** 前面的说明), D 的边界Γ 由逐段光滑的简单围道 $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \cdots,\ \Gamma_n$ 组成; 设 n 为关于 Γ 的内法线, Γ 关于 D 取正向. 若函数 $u(z)$ 在区域 D 内调和, 在 Γ 上连续, 则由格林函数可得

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}ds$$

或 $$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}-\ln\frac{1}{|\zeta-z|}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial n}\right]ds.$$

若区域 D 包含无穷远点，且函数 $u(z)$ 在该点调和，则上述公式的右端必须加上 $u(\infty)$. 这时，在无穷远点邻域内，格林函数 $g(z, \infty)$ 可表示成下述形式

$$g(z, \infty)=\ln|z|+\gamma+O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

量

$$\gamma=\lim_{z\to\infty}[g(z, \infty)-\ln|z|]$$

称为一闭集的洛彭(Robin)常数，此闭集为 z-平面内 D 的余集. 量 $e^{-\gamma}$ 称为该集的容量.

1359. 证明下列论断(n 为内法线)：

1) $g(z, a)=\ln\frac{1}{|z-a|}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds,$ 若 $a\neq\infty$;

2) $g(z, \infty)=\gamma-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds,$ 若 $z\in D$, 且区域 D 包含无穷远点;

3) $\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds=\gamma,$ 若 $z\overline{\in}D$, 且区域 D 包含无穷远点;

4) $\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n}ds=1,$ 若 $a\neq\infty$ 或 $a=\infty\in D$.

提示：在第(1)小题中，利用格林函数的对称性 $g(\zeta, z)=g(z, \zeta)$ 与调和函数关于其边界值的积分表示式. 在第(2)小题中，利用 D 内调和函数 $\ln|\zeta-z|+g(\zeta, z)-g(\zeta, \infty)$ 的积分表示式，极限过程与对称性 $g(\infty, z)=g(z, \infty)$. 在第(3)小题中同样进行，但从函数 $\ln|\zeta-z|-g(\zeta, \infty)$ 出发.

函数 $$v_0(z)=2q\ln\frac{1}{|z-a|}$$
称为点电荷$(a;\ 2q)$的对数位势．在扩充的z-平面上，$v_0(z)$表示两个点电荷$(a;\ 2q)$与$(\infty;\ -2q)$的对数位势．

设围道Γ满足题**1359**前的说明中指出的条件，$\rho(\zeta)$与$\nu(\zeta)$在Γ上为实值连续函数．

积分 $$v(z)=\int_\Gamma\rho(\zeta)\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds$$
称为密度$\rho(\zeta)$的单层对数位势(在空间中，此积分与以Γ为基线的带电柱面相联系，柱面的表面电荷密度为$\frac{\rho}{2}$，即在ds上方的面积元上带电荷$\frac{\rho}{2}ds^2$)．

函数$v(z)$在z-平面的有限部分连续，在Γ外处处调和，但点$z=\infty$除外．在$z=\infty$处，$v(z)$有对数奇点：
$$v(z)=-2q\ln|z|+O\left(\frac{1}{|z|}\right),\ 2q=\int_\Gamma\rho(\zeta)ds;$$
这表明电荷$(\infty;\ -2q)$对应于位势$v(z)$．

积分 $$v_1(z)=\int_\Gamma\nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds$$
称为密度$\nu(\zeta)$的双层对数位势(分布在Γ上的偶极子，其轴的方向为Γ的法线n的约定方向，若Γ界一区域，则方向为向内；$\nu(\zeta)$为偶极子矩的分布密度)．若$\theta(\zeta,\ z)$为n与从ζ到z的矢量之间的夹角，$d\varphi(\zeta,\ z)$为弧元ds在z处所张的角，则
$$v_1(z)=\int_\Gamma\nu(\zeta)\frac{\cos\theta(\zeta,\ z)}{|\zeta-z|}ds=\int_\Gamma\nu(\zeta)d\varphi(\zeta,\ z).$$

特别，对于闭围道Γ与$\nu(\zeta)\equiv1$，有
$$\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds=\begin{cases}2\pi,\ \text{若 } z \text{ 在 } \Gamma \text{ 的内部},\\ \pi,\ \text{若 } z \text{ 在 } \Gamma \text{ 上},\\ 0,\ \text{若 } z \text{ 在 } \Gamma \text{ 的外部}\end{cases}$$
(亦可参见题**1041**)．

区域D的格林函数$g(z,\ a)$可看作为区域D的边界Γ接地时，点电荷$(a;1)$产生的静电场的位势．题**1359**(1)表明，在$a\neq\infty$的情形中，

Γ 的接地等价于在 Γ 上置一线性密度为 $\rho(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g(\zeta, a)}{\partial n}$ 的电荷. 按题 **1359**(4), 这里的电荷等于 -1. 在 $a=\infty$ 的情形中, 点电荷 $(\infty; 1)$ 与 Γ 的接地一起等价于在 Γ 上置一总电量为 -1 而线性密度为 $\rho(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}$ 的电荷, 或等价于一个有常数位势 γ 的附加场[参见题 **1359**(2)]. 在这些情形中, 称在 Γ 上的已知分布由电荷 $(a; 1)$ 感生.

在题 **1360** 至 **1363** 中, 求由电荷 $(a; 1)$ 感生出的围道 Γ 的线性密度 $\rho(\zeta, a)$, 以及相应的由围道 Γ 所界的区域的这个单层位势 $v(z, a)$.

1360. Γ 为实轴, $\operatorname{Im} a>0$.

1361. 1) Γ 为圆 $|z|=R$, $|a|<R$;

2) Γ 为圆 $|z|=R$, $|a|>R$ (特别考虑 $a=\infty$ 的情形).

1362. Γ 为实轴上的线段 $|x|\leqslant R$, $y=0$, $a=\infty$.

1363. Γ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a=\infty$.

1364. 假设区域 D 包含无穷远点, D 的格林函数已知. 试解洛彭问题: 求区域 D 的边界 Γ 上由单位电荷产生的分布密度 $\rho(\zeta)$, 此单位电荷在 D 外与 Γ 上建立了常数位势.

提示: 参见题 **1359**(3) 与(4).

在题 **1365** 至 **1367** 中, 对已知区域 D 解洛彭问题.

1365. D 为圆的外部 $|z|>R$.

1366. D 为线段 $|x|\leqslant R$, $y=0$ 的外部.

1367. D 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的外部.

在题 **1368** 至 **1371** 中, 求已知闭集的容量(参见题 **1359** 前的说明).

1368. $|z|\leqslant R$.

1369. $|x|\leqslant R$, $y=0$.

1370. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

1371. $|z^2-a^2|\leqslant a^2 \quad (a>0)$.

1372. 已知简单闭围道 Γ 上的实函数 $\varphi(\zeta)$ 沿此围道连续且可微.

证明柯西型积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$ 的实部为密度 $\varphi(\zeta)$ 的双层对数位势，其虚部为密度 $-\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{ds}$ 的单层对数位势.

1373. 证明上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内的有界调和函数 $v(z)$ 可表示为双层对数位势的形式：

$$v(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|t-z|}dt.$$

若 $v(z)$ 在∞处正则，则它还可表示为单层对数位势的形式：

$$v(z)=v(\infty)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial v(t)}{\partial n}\ln\frac{1}{|t-z|}dt.$$

1374. 在上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 内，求一静电场的复势，若其位势 $v(z)$ 在实轴上取已知的逐段连续的值. 借助于实轴上相应线段的调和测度(参见题 **1061** 前的说明)，写出势函数：

1) 若在区间 $(-\infty, a)$ 上取 φ，在区间 (a, ∞) 上取 0;

2) 若在区间 (a, b) 上取 φ，在区间 $(-\infty, a)$，(b, ∞) 上取 0;

3) 在区间 $(-\infty, a_1)$，(a_1, a_2)，…，(a_{n-1}, a_n) 上分别取 φ_1，φ_2，…，φ_n，而在区间 (a_n, ∞) 上取 0 (其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$)；

4) 在区间 (a_n, ∞) 上取 φ_0，在区间 $(-\infty, a_1)$，(a_1, a_2)，…，(a_{n-1}, a_n) 上分别取 φ_1，φ_2，…，φ_n.

提示：在第(1)小题中，应用到带形上的保形映射；在其余小题中，应用迭加法或关于半平面的许瓦尔兹公式(参见题**1051**至**1060**)。

1375．求双连通区域内的复势 $w(z)$ 与位势 $v(z)$，此区域边界围道上的位势 v_1 与 v_2 之差 $d=v_2-v_1$ 为已知：

1) 在圆环 $r_1<|z|<r_2$ 内；

2) 在任意的双连通区域 D 内。

1376．证明：若 D 为任意的双连通区域，且在界此区域的每一条围道上，势函数取常数值(v_1 与 v_2)，则

$$w(z)=\frac{i(v_2-v_1)}{\ln\mu}\ln t(z)+c+iv_1,$$

$$v(z)=\frac{v_2-v_1}{\ln\mu}\ln|t(z)|+v_1,$$

其中 $t(z)$ 将 D 保形映射到圆环 $1<|t|<\mu$ 上(μ 为 D 的模)，且将位势为 v_1 的边界围道变为圆 $|t|=1$ (c 为实数)。

1377．求已知的双连通区域内的复势(边界围道上的位势 v_1 与 v_2 为常数)：

1) 圆 $|z\pm a|=R$ 的外部($a>R$; v_1 为左边圆的位势)；

2) 圆 $|z|=r_1$ (位势 v_1) 与 $|z-a|=r_2(a>r_1+r_2)$ 的外部；

3) 两个非同心的圆 $|z|=R$(位势 v_1) 与 $|z-a|=r(0<a<R-r)$之间的环状区域；

4) 沿着联接焦点的直线段截开的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内部(椭圆上的位势为 v_1)；

5) 直线段 $1<|x|<\frac{1}{k}$, $y=0$ 的外部($0<k<1$)，左边线段上的位势为 v_1；

6) 线段 $|x|<1$, $y=\pm\pi$ 的外部, 上方线段上的位势为 v_1.

1378. 设 D 为多连通区域, 其边界 Γ 由 n 条逐段光滑的围道 $\Gamma_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 组成, 又设 $\omega_k(z)$ 为 Γ_k 的调和测度(题 **1061** 前的说明). 若 D 有界, 则假定 Γ_n 为其外围道. 证明下述命题:

1) 若区域 D 有界, 则

$$\omega_k(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial\omega_k(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds$$

$$(k=1, 2, \cdots, n-1),$$

$$\omega_n(z)=1-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial\omega_n(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds.$$

若区域 D 包含无穷远点, 则

$$\omega_k(z)=\omega_k(\infty)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial\omega_k(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds$$

$$(k=1, 2, \cdots, n);$$

2) 对于不属于区域 D 的点 z, 在由 Γ_k (或 Γ_n)所界的 D 的余区域内第(1)小题的等式右端取值 1, 在由 $\Gamma_i(i\neq k)$ 所界的 D 的余区域内则取值 0.

注. 按第(1)小题, 函数 $\omega_k(z)$ 在 D 内表示的位势是由 Γ 上的层密度为 $\rho_k(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\omega_k(\zeta)}{\partial n}$ 的感生平板电荷所引起的. 区域 D 有界时, 量 $\omega_1(z), \cdots, \omega_{n-1}(z)$ 与上述 Γ 上的感生层的对数位势完全一致.

由位势 $\omega_k(z)$ 在围道 $\Gamma_i(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 上感生出的层 p_{ik} 的电量, 即

$$p_{ik}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\omega_k(\zeta)}{\partial n}ds=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\omega_i\frac{\partial\omega_k(\zeta)}{\partial n}ds$$

称为边界围道的相互容量(数 p_{ik} 的某些性质在题 **1075** 至 **1078** 中已考虑过).

1379. 对下列区域, 求调和测度 $\omega_k(z)$ 以及上题注中定义的量 $\rho_k(\zeta)$ 与 p_{ik}:

1) 圆环 $1<|z|<\mu$;

2) 任一双连通区域 D, 假设将此区域映射到圆环上的函数为已知.

1380. 设 D 为题 **1378** 中的区域, $v(z)$ 为一静电场的有界位势, 它在边界围道(导体) Γ_k 上取常数值 $\alpha_k(k=1, 2, \cdots, n)$。证明下列等式成立:

1) $v(z)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\omega_k(z)$;

2) 若区域 D 有界而 Γ_n 为外围道, 则

$$v(z)=\alpha_n-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds;$$

但若 D 包含无穷远点, 则

$$v(z)=v(\infty)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n}\ln\frac{1}{|\zeta-z|}ds.$$

证明上述公式的右端在由 Γ_k 所界的 D 的余区域内等于 α_k $(k=1, 2, \cdots, n)$;

3) Γ_i 上感生层电量等于

$$2q_i=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_i}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n}ds=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}\alpha_k,$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}q_i=0$;

提示: 参见题 **1075**(1).

4) $\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D (\operatorname{grad} v)^2\, dx\, dy = \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik}\alpha_i\alpha_k$;

提示：参见题**1076**.

5) 若$w(z)$为场的复势，则感生层密度为

$$\rho(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial v(\zeta)}{\partial n} = \pm\frac{1}{2\pi}|w'(\zeta)|.$$

设D为任一多连通区域，边界Γ由约当围道Γ_1, Γ_2, …, Γ_n组成. 存在着区域D到下列标准区域的保形映射，满足给定的唯一性条件(a与b为区域D的任意点，A为任意复数)：

1) 带有平行截口的平面. 映射函数$f(z)$由极点b与下述展开式的系数A唯一确定

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{A}{z-b} + C_1(z-b) + \cdots & (b \neq \infty), \\ Az + \dfrac{C_{-1}}{z} + \cdots & (b = \infty); \end{cases}$$

2) 带有径向截口的平面(这个术语指沿原点发出的射线截开的平面)，或沿以坐标原点为圆心的同心圆弧截开的平面. 函数$f(z)$由零点a、极点b与下述展开式的系数A确定

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{A}{z-b} + C_1(z-b) + \cdots & (b \neq \infty), \\ Az + \dfrac{C_{-1}}{z} + \cdots & (b = \infty); \end{cases}$$

3) 带有径向截口的圆或沿同心圆弧截开的圆(圆心在坐标原点). 函数$f(z)$由下述条件确定：$f(a)=0$, $f'(a)=1$, 以及指定围道Γ_k变成一个圆；

4) 带有径向截口的圆环或沿同心圆弧截开的圆环(圆心在原点). 指定变为内边界圆与外边界圆的围道之后，映射即可确定，至多相差一个相似变换与一个旋转变换.

1381. 假设将区域D保形映射到带有平行截口的平面的函数为已知，边界围道Γ_k的调和测度$\omega_k(z)$ ($k=1, 2, \cdots,$

n)也已知[1]. 试求出区域 D 的边界 Γ 接地时, 偶极子 $(a;\ p)$ 在区域 D 内建立的静电场的位势.

1382. 假设区域 D 的格林函数为已知, 又设点电荷 $(a;\ 2q)$ $(a\in D)$ 在边界围道 Γ_k 上给出位势 $\alpha_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 试求出此点电荷在区域 D 内产生的静电场的位势. 若区域 D 为单连通, 则得到题 **1344** 中的公式.

1383. 确定由复势 $w=f(z)$ 在多连通区域 D 内定义的静电场的特征, 其中函数 $f(z)$ 将此区域映射到带有平行于实轴的截口的平面上.

1384. 确定由复势 $w=2qi\ln\dfrac{1}{f(z)}$ 在区域 D 内定义的静电场的特征, 若函数 $f(z)$ 将区域 D 映射到:

1) 沿圆心在坐标原点的同心圆弧截开的平面;

2) 沿圆心在坐标原点的同心圆弧截开的圆;

3) 沿圆心在原点的同心圆弧截开的圆环.

求上述各情形中场强矢量通过边界围道的流量.

1385. 构造下列静电场的等势线与力线图:

1) 由∞处的偶极子在无限双连通区域内建立的静电场;

2) 由点电荷在有界双连通区域内建立的静电场.

两种情形中边界围道上的位势都为已知.

1386. 1) 利用多连通区域 D 的边界围道的调和测度 $\omega_k(z)$, 表示在 Γ_k 上电量为 $2q_k\left(\sum\limits_{k=1}^{n}q_k=0\right)$的电荷分布在 D 内建立的静电场的位势 $v(z)$(在每一条围道 Γ_k 上, 位势都为常数);

提示: 利用题 **1380** 的结果.

---

1) 两者都用格林函数定义.

2) 若 $\sum_{k=1}^{n} q_k = q \neq 0$，且有一点电荷 $(a;\ -2q)$，试表示位势 $v(z)$.

提示：位势 $v(z)+2qg(z,\ a)$ 的确定可归结为情形(1).

1387．求出圆环 $r_1<|z|<r_2$ 内的位势 $v(z)$，若已知在圆环的围道上，电荷分布为 $2q_1$ 与 $2q_2$，其中当 $q_1+q_2=q\neq 0$ 时还存在一个点电荷 $(a;\ -2q)$.

提示：按题 **1334** 的解，选择适当的环流，可确定圆环的格林函数．这些环流也适用于确定与格林函数相联系的边界围道上的感生电荷．

§3．在平面热传导问题中的应用

场内温度的平面平稳分布问题由解析函数 $w(z)=u+iv$（其中 u 为温度）刻划其特征，称 $w(z)$ 为*热场的复势*．矢量 $\mathbf{Q}=-k\,\mathrm{grad}\,u=-k\overline{w'(z)}$（$k$ 为热传导率，以后假定为常数）称为*热流量矢量*．通过围道 C 的热流量为

$$\int_C Q_n ds=-k\int_C \frac{\partial u}{\partial n}ds=-k\int_C dv$$

（n 为取正向的围道 C 的外法线）．由于 u 为单值函数，关于闭围道 C 的热流量还等于 $ik\int_C w'(z)dz$．若在点 a 的附近有

$$w(z)=\left[\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\cdots\right]+\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{1}{z-a},$$

则项 $\frac{q}{2\pi k}\ln\frac{1}{z-a}$ 在点 a 定义了一个强度为 q 的*源* $(a;q)$，而项 $\frac{C_{-1}}{z-a}$ 在点 a 定义了一个*双重源*．

关于热场、流体的流动与静电场有下述的类比：

	热　场	流体的流动	静　电　场
复势	$w(z)=u+iv$	$w(z)=u+iv$	$iw(z)=-v+iu$
场矢量	$\mathbf{Q}=-k\operatorname{grad}u$ $=-k\overline{w'(z)}$	$V=\operatorname{grad}u=\overline{w'(z)}$	$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}u$ $=-\overline{w'(z)}$
u	温度	势函数	势函数
$u=$常数	等温线	等势线	等势线
v	流函数	流函数	$-v$为力函数
$v=$常数	流线	流线	力线
	源$(a;q)$	源$\left(a;-\frac{q}{k}\right)$	点电荷$\left(a;\frac{q}{2\pi k}\right)$
	双重源	双重源	偶极子
	带有已知源、双重源与等温边界围道的热场	由复势$iw(z)$确定、带有已知的使边界围道流线化的涡旋与双重源的流动	带有已知电荷、偶极子与等势边界围道的电场

1388. 阐述热源越过区域边界的直线段或圆弧延拓的对称原理. 试求出任一单连通区域 D 内的温度分布，若此区域内有一个源$(a;q)$，而边界上的温度取常数值 C.

在题 **1389** 至 **1392** 中，从已知的源出发，求已知区域内的温度分布，假定区域边界上的温度为常数.

1389. 上半平面 $\operatorname{Im}z>0$; 源$(a;\ q)$.

1390. 圆 $|z|<R$; 源$(a;\ q)$.

1391. 半带形 $|x|<a,\ y>0$; 源$(ih;\ q)\ (h>0)$.

1392. 矩形 $|x|<a,\ |y|<b$; 源$(0;\ q)$.

1393. 1) 用热传导理论解释平面区域 D 的格林函数 $g(z,\ a)$;

2) 假设区域 D 的格林函数为已知，试求此区域内的温度分布，若已知 D 内有源$(a;\ q)$，而边界围道 $\Gamma_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上的温度取常数值 u_k. 借助于边界围道的调和测度 $\omega_k(z)$，写

出答案.

1394. 求出圆环 $r_1<|z|<r_2$ 内的温度分布,若已知圆环内有源 $(a;\ q)$ 而边界圆上的温度取常数值: 在圆 $|z|=r_1$ 上为 u_1, 在圆 $|z|=r_2$ 上为 u_2.

提示: 参见类似的题 **1334** 与 **1387**.

第十一章

解析函数的推广

在这一章里，我们使用第一章§5中关于形式柯西导数的记法．微分相应地表示为：

$$d\bar{z}=dx-idy=\overline{dz},\ d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}.$$

§1. 拟保角映射

椭圆的特征是指它半轴的比率 $p(p\geqslant 1)$ 以及当 $p\neq 1$ 时它的长轴与 x 轴的交角 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$.

1395. 证明中心在原点，短半轴为 h，特征为 p 与 θ 的椭圆，其方程可写成形式

$$\gamma x^2-2\beta xy+\alpha y^2=ph^2,$$

其中 $\alpha=p\cos^2\theta+\frac{1}{p}\sin^2\theta$, $\beta=\left(p-\frac{1}{p}\right)\cos\theta\sin\theta$, $\gamma=p\sin^2\theta+\frac{1}{p}\cos^2\theta$，或写成形式

$$|z+\mu\bar{z}|=\lambda,$$

其中 $\mu=-\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}$, $\lambda=\frac{2ph}{p+1}$.

题**1395**中的量 α, β, γ 也称为椭圆的特征，它们由关系式 $\alpha\gamma-\beta^2=1$ 相联系．量 μ 称为椭圆的复特征．注意：$|\mu|<1$．在圆的情形中，$\mu=0$, $p=1$, $\alpha=\gamma=1$, $\beta=0$.

1396. 证明椭圆的不同特征之间的下列关系式：

1) $p=\frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}=\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2+\beta^2}$, $p+\frac{1}{p}=\alpha+\beta$;

2) $2\theta=\arg\mu+\pi \quad (-\pi\leqslant\arg\mu<\pi)$;

3) $\begin{cases} \operatorname{tg} 2\theta=\frac{2\beta}{\alpha-\gamma}, \\ \operatorname{tg}\theta=\frac{\gamma-\alpha+\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+4\beta^2}}{2\beta}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (1-|\mu|^2)\alpha=1+2|\mu|\cos 2\theta+|\mu|^2, \\ (1-|\mu|^2)\beta=2|\mu|\sin 2\theta, \\ (1-|\mu|^2)\gamma=1-2|\mu|\cos 2\theta+|\mu|^2; \end{cases}$

5) $\frac{1}{p}\leqslant\alpha,\ \gamma\leqslant p;\quad |\beta|\leqslant\frac{1}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)$;

证明两个椭圆的特征之间的下列关系式:

6) $|p_2-p_1|\leqslant|\alpha_2-\alpha_1|+|\beta_2-\beta_1|+|\gamma_2-\gamma_1|$;

7) $\begin{cases} |\alpha_2-\alpha_1|\leqslant|p_2-p_1| \\ \qquad +\sqrt{\left(p_2-\frac{1}{p_2}\right)\left(p_1-\frac{1}{p_1}\right)}\sin|\theta_2-\theta_1|, \\ |\beta_2-\beta_1|\leqslant|p_2-p_1|\left(1+\frac{1}{p_2p_1}\right) \\ \qquad +2\sqrt{\left(p_2-\frac{1}{p_2}\right)\left(p_1-\frac{1}{p_1}\right)}\sin|\theta_2-\theta_1|, \\ |\gamma_2-\gamma_1|\leqslant|p_2-p_1| \\ \qquad +\sqrt{\left(p_2-\frac{1}{p_2}\right)\left(p_1-\frac{1}{p_1}\right)}\sin|\theta_2-\theta_1|; \end{cases}$

8) $|\mu_2-\mu_1|\leqslant\big||\mu_2|-|\mu_1|\big|+2\sqrt{|\mu_2\mu_1|}\sin|\theta_2-\theta_1|$;

$\left|\frac{\mu_2-\mu_1}{1-\bar{\mu}_1\mu_2}\right|\leqslant\frac{|p_2-p_1|}{p_2+p_1}+\sqrt{(p_2-1)(p_1-1)}\sin|\theta_2-\theta_1|$.

提示：欲证明不等式(6)，(7)，(8)，利用下列不等式:

$$|r_2\cos\lambda_2-r_1\cos\lambda_1|\leqslant|r_2e^{i\lambda_2}-r_1e^{i\lambda_1}|$$
$$\leqslant|r_2-r_1|+2\sqrt{r_2r_1}\sin|\lambda_2-\lambda_1|,$$
$$||a_2+ib_2|-|a_1+ib_1||\leqslant|a_2-a_1|+|b_2-b_1|.$$

若 $$u=a_1x+b_1y+C_1,\quad v=a_2x+b_2y+C_2, \tag{1}$$
则映射(变换) $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 称为仿射的. 该映射的雅可比式为 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$. 若 $\Delta=0$, 则映射为退化的.

1397. 证明仿射映射的下列性质:

1) 仿射映射可表示为形式

$$w=Az+B\bar{z}+C.$$

利用变换(1)的系数表示系数 A, B 与 C, 并证明 $\Delta=|A|^2-|B|^2$;

2) 若 $\Delta\neq0$, 则存在逆映射 $z=A_1w+B_1\bar{w}+C_1$.

利用变换(1)的系数表示其系数, 并证明 $\Delta_1=|A_1|^2-|B_1|^2=\frac{1}{\Delta}$;

3) 若 $\Delta\neq0$, 则映射保持直线的平行性, 并且将椭圆变为椭圆. 若 $\Delta>0$, 则复特征为 $\mu=\frac{B}{A}$ 的椭圆变为圆; 若 $\Delta<0$, 则 $\mu=\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$ 的椭圆变为圆.

仅在正交变换 $w=Az+C$ 或 $w=B\bar{z}+C$ 时, 圆才变为圆;

4) 若 $\Delta>0$, 则映射保持其回转方向; 若 $\Delta<0$, 则变向;

5) 若 $\Delta=0$, 但非所有系数 a_1, b_1, a_2, b_2 都等于零, 则映射可表示为形式

$$w=2|A|e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}|z|\cos\left(\varphi+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+C, \tag{2}$$

其中 $\varphi=\arg z$, $\alpha=\arg A$, $\beta=\arg B$. 试叙述这个映射的几何意义.

仿射映射的特征是指被变为圆的椭圆的特征 (p, θ), (α, β, γ) 与复特征 μ [参见题 **1397**(3)].

仿射映射

$$du = u_x dx + u_y dy, \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

或者

$$dw = w_z dz + w_{\bar{z}} d\bar{z}$$

的特征 $p(z)$, $\theta(z)$; $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ 与复特征 $\mu(z)$ 称为有雅可比式 $J>0$ 的连续可微映射 $w=u(x, y)+iv(x, y)$ 的特征.

在这种变换下,一个无穷小圆

$$du^2 + dv^2 = d\rho^2,$$

对应于一个无穷小椭圆

$$\gamma\, dx^2 - 2\beta dx\, dy + \alpha\, dy^2 = p\, dh^2$$

(dh 为短半轴),或表示为:

$$|dz + \mu d\bar{z}| = \frac{2p}{p+1} dh.$$

1398. 证明对非退化的仿射映射,下述关系式成立:

$$\frac{\gamma}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{-\beta}{a_1 b_1 + a_2 b_2} = \frac{\alpha}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{1}{|\Delta|}.$$

1399. 证明对于有正的雅可比式的连续可微映射的特征,下列关系式成立:

1) $\dfrac{\gamma}{u_x^2 + v_x^2} = \dfrac{-\beta}{u_x u_y + v_x v_y} = \dfrac{\alpha}{u_y^2 + v_y^2} = \dfrac{p\,dh^2}{d\rho^2} = \dfrac{1}{J}$;

2) $u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 = J\left(p + \dfrac{1}{p}\right)$;

3) $p = \dfrac{\max\left|\dfrac{dw}{dz}\right|}{\min\left|\dfrac{dw}{dz}\right|} = \dfrac{|w_z| + |w_{\bar{z}}|}{\big||w_z| - |w_{\bar{z}}|\big|}$;

4) $\mu = \dfrac{w_{\bar{z}}}{w_z} = -\dfrac{p-1}{p+1} e^{2i\theta}$;

5) $\sqrt{\dfrac{J}{p}} \leqslant \left|\dfrac{dw}{dz}\right| \leqslant \sqrt{pJ}$.

有正雅可比式的单叶连续可微映射 $w=u+iv$ 称为有特征 $p(z)$, $\theta(z)$ 或 $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ 或 $\mu(z)$ 的拟保角映射，若它将具有这些特征的无穷小椭圆变为无穷小圆.

1400. 证明拟保角映射满足方程组

$$\alpha u_x+\beta u_y=v_y,\ \ \beta u_x+\gamma u_y=-v_x,$$

或者，以复的记法，满足方程

$$w_{\bar{z}}=\mu w_z.$$

提示：方程 $|dw|=$常数对应于方程 $|dz+\mu d\bar{z}|=$常数.

注. 上面的方程称为伯尔特拉米 (Beltrami) 方程，而特征 μ 称为伯尔特拉米系数.

1401. 证明将无穷小圆变成特征为 $p(z)$, $\theta(z)$ 或 $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ 或 $\mu(z)$ 的无穷小椭圆、且有正雅可比式的单叶连续可微映射 $w=u+iv$, 满足方程组

$$u_x+\beta u_y=\alpha v_y,\ \ -\beta u_x+u_y=-\alpha v_x,$$

或者，以复的记法，满足方程

$$w_{\bar{z}}=\nu\overline{w_{\bar{z}}},\ \ \nu=-\mu=\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}.$$

注. 若这个方程组写成形式

$$pu_x+qu_y=v_y,\ \ -qu_x+pu_y=-v_x$$

$\left(\text{其中 } p=\dfrac{1}{\alpha},\ q=\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, 则使用波罗查(Polozhy)的术语，得到 (p, q)-解析函数.

1402. 证明伯尔特拉米方程 $w_{\bar{z}}=\mu w_z$ 关于函数 w 的解析变换为不变，而方程 $w_{\bar{z}}=\nu(z)\overline{w_{\bar{z}}}$ 关于变量 z 的保形变换为不变.

1403. 设雅可比式为正的单叶连续可微映射 $w=u+iv$ 将特征为 p, θ 的无穷小椭圆变成特征为 p_1, θ_1 的无穷小椭圆(这种映射称为具有特征对 p, θ; p_1, θ_1 或 α, β, γ; α_1, β_1,

γ_1 的拟保角映射). 证明映射 $w=u+iv$ 满足方程组

$$\alpha u_x+(\beta+\beta_1)u_y=\alpha v_y,\quad (\beta-\beta_1)u_x+\gamma u_y=-\alpha_1 v_x,$$

该方程组也能写成形式

$$w_{\bar{z}}=q_1 w_z+q_2\overline{w_{\bar{z}}},$$

其中

$$q_1=-\frac{p_1(p^2-1)}{(pp_1+1)(p+p_1)}e^{2i\theta},$$

$$q_2=\frac{p(p_1^2-1)}{(pp_1+1)(p+p_1)}e^{2i\theta_1}.$$

提示: 方程 $|dz+\mu d\bar{z}|$=常数对应方程 $|dw+\mu_1 d\bar{w}|$=常数, 而 μ, μ_1 为已知.

1404. 设 $\zeta=f(z)$ 是特征为 μ_f 的拟保角映射:

$$f_{\bar{z}}=\mu_f f_z,$$

而 $w=g(\zeta)$ 是特征为 μ_g 的拟保角映射:

$$g_{\bar{\zeta}}=\mu_g g_\zeta.$$

证明它们的复合 $F(z)=g[f(z)]=g\circ f$ 是特征为

$$\mu_F=\frac{\mu_f+\mu_g\dfrac{\bar{f}_{\bar{z}}}{f_z}}{1+\mu_g\bar{\mu}_f\dfrac{\bar{f}_{\bar{z}}}{f_z}}$$

的拟保角映射.

并证明关系式

$$\mu_g=\frac{f_z}{\bar{f}_{\bar{z}}}\,\frac{\mu_F-\mu_f}{1-\bar{\mu}_f\mu_F},$$

$$\mu_{f^{-1}(z)}=-\mu_{f(z)}\frac{f_z}{\bar{f}_{\bar{z}}},$$

$$\mu_F=\frac{\bar{f}_{\bar{z}}}{f_z}\,\frac{\mu_g-\mu_{f^{-1}}}{1-\bar{\mu}_{f^{-1}}\mu_g}.$$

注. 若假设量 μ_F 已知, 则量

$$\sup \ln \frac{1+|\mu_g|}{1-|\mu_g|}$$

可以取作为 μ_f 与 μ_F 之间的距离. 类似地, μ_g 与 $\mu_{f^{-1}}$ 之间的距离由 μ_F 确定.

1405. 设 $p_{w/z}$ 与 $\theta_{w/z}$ 为拟保角映射 $w=f(z)$ 的特征 p 与 θ. 证明

$$p_{z/w}=p_{w/z},$$

$$\theta_{z/w}=\theta_{w/z}\pm\frac{\pi}{2}+\arg f_z,$$

并证明对于复合的拟保角映射 $w[z(t)]$ 有

$$p_{w/t}\leqslant p_{w/z}p_{z/t}.$$

1406. 证明对于下列拟保角映射

$u=f(x),\ v=y$ (纵向扩张收缩),

$u=x,\ v=f(y)$ (横截扩张收缩),

$\rho=r,\ \theta=f(\varphi)$ (角的扩张收缩),

特征
$$p=\max\left(f',\ \frac{1}{f'}\right),$$

而对映射 $\rho=f(r),\ \theta=\varphi$ (径向扩张收缩), 特征

$$p=\max\left(\frac{rf'}{f},\ \frac{f}{rf'}\right).$$

1407. 构造圆 $|z|<R$ 到自身的拟保角映射, 使得点 $z=a$ ($|a|<R$) 变到坐标原点, 而使圆 $|z|=R$ 的点保持不变. 计算特征 p.

1408. 构造斜半带形 $x>0,\ x\operatorname{tg}\alpha<y<x\operatorname{tg}\alpha+h$ 到矩形状半带形 $u>0,\ 0<v<h$ 上的拟保角映射, 使得在底边没有伸长而在侧边上有恒定的伸长. 计算特征 p.

1409*. 构造由半平面与中心角为 $2\beta_0$ 的圆弧所组成的二角形(图 58)到半平面上的拟保角映射, 使边界上各段长度

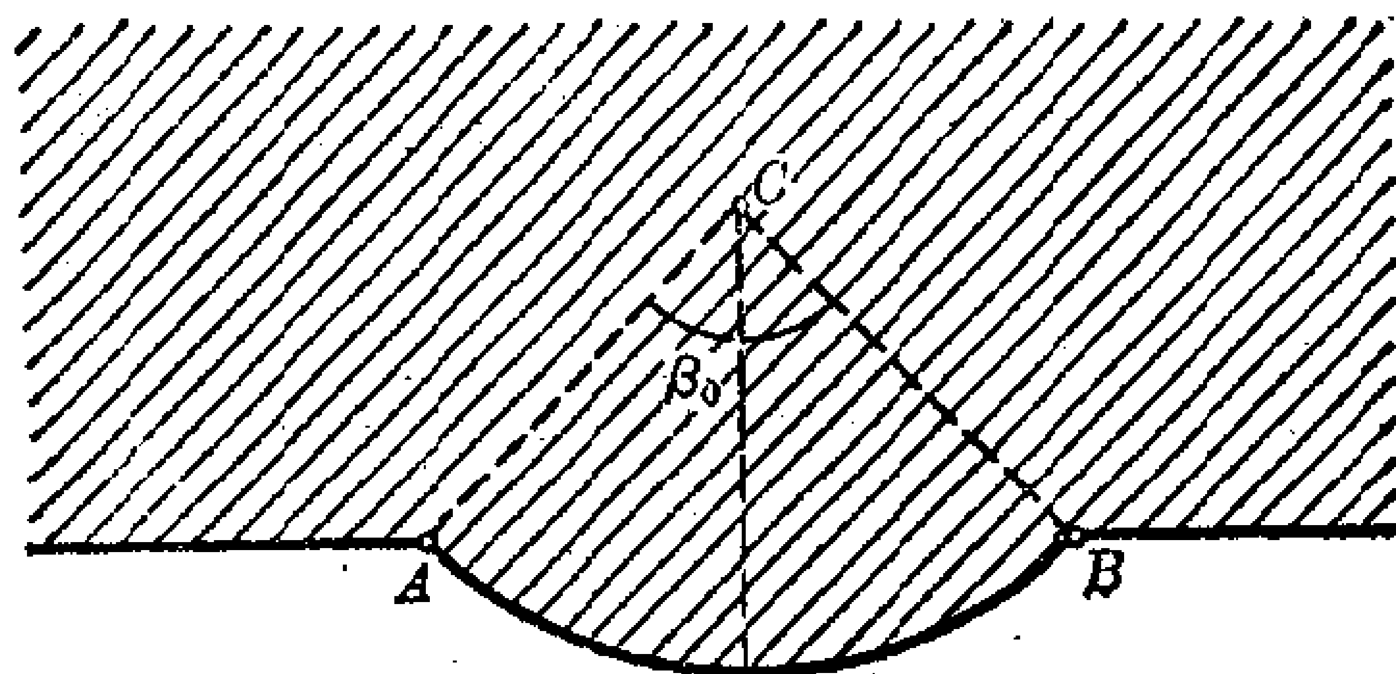


图 58

保持不变. 计算特征 p.

1410. 利用单叶映射 $\zeta=\zeta(z)=\xi+i\eta$, 将椭圆型 $(AC-B^2>0)$ 拟线性方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$=F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

简化为标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=F_1\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

证明映射 $\zeta(z)$ 满足伯尔特拉米方程组

$$\frac{A\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+B\dfrac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}=\frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \frac{B\dfrac{\partial \xi}{\partial x}+C\dfrac{\partial \xi}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}=-\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

且是特征为 α, β 与 γ 的拟保角映射, α, β 与 γ 由关系式

$$\frac{\gamma}{C}=\frac{\beta}{B}=\frac{\alpha}{A}=\frac{1}{\sqrt{AC-B^2}}$$

所确定(假定 $A>0$).

§2. 广义解析函数

函数 $w=u+iv$ 若满足方程

$$w_{\bar z}+Aw+B\overline{w}=F, \tag{1}$$

其中 A, B 与 F 都为 z 的函数，则称为广义解析函数.

本节习题讨论的是可简化为形式 (1) 的方程与方程组及其解的某些性质.

1411. 证明卡利曼(Carleman)方程组

$$\left.\begin{aligned} u_x - v_y + au + bv = f, \\ u_y + v_x + cu + dv = g, \end{aligned}\right\}$$

能写成形式(1) $w_{\bar{z}} + Aw + B\bar{w} = F$, 其中 a, b, c, d, f 与 g 为变量 x 与 y 的函数.

试用此方程组的系数表示 A, B 与 F.

1412. 证明：借助于"仿射"变换

$$w = a(z)\omega + b(z)\bar{\omega}, \tag{2}$$

方程 $w_{\bar{z}} - q_2(z)\overline{w_{\bar{z}}} + Aw + B\bar{w} = F$ 可简化为形式(1). 求出变换(2)的一般形式，并找出使此变换为非奇异的条件.

1413. 证明：用上题的变换，方程

$$w_{\bar{z}} - q_1(z)w_z - q_2(z)\overline{w_{\bar{z}}} + Aw + B\bar{w} = F$$

可化为形式 $\omega_{\bar{z}} - q_1'\omega_z + A'\omega + B'\bar{\omega} = F'$. 求出变换的一般形式，并找出使此变换为非奇异的条件.

提示：将题中的变换应用于该方程以及方程 $\bar{w}_z - \overline{q_1(z)}\,\bar{w}_z - \overline{q_2(z)}w_z + \bar{A}\bar{w} + \bar{B}w = \bar{F}$, 消去 $\bar{\omega}_z$, 然后选取系数 $a(z)$ 与 $b(z)$.

1414. 变量 ζ 由关系式 $\zeta_{\bar{z}} = q_1^*\zeta_z$ 与 z 相联系，用变量 ζ 替换自变量 z, 证明方程

$$w_{\bar{z}} - q_1(z)w_z - q_2(z)\overline{w_{\bar{z}}} + Aw + B\bar{w} = F$$

$(|q_1(z)| + |q_2(z)| < 1)$ 可化为下述形式

$$w_{\bar{\zeta}} - q_2^*\overline{w_{\zeta}} + Aw + B\bar{w} = F.$$

求出 q_1^* 与 q_2^*, 并阐明变换 $\zeta(z)$ 的几何意义.

1415. 证明形如

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 v_y=\alpha u_x+(\beta+\beta_1)u_y+au+bv+f,\\ -\alpha_1 v_x=(\beta-\beta_1)u_x+\gamma u_y+cu+dv+g\end{aligned}\right\}$$

的椭圆型微分方程组(此处除 $\alpha>0$ 外，还有椭圆型条件 $\alpha\gamma-\beta^2>0$)可化为形式 $w_{\bar z}-q_1(z)w_z-q_2(z)\overline{w}_{\bar z}+Aw+B\overline{w}=F$；这里若 $\alpha_1>0$，则 $|q_1(z)|+|q_2(z)|<1$；若 $\alpha_1<0$，则 $||q_1(z)|-|q_2(z)||>1$.

提示：参见题**1403**．用 $w=u-iv$ 代替 $w=u+iv$，则 $\alpha_1<0$ 的情形可归结为 $\alpha_1>0$ 的情形.

1416．证明：若 $w(z)$ 为方程 $w_{\bar z}-q_2(z)\overline{w}_{\bar z}=0$ 的连续可微解，其中 $q_2(z)$ 为 z 的解析函数且 $|q_2(z)|\neq1$，则

$$w(z)=\frac{\varphi(z)+q_2(z)\overline{\varphi}(z)}{1-|q_2(z)|^2},$$

其中 $\varphi(z)$为任一解析函数.

1417．证明：若 $w(z)$ 为方程 $w_{\bar z}-q_2(\bar z)\overline{w}_{\bar z}=0$ 的二次连续可微解，其中 $q_2(\bar z)$ 为 $\bar z$ 的解析函数且 $|q_2(\bar z)|\neq1$，则

$$w(z)=\varphi(z)+\int q_2(\bar z)\overline{\varphi}_{\bar z}d\bar z,$$

其中 $\varphi(z)$ 为关于 z 的任一解析函数.

提示：先证明 $w(z)$ 为 z 的解析函数与 $\bar z$ 的解析函数的和.

§3．某些积分关系式与二重积分

在本节各题中，G 是由围道 C 所界的区域.

1418．应用格林公式，证明下列关系式[$f(x, y)$ 与 $g(x, y)$在 G 内连续可微]：

1) $\displaystyle\iint_G\frac{\partial f}{\partial\bar z}\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_C f\,d\zeta$；

2) $\displaystyle\int_C f\,d\zeta+g\,d\bar\zeta=2i\iint_G\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z}-\frac{\partial g}{\partial z}\right)dx\,dy$；

3) $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$

$$(\zeta=\xi+i\eta).$$

提示：可利用下述事实：

$$\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta-z}=\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right),$$

并对去掉小圆 $|\zeta-z|<\rho(\rho\to 0)$ 的区域 G 应用第(1)小题中的公式.

1419．假定函数 f 与 g 在闭区域 $\bar{G}$ 内连续可微，证明当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial g}{\partial z}$ 时表达式 $fdz+gd\bar{z}$ 为某函数的全微分.

1420．证明：若 f 与 g 为在区域 G 内解析、在 C 上连续可微的函数，则

$$\iint_G f'\bar{g}\,dx\,dy=\frac{i}{2}\int_C f\bar{g}\,d\bar{\zeta},$$

特别

$$\iint_G f'\bar{g}'\,dx\,dy=\frac{i}{2}\int_C f\,d\bar{g}.$$

1421．证明：若函数 $f(z)$ 将区域 G 保形映射到由围道 $C'=f(C)$ 所界的区域 G' 上，则积分

$$I=\frac{i}{2}\int_C f\,d\bar{f}$$

等于区域 G' 的面积 S，而若 $f(z)$ 将区域 G 保形映射到围道 C' 的外部，则 $I=-S$.

1422．设 G 为圆 $|z|<R<1$，

$$\varphi(\zeta)=\frac{e^{2i\theta}}{\ln\frac{1}{\rho}}\quad(\zeta=\rho e^{i\theta}=\xi+i\eta,\ z=re^{i\varphi}).$$

试求函数

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\varphi(\zeta)\,d\xi d\eta}{\zeta-z}\quad(z\in G)$$

以及 $z\neq0$ 处的偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$. 证明这些导数中只有 $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ 在坐标原点存在且连续.

1423. 证明：若函数 $f(z)$ 连续可微，则当区域 G 收缩到点 z 时，有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\lim\frac{\frac{1}{2i}\int_C f\,d\zeta}{\iint_G d\xi d\eta}.$$

提示：利用题 **1418**(1) 的关系式.

1424. 设函数 $\varphi(\zeta)$ 在闭区域 $\bar{G}$ 内连续. 证明函数

$$F(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\varphi(\zeta)\,d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

在区域 G 内满足方程 $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\varphi(z)$，这里导数 $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ 由题 **1423** 的公式所确定.

1425. 证明：在题 **1424** 的条件下，方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\varphi(z)$$

的通解(在区域 G 内)能表示成形式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\varphi(\zeta)\,d\xi d\eta}{\zeta-z}.$$

提示：利用题 **1418**(3) 的关系式.

答案与解法

第一章

1. 1) $-i$; 2) $-i$; 3) $\frac{1}{5}(1+3i)$; 4) -8. **2.** 1) 3, $\frac{\pi}{2}$(这里及此后仅给出 $\arg z$ 的值); 2) 2, π; 3) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$; 4) $\sqrt{2}$, $\frac{-3\pi}{4}$; 5) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}$; 6) $\sqrt{29}$, $-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}$; 7) $\sqrt{29}$, $\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}$; 8) $\sqrt{29}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{5}{2}-\pi$; 9) $|b|$, $\frac{\pi}{2}\frac{|b|}{b}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b$[1]; 10) $\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ 当 $a>0$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}+\pi$ 当 $a<0$ 与 $b\geqslant 0$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}-\pi$ 当 $a<0$ 与 $b<0$.

3. $z=\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k$, 其中 $\varphi_k=\frac{2k\pi}{n}$, $k=0, 1, \cdots, n-1$; $z=0$.

4. 1) 1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; 2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $-i$; 3) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$, $\pm\sqrt{2}i$; 5) $\pm1\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; 6) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\times\sqrt{\sqrt{2}-1})$; 7) $\pm(2+i)$; 8) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3}+i\sin\frac{\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi}{3}\right]$ $(k=0, 1, 2)$;

9) $\sqrt[5]{5}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}}{5}+i\sin\frac{(2k+1)\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}}{5}\right]$ $(k=0, 1, 2, 3, 4)$.

---

1) $\operatorname{sgn} b$ 表示: $\operatorname{sgn} b=\begin{cases}1 & (b>0),\\ -1 & (b<0).\end{cases}$

15. $z_k=z_1\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\quad(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

16. $z_3=z_2+(z_2-z_1)\left(\cos\frac{2\pi}{n}\pm i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$. **17.** $z_4=z_1+z_3-z_2$.

18. 比值 $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ 必须为实数(条件是充要的).

19. 交比$(z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$必须为实数(条件是充要的).

20. 解法：这里我们可(不失一般性地)假设题中的直线为虚轴，并假设所有考虑的点都位于其右侧(否则，所有 z_k 都应乘上某个形如 $\cos\alpha+i\sin\alpha$ 的数)．于是，显然对任何 k 有 $\mathrm{Re}\,z_k>0$ 与 $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z_k}>0$.

23. 圆心在点 $z=z_0$，半径为 R 的圆的内部；此圆的外部；此圆的圆周．**24.** 焦点在点 $z=\pm 2$，长半轴为 $\frac{5}{2}$ 的椭圆．**25.** 焦点在点 $z=\pm 2$，实半轴为 $\frac{3}{2}$ 的双曲线左枝的内部．**26.** 垂直于联接点 z_1 与 z_2 的线段且过此线段中点的直线．**27.** 1) 直线 $x=C$ 与位于其右侧的半平面；2) 位于直线 $y=C$ 之下的半平面．**28.** 带形 $-1<y<0$．**29.** 一个角的内部(包含正实轴)，其顶点在原点，而其边与实轴交成角 α 与 β；一个相似的角的内部，其顶点在点 z_0．**30.** 抛物线 $y^2=2x+1$．**31.** 由直线 $x+y=1$ 所界、包含原点的半平面．**32.** 过点 z_1 与 z_2 的直线(不包含点 z_2)；直径为联接点 z_1 与 z_2 的线段的圆(移去点 z_2)．**33.** 圆 $|z-i|=\sqrt{2}$ 与 $|z+i|=\sqrt{2}$ 的内部，其公共部分除外．**34.** 1) 由实轴上的线段 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 与阿基米德螺线 $r=\varphi$ 的一周所界的区域内部；2) 第(1)小题中所确定的区域再加上实轴上区间 $(0, 2\pi)$ 而成的点集．**35.** 1) 在原点与虚轴相切的一族圆，加上虚轴自身(圆族的方程为 $C(x^2+y^2)=x$)；2) 在原点与实轴相切的一族圆，加上实轴自身．**36.** 1) 一族双曲线 $x^2-y^2=C$；2) 一族双曲线 $xy=\frac{C}{2}$．**37.** 每条曲线都是一个圆，此圆是到点 z_1 与 z_2 距离之比为常数的点的轨迹(关于点 z_1 与 z_2 的阿波洛尼厄斯圆)．**38.** 端点在 z_1 与 z_2 的一族圆弧(该族也包括两条以 z_1 与 z_2 为端点的直线段，其中之一包含无穷远点)．**39.** 1) 每一条曲线都是到点 $z=-1$ 与 $z=1$ 的距离乘积为常数的点的

轨迹(焦点为 $z=\pm1$ 的双纽线). 当 $\lambda>1$, 族中的曲线是简单闭曲线, 当 $\lambda<1$, 它们分解为两条简单闭曲线(当 $\lambda\to0$ 时分别收缩为点 ±1). 当 $\lambda=1$, 我们得到伯努利双纽线; 在极坐标系下, 其方程为 $r^2=2\cos2\varphi$; 2) 焦点为点 z_1 与 z_2 的双纽线, 其中 z_1 与 z_2 是方程 $z^2+az+b=0$ 的根. 当 $\lambda>\sqrt{\frac{|z_2-z_1|}{2}}$, 双纽线由一条曲线组成, 而当 $\lambda<\sqrt{\frac{|z_2-z_1|}{2}}$, 则由两条曲线组成. 当 $\lambda=\sqrt{\frac{|z_2-z_1|}{2}}$ 时, 我们得到具有二重点 $\frac{z_1+z_2}{2}$ 的伯努利双纽线. **40**. 1) $|z|_{\max}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}+a)$, $|z|_{\min}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)$; 2) $|z|_{\max}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4|b|}+a)$, $|z|_{\min}=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4|b|}-a)$. **41**. 阿基米德螺线 $r=\varphi$. **42**. 对数螺线 $r=e^{\varphi}$. **43**. 1) π; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 2π; 4) π; 5) 0. **44**. $\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}$, $\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}$, $\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$, $z=x+iy=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}$. **45**. $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right)$. 这四点都位于赤道上, 其经度分别为 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$(经度是从含于平面 ξ, ζ 内的初始子午线开始测量的). **46**. 以 $z=0$ 为心、$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 为半径的圆. "南极"对应于原点, "北极"对应于无穷远点. **47**. 1) 经度为 α 的半子午线; 2) 纬度 $\beta=2\operatorname{arc\,tg} r-\frac{\pi}{2}$ 的纬线. **48**. 1) 一纬线上直径的两端点; 2) 关于初始子午线互相对称的点(即其经度异号); 3) 关于赤道平面互相对称的点(即其经度同号而纬度异号). **49**. $z_1\times\bar{z}_2=-1$. **50**. 球面关于平行于 z-平面实轴的直径旋转 180° 后能相互得到的点. **51**. 1) 东半球; 2) 西半球; 3) 半球 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$($\alpha$ 为经度); 4) 半球 $\frac{\pi}{2}<|\alpha|<\pi$; 5) 南半球; 6) 北半球. **52**. 在"北极"(射影极点)彼此相切的一族圆; 通过原点的直线对应于大圆, 而与该直线平行、与原点相距 d 的直线对应于包含在与子午线平面相交成倾角 $\operatorname{arc\,tg} d$ 的平面内的圆. **53**. 通过"北极"的圆对应于直线. **56**. $k(z, a)=\frac{|z-a|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|a|^2}}$; $k(z, \infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$.

57. 阿波洛尼厄斯圆 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\frac{\sqrt{1+|z_1|^2}}{\sqrt{1+|z_2|^2}}$，特别，若 $|z_1|=|z_2|$，则为直线 $|z-z_1|=|z-z_2|$，又若 $z_2=\infty$，则为圆 $|z-z_1|=\sqrt{1+|z_1|^2}$.

59. $1,\ e^{\pi i},\ e^{\frac{\pi}{2}i},\ e^{-\frac{\pi}{2}i},\ \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i},\ \sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i},\ \sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i},\ \sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

60 $\pm i$; $(-1)^k$. **61.** e^2, 1; e^2, -3; e^3, $4-2\pi$; e^{-3}, $2\pi-4$; a, $\varphi-\pi$ 若 $\varphi>0$, $\varphi+\pi$ 若 $\varphi\leqslant 0$; 1, $-\varphi$ 若 $|\varphi|<\pi$, π 若 $|\varphi|=\pi$; $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}$ 若 $\alpha+\beta\leqslant\pi$, $\frac{\alpha+\beta-3\pi}{2}$ 若 $\alpha+\beta>\pi$.

62. 1) $\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$; 2) $\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$; 3) $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$;

4) $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 5) $\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ 若 n 为奇数;

$-\dfrac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ 若 n 为偶数.

63 1) $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$; 2) $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)$.

67. 1) $\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$,

$|\sin z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2y+\sin^2x}$;

2) $\cos z=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y$, $|\cos z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2y+\cos^2x}$;

3) $\operatorname{tg}z=\dfrac{\sin 2x+i\operatorname{sh}2y}{\cos 2x+\operatorname{ch}2y}$, $|\operatorname{tg}z|=\dfrac{\sqrt{\sin^2 2x+\operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x+\operatorname{ch}2y}$;

4) $\operatorname{sh}z=\operatorname{sh}x\cos y+i\operatorname{ch}x\sin y$, $|\operatorname{sh}z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2x+\sin^2y}$;

5) $\operatorname{ch}z=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y$, $|\operatorname{ch}z|=\sqrt{\operatorname{sh}^2x+\cos^2y}$;

6) $\operatorname{th}z=\dfrac{\operatorname{sh}2x+i\sin 2y}{\operatorname{ch}2x+\cos 2y}$, $|\operatorname{th}z|=\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2x+\sin^2 2y}}{\operatorname{ch}2x+\cos 2y}$.

68. 1) $\cos 2\,\mathrm{ch}\,1 - i\sin 2\,\mathrm{sh}\,1$; 2) $i\,\mathrm{sh}\,2$; 3) $\dfrac{\sin 4 - i\,\mathrm{sh}\,2}{2(\cos^2 2 + \mathrm{sh}^2 1)}$; 4) $\dfrac{8+15i}{17}$; 5) $\dfrac{\mathrm{sh}\,4 - i\sin 2}{\mathrm{ch}\,4 - \cos 2}$; 6) $\dfrac{40+9i}{41}$. **69**. $\mathrm{Im}\,e^z=0$ 若 $\mathrm{Im}\,z=k\pi$; $\mathrm{Re}\,e^z=0$ 若 $\mathrm{Im}\,z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$; $\mathrm{Im}\cos z=0$ 若 $\mathrm{Re}\,z=k\pi$ 或 $\mathrm{Im}\,z=0$; $\mathrm{Re}\cos z=0$ 若 $\mathrm{Re}\,z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$; $\mathrm{Im}\sin z=0$ 若 $\mathrm{Re}\,z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\mathrm{Im}\,z=0$; $\mathrm{Re}\sin z=0$ 若 $\mathrm{Re}\,z=k\pi$; $\mathrm{Im}\,\mathrm{tg}\,z=0$ 若 $\mathrm{Im}\,z=0$; $\mathrm{Re}\,\mathrm{tg}\,z=0$ 若 $\mathrm{Re}\,z=\dfrac{k\pi}{2}$; $\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}\,z=0$ 若 $\mathrm{Im}\,z=k\pi$ 或 $\mathrm{Re}\,z=0$; $\mathrm{Re}\,\mathrm{ch}\,z=0$ 若 $\mathrm{Im}\,z=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$; $\mathrm{Im}\,\mathrm{cth}\,z=0$ 若 $\mathrm{Im}\,z=\dfrac{k\pi}{2}$; $\mathrm{Re}\,\mathrm{cth}\,z=0$ 若 $\mathrm{Re}\,z=0$; 以上 k 都为整数($k=0, \pm1; \pm2, \cdots$). **70**. 1) $\mathrm{Re}\,z=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$; 2) $\mathrm{Im}\,z=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$. **71**. 1) $\ln 4+2k\pi i$, $(2k+1)\pi i$, πi; 2) $\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi i$, $\dfrac{\pi i}{2}$; 3) $\left(2k\pm\dfrac{1}{4}\right)\pi i$; 4) $\dfrac{1}{2}\ln 13+\left(2k\pi-\mathrm{arc\,tg}\dfrac{3}{2}\right)i$, $\dfrac{1}{2}\ln 13+\left[(2k+1)\pi-\mathrm{arc\,tg}\dfrac{3}{2}\right]i$. **72**. $2\,\mathrm{Ln}\,z$ 的值集仅构成 $\mathrm{Ln}(z^2)$ 值集的一部分. **73**. 1) 4π; 2) -2π; 3) 0; 4) 4π. **74**. 1) $\cos(2k\sqrt{2}\pi)+i\sin(2k\sqrt{2}\pi)$; 2) $2^{\sqrt{2}}[\cos(2k+1)\pi\sqrt{2}+i\sin(2k+1)\pi\sqrt{2}]$; 3) $e^{2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2)$; 4) $e^{2k\pi}$; 5) $e^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}$; 6) $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}e^{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}$; 7) $5e^{\mathrm{arc\,tg}\frac{4}{3}+2k\pi}\left[\cos\left(\ln 5-\mathrm{arc\,tg}\dfrac{4}{3}\right)+i\sin\left(\ln 5-\mathrm{arc\,tg}\dfrac{4}{3}\right)\right]$; 8) $-5e^{\mathrm{arc\,tg}\frac{4}{3}+(2k+1)\pi}\left[\cos\left(\ln 5-\mathrm{arc\,tg}\dfrac{4}{3}\right)+i\sin\left(\ln 5-\mathrm{arc\,tg}\dfrac{4}{3}\right)\right]$. k 处处为整数($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$).

76. $a^{2\alpha}$ 与 $(a^\alpha)^2$ 的值集互相重合，但与 $(a^2)^\alpha$ 的值集一般并不重合.

80. 1) 若 z 为实数且 $|z|\leqslant 1$，则 $\mathrm{Im\,Arc}\cos z=\mathrm{Im\,Arc}\sin z=0$. 若 z 为实数，则 $\mathrm{Im\,Arc\,tg}\,z=0$; 2) 若 z 为纯虚数且 $|z|\leqslant 1$，则 $\mathrm{Re\,Ar\,sh}\,z=0$. **81**. 1) $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$; 2) $2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$; 3) $2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})$; 4) $2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}$

$+1)$; 5) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+(2k+1)\pi\right]+\frac{i}{4}\ln 5$; 6) $\ln(\sqrt{5}\pm 2)+\left(2k\pm\frac{1}{2}\right)\pi i$; 7) $\frac{1}{4}\ln 5+\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 2+\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]i$. k 处处为整数 $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$.

82. 1) $z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm 1)$;
2) $z=\frac{3\pi}{4}+2k\pi-i\ln\frac{3\pm\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 3) $z=\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ 与 $z=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi-i\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; 4) $z=2k\pi i$; 5) $z=-\ln 2+(2k+1)\pi i$; 6) $z=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ 与 $z=-\ln 3+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$. k 处处为整数.

83. 1) $z=k\pi(1\pm i)$; 2) $z=k\pi(1+i)$ 与 $z=\frac{(2k+1)\pi}{1+i}$; 3) $z=\frac{(4k+1)\pi}{2(1+2i)}$ 与 $z=\frac{(4k-1)\pi}{2(1-2i)}$. k 处处为整数.

95. 绝对收敛. **96**. 绝对收敛. **97**. 发散. **98**. 非绝对收敛. **99**. 当 $\varphi\neq 2k\pi(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$,非绝对收敛;当 $\varphi=2k\pi$,发散. **100**. 绝对收敛. **101**. 发散. **102**. 绝对收敛. **103**. 发散. **104**. 绝对收敛. **105**. 1) $z=0$ 与 $z=2$; 2) $z=0$, $z=\frac{1}{m}$, $z=\frac{i}{n}$(m 与 n 为任意整数); 3) 平面上一切点; 4) 圆 $|z|\leqslant 1$ 上一切点. **107**. 2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 等于 0 或 ∞ 时. **109**. 直线段: $x=1,\ -2\leqslant y\leqslant 0$. **110**. 抛物线 $y=x^2$. **111**. 抛物线 $y=x^2$ 的右半部分,往返共两次. **112**. 以 $z=0$ 为心, a 为半径的左半圆. **113**. 双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 位于第三象限的一枝. **114**. 1) 以 $z=0$ 为心, 1 为半径的上半圆; 2) 以 $z=0$ 为心, 1 为半径, 位于第一象限的四分之一圆周. **115**. 1) 摆线: $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$; 2) 长幅旋轮线($a<b$), 短幅旋轮线($a>b$)或普通旋轮线($a=b$)的第一段弧(从原点计起): $x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t$. **116**. 1) 直线 $x=C$ 的象当 $C\neq 0$ 时为抛物线 $u=C^2-\frac{v^2}{4C^2}$, 当 $C=0$ 时为半轴 $v=0,\ u\leqslant 0$; 直线 $y=C$ 的象当 $C\neq 0$ 时为抛物线 $u=\frac{v^2}{4C^2}-C^2$, 当 $C=0$ 时为半轴 $v=0,\ u\geqslant 0$; 直线 $y=x$ 的象为半轴 $u=0,\ v\geqslant 0$; 圆 $|z|=R$ 的象为圆

$|w|=R^2$; 射线 $\arg z=\alpha$ 的象为射线 $\arg w=2\alpha$; 在下列情形为一一映射: 直线 $x=C$, $y=C(C\neq0)$以及射线 $\arg z=\alpha$; 2) 直线 $u=C$ 的原象为双曲线 $x^2-y^2=C$($C=0$ 时为一对直线), 直线 $v=C$ 的原象为双曲线 $xy=\frac{C}{2}$($C=0$ 时为一对直线). **117**. 1) 直线 $x=C$ 的象为圆 $u^2+v^2-\frac{u}{C}=0$($C=0$ 时为轴 $u=0$); 直线 $y=C$ 的象为圆 $u^2+v^2+\frac{v}{C}=0$($C=0$ 时为轴 $v=0$); 圆 $|z|=R$ 的象为圆 $|w|=\frac{1}{R}$; 射线 $\arg z=\alpha$ 的象为射线 $\arg w=-\alpha$; 圆 $|z-1|=1$ 的象为直线 $u=\frac{1}{2}$; 2) 直线 $u=C$ 的原象为圆 $x^2+y^2-\frac{x}{C}=0$($C=0$ 时为轴 $x=0$); 直线 $v=C$ 的原象为圆 $x^2+y^2+\frac{y}{C}=0$($C=0$ 时为轴 $y=0$). **118**. 函数 $w=z+\frac{1}{z}$ 将圆 $|z|=R\neq1$ 映射到椭圆 $\frac{u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$, 圆 $|z|=1$ 映射到线段 $v=0$, $-2\leqslant u\leqslant2$ 上; 函数 $w=z-\frac{1}{z}$ 将圆 $|z|=R\neq1$ 映射到椭圆 $\frac{u^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}=1$, 圆 $|z|=1$ 映射到线段 $u=0$, $-2\leqslant v\leqslant2$ 上. **119**. 族 $u=C$ 的原象为族 $x(x^2+y^2+1)=C(x^2+y^2)$; 族 $v=C$ 的原象为族 $y(x^2+y^2-1)=C(x^2+y^2)$(图 59). **120**. 变成负实轴上从 $w=-\frac{1}{4}$ 到 $w=\infty$ 的射线. **121**. 1) 圆 $\rho=e^C$, 射线 $\theta=C$, 螺线 $\rho=e^\theta$; 2) 曲线 $y=e^x+2k\pi$. **122**. 1) 直线族 $x=C$ 变成族 $v^2=-4a^2\left(u-a^2+\frac{1}{4}\right)$ $\left(\text{焦点为 } w=-\frac{1}{4} \text{ 的抛物线, } a=C+\frac{1}{2}\right)$, 亦包含负实轴($a=0$)上从点 $w=-\frac{1}{4}$ 发出的射线; 族 $y=C$变成共焦抛物线族: $v^2=4C^2\left(u+C^2+\frac{1}{4}\right)$, 亦包含从点 $w=-\frac{1}{4}$ 发出、沿正方向通过实轴的射线; 2) 族 $x=C$ 变成关于点 $w=-1$ 与 $w=1$ 的阿波洛尼厄斯圆族(也包括虚轴); 阿波洛尼厄斯圆族的方程: $(u-a)^2+v^2=a^2-1$; $|a|>1$($a=\operatorname{cth}2C$); 族 $y=C$ 变成端点在 $w=-1$ 与 $w=1$ 的圆弧束; 此圆弧束亦包括实轴的相应部分; 圆束的方程: $u^2+(v+b)^2=1+b^2$($b=\operatorname{ctg}2C$); 3) 族 $x=C$ 变成螺线族

$\rho=e^{C^2-\frac{\theta^2}{4C^2}}$，轴 $x=0$ 对应于线段 $\theta=0,\ 0<\rho\leqslant 1$；族 $y=C$ 变成螺线族 $\rho=e^{\frac{\theta^2}{4C^2}-C^2}$，轴 $y=0$ 对应于射线 $\theta=0,\ 1\leqslant\rho<\infty$． **123**．直线 $y=C$ 对应于曲线 $u=x+e^x\cos C,\ v=C+e^x\sin C$；直线段 $x=C$ 对应于曲线 $u=C+e^C\cos y,\ v=y+e^C\sin y$ 上的弧段．

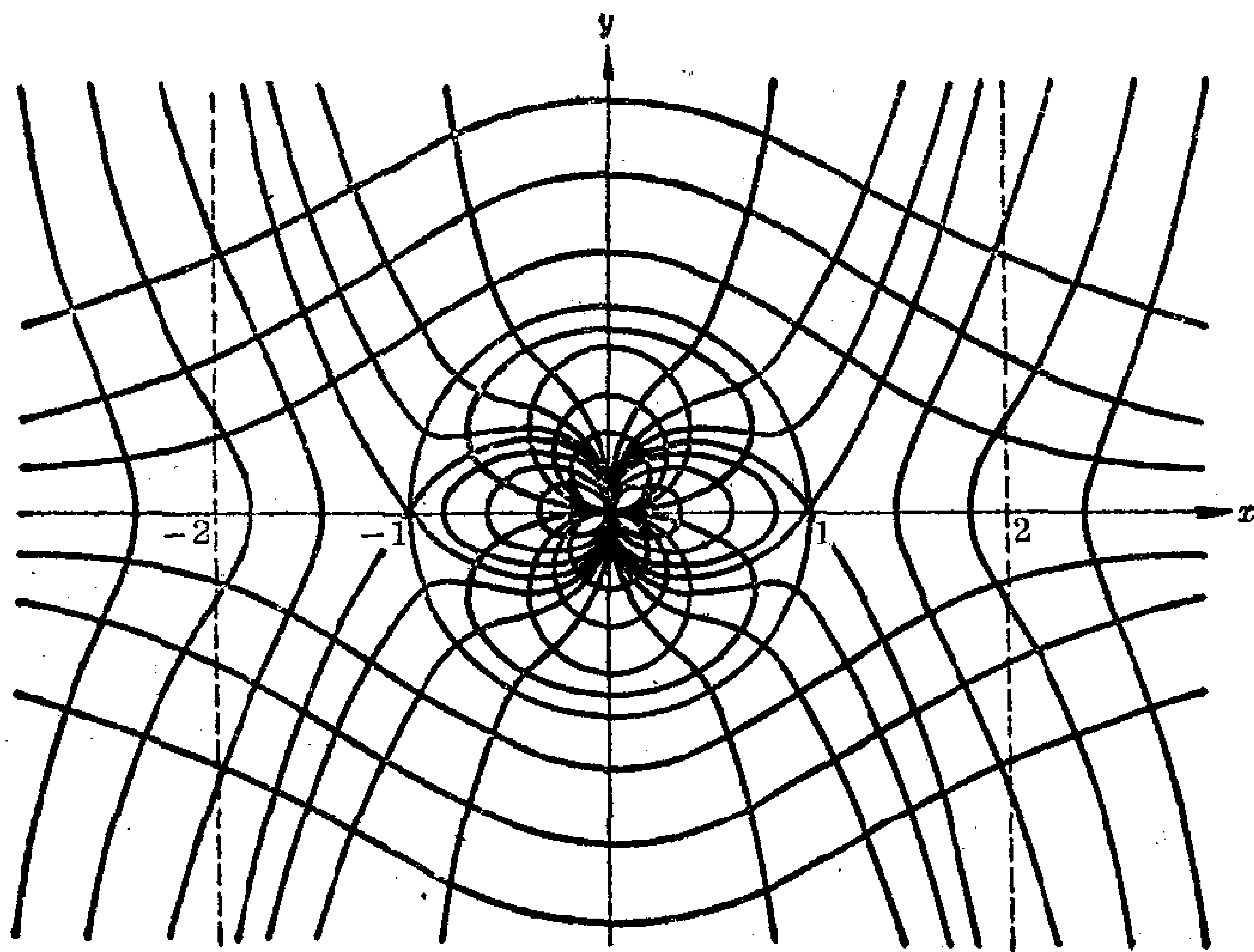


图 59

124．1) 圆 $r=\dfrac{\cos\varphi}{\ln R}(R\neq 1)$ 与虚轴 $(R=1)$ 对应于族 $|w|=R$；圆族 $r=\dfrac{\sin\varphi}{2k\pi-\alpha}$ 对应于每一条射线 $\arg w=\alpha$；当 $\alpha=0$，此圆族包括实轴(当 $k=0$)；2) 双曲线 $x^2-y^2=\ln R$ 与 $2xy=\alpha+2k\pi$． **126**．只有 $f(z)=\dfrac{z\operatorname{Re}z}{|z|}(f(0)=0)$． **127**．1) 与 2) 连续但非一致． **128**．2) 否；3) 是． **132**．1) $c=1,\ b=-a$；$f(z)=(1-ai)z$；2) $a=b=-1$；$f(z)=e^{iz}$． **133**．当 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$，$\pi<\arg z<\dfrac{5\pi}{4}$，函数解析 $(f(z)=z^2)$，当 $\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{3\pi}{2}<\arg z<\dfrac{7\pi}{4}$，函数亦解析 $(f(z)=-z^2)$． **135**．$r\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}$，$\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-r\dfrac{\partial v}{\partial r}$． **138**．0． **155**．1) 若 $u\neq$ 常数，则否；

2) $f(u)=au+b$. **156**. $|f(z)|$ 不是调和函数, $\arg f(z)$ 与 $\ln|f(z)|$ 为调和函数. **157**. $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$; $u=C_1\ln r+C_2$. **158**. $p_1=x$, $q_1=y$; $p_2=x^2-y^2$, $q_2=2xy$; $p_3=x^3-3xy^2$, $q_3=3x^2y-y^3$; $p_4=x^4-6x^2y^2+y^4$, $q_4=4x^3y-4xy^3$; $p_n=r^n\cos n\varphi$, $q_n=r^n\sin n\varphi$. **159**. $v(x, y)=2xy+y+C$. **160**. $v(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2}+C$. **161**. a) $v(x, y)=\arg z+C$; b) $v(x, y)=\arg z+2m\pi+C$. **162**. a) $v(x, y)=\arg z-\arg(z-1)+2m\pi+C$; b) $v(x, y)=\arg z-\arg(z-1)+C$; c) $v(x, y)=\arg z-\arg(z-1)+2m\pi+C$. **163**. a) $v(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\arg(z-z_k)+2\pi\sum_{k=1}^{n}m_k\alpha_k+C$; b) $v(x, y)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\arg(z-z_k)+2\pi m\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+C$(若 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=0$, 则函数 $v(x, y)$在所考虑的区域内为单值!). **164**. 1) 存在; 2) 存在; 3) 不存在. **165**. $f(z)=z^2+(5-i)z-\frac{i}{z}+Ci$. **166**. $f(z)=ze^z+2i\cos z+z^3-iz+Ci$. **167**. $f(z)=\frac{1}{2z}+iz^2+3i+C$. **168**. $f(z)=2i\ln z-(2-i)z+C$. C 处处都为任意实常数. **169**. $u=C_1x+C_2$. **170**. $u=C_1(ax+by)+C_2$. **171**. $u=C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_2$. **172**. $u=C_1xy+C_2$. **173**. $u=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2$. **174**. $u=\frac{C_1x}{x^2+y^2}+C_2$. **175**. $u=C_1\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}+C_2$. **176**. 不存在. **177**. $f(z)=e^{i\alpha}z^2e^z$. **178**. $f(z)=e^{i\alpha}e^{z^2}$. **179**. $f(z)=Ae^{\frac{z^2}{2}}$. **180**. $f(z)=Aze^z$(α 为任意实常数, A 为任意正常数). **182**. $az+\lambda$, $iaz+\lambda$, λe^{az}, λe^{iaz}. **183**. $iaz+\lambda$, $az+\lambda$, λe^{iaz}, λe^{az}. **184**. $ai\ln z+\lambda$, $a\ln z+\lambda$, $\lambda e^{ai\ln z}$, $\lambda e^{a\ln z}$. **185**. $a\ln z+\lambda$, $ai\ln z+\lambda$; $\lambda e^{a\ln z}$, $\lambda e^{ai\ln z}$. **186**. $\frac{a}{z}+\lambda$, $\frac{ai}{z}+\lambda$, $\lambda e^{\frac{a}{z}}$, $\lambda e^{\frac{ai}{z}}$(a 为任意实常数, λ 为任意复常数). **187**. 对 $w=z^2$: 1) $\theta=0$, $k=2$; 2) $\theta=\pi$, $k=\frac{1}{2}$; 3) $\theta=\frac{\pi}{4}$, $k=2\sqrt{2}$; 4) $\theta=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $k=10$. 对 $w=z^3$: 1) $\theta=0$, $k=3$; 2) $\theta=0$, $k=\frac{3}{16}$; 3) $\theta=\frac{\pi}{2}$, $k=6$; 4) $\theta=-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $k=75$. **188**. 1) 当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时

收缩，当$|z|>\frac{1}{2}$时伸长； 2) 当$|z+1|<\frac{1}{2}$时收缩，$|z+1|>\frac{1}{2}$时伸长； 3) 当$|z|>1$时收缩，$|z|<1$时伸长； 4) 当$\operatorname{Re} z<0$时收缩，$\operatorname{Re} z>0$时伸长； 5) $|z-1|>1$时收缩，$|z-1|<1$时伸长. **189**. $S=\iint_G |f'(z)|^2 dx\,dy$, $L=\int_l |f'(z)|ds$. **190**. $\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$. **191**. $2e^2(e^2-1)$. **192**. 区域D为圆环$e<|w|<e^2$. 由于映射非一一对应，题**189**中的公式不能应用.

第 二 章

193. $w=(1+i)(1-z)$. **194**. $w=(2+i)z+1-3i$. **195**. 1) $z_0=-1+3i$, $\theta=0$, $k=2$, $w+1-3i=2(z+1-3i)$; 2) $z_0=2+2i$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $k=1$, $w-2-2i=i(z-2-2i)$; 3) 不存在有限的不动点； 4) 若$a=1$，则不存在有限的不动点；若$a\neq1$，则$z_0=\frac{w_1-az_1}{1-a}$, $\theta=\arg a$, $k=|a|$, $w-\frac{w_1-az_1}{1-a}=a\left(z-\frac{w_1-az_1}{1-a}\right)$; 5) 若$a=1$，则不存在有限的不动点；若$a\neq1$，则$z_0=\frac{b}{1-a}$, $\theta=\arg a$, $k=|a|$, $w-\frac{b}{1-a}=a\left(z-\frac{b}{1-a}\right)$.
196. 1) $w=az+b$; 2) $w=-az+b$; 3) $w=-i(az+b)$; 4) $w=az+bi$. a与b处处都为实数，且$a>0$. **197**. 1) $w=z+bi$或$w=-z+1+bi$; 2) $w=z+b$或$w=-z-i+b$; 3) $w=z+b(1+i)$或$w=-z+1+b(1+i)$. b处处为实数. 若各点落在一条与带形边界平行的直线上，或者落在关于带形中心线为对称的平行线上时，这些点能互相对应. 若对应点落在带形的中心线上，则映射并不唯一定义. **198**. 1) $w=\frac{z-a}{h}$; 2) $w=\frac{-z+a+h}{h}+i$; 3) $w=\frac{\sqrt{1+k^2}}{b}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg} k\right)}z$; 4) $w=\frac{\sqrt{1+k^2}}{b_2-b_1}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg} k\right)}(z-ib_1)$. **199**. $w=e^{i\alpha}Rz+w_0$. **200**. 1) 平行于虚轴的直线族$u=\frac{1}{a}$（不包括虚轴自身）; 2) 平行于实轴的直线族$v=-\frac{1}{b}$（不包括实轴自身）; 3) 与直线$v=-u$在原点相切的圆族$b(u^2+v^2)+u+v=0$（包括直线自身）; 4) 直线束$v=-ku$; 5) 通过原

点与点 $w_0=\frac{1}{z_0}$ 的圆族(包括通过点 $w=0$ 与 $w=w_0$ 的直线); 6) 蔓叶线 $u^2=-\frac{v^3}{v+1}$. **201**. 1) 分别变成在点 $w=h$ 与平行于虚轴和实轴的直线相切的圆族(包括这两条直线自身);这两个圆族的方程为:

$$(C-x_0)[(u-h_1)^2+(v-h_2)^2]-(u-h_1)=0;$$
$$(C-y_0)[(u-h_1)^2+(v-h_2)^2]+(v-h_2)=0,$$

其中 $z_0=x_0+iy_0$, $h=h_1+ih_2$; 2) 变成圆心在点 $w=h$ 的圆族 $\left(|w-h|=\frac{1}{R}\right)$ 以及从点 $w=h$ 发出的射线族 $(\arg(w-h)=-\alpha)$.
202. 1) 关于点 z_1 与 z_2 的阿波洛尼厄斯圆族的方程: $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=\lambda$. 位于过点 z_1 与 z_2 的直线上的直径,其端点 A 与 B 以比值 λ 内分与外分线段 z_1z_2(图 60).

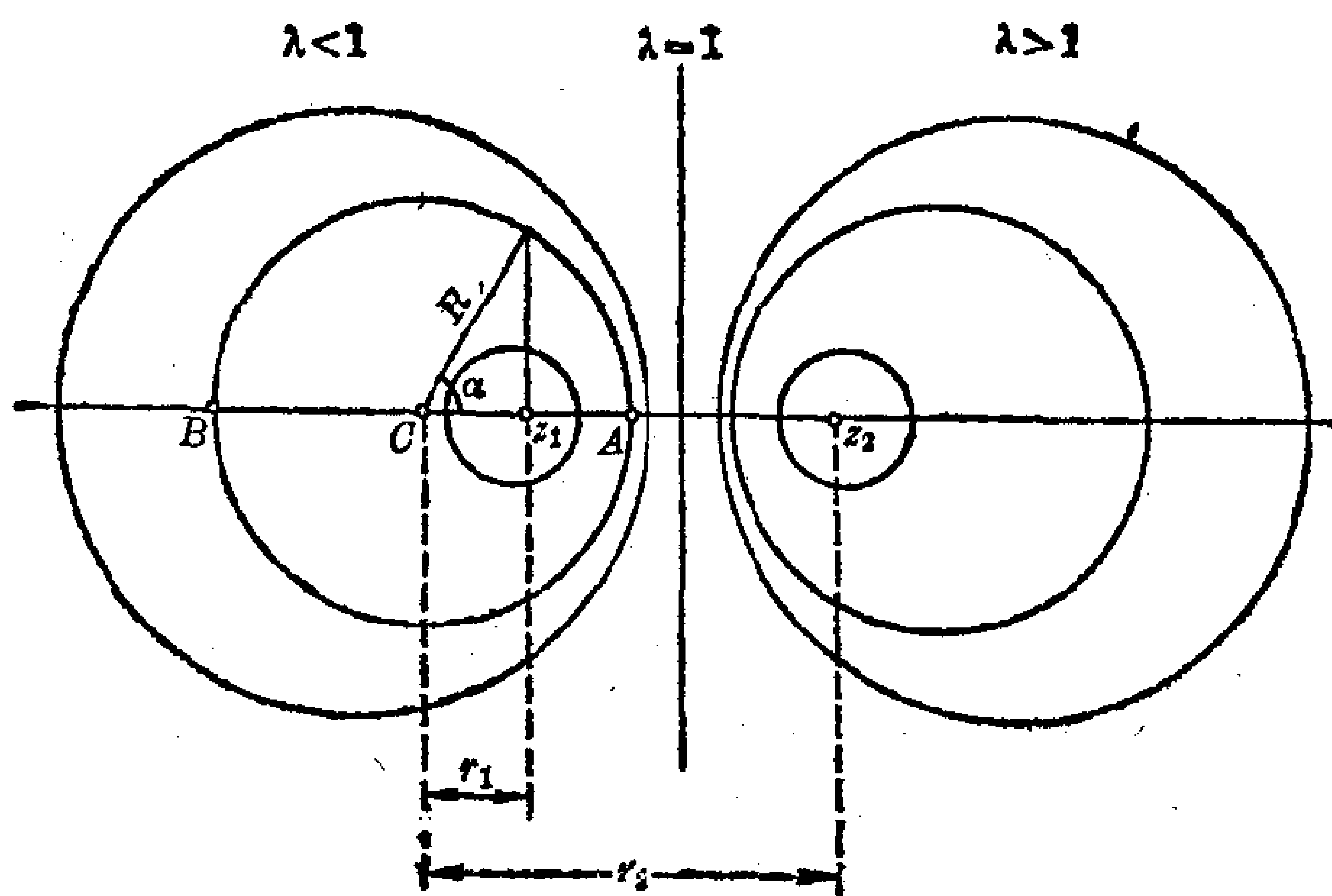


图 60

应用图中的记号(C 是直径为 AB 的圆的圆心), 并记 $|z_1-z_2|=d$. 当 $\lambda<1$ 时有下列关系式:

$$\lambda=\cos\alpha=\frac{r_1}{R}=\frac{R}{r_2},\ R=\frac{\lambda d}{1-\lambda^2},\quad r_1=\frac{\lambda^2 d}{1-\lambda^2},\quad r_2=\frac{d}{1-\lambda^2};$$

2) 通过点 z_1 与 z_2 的圆弧: $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\theta$. 对应于值 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\pi-\alpha$

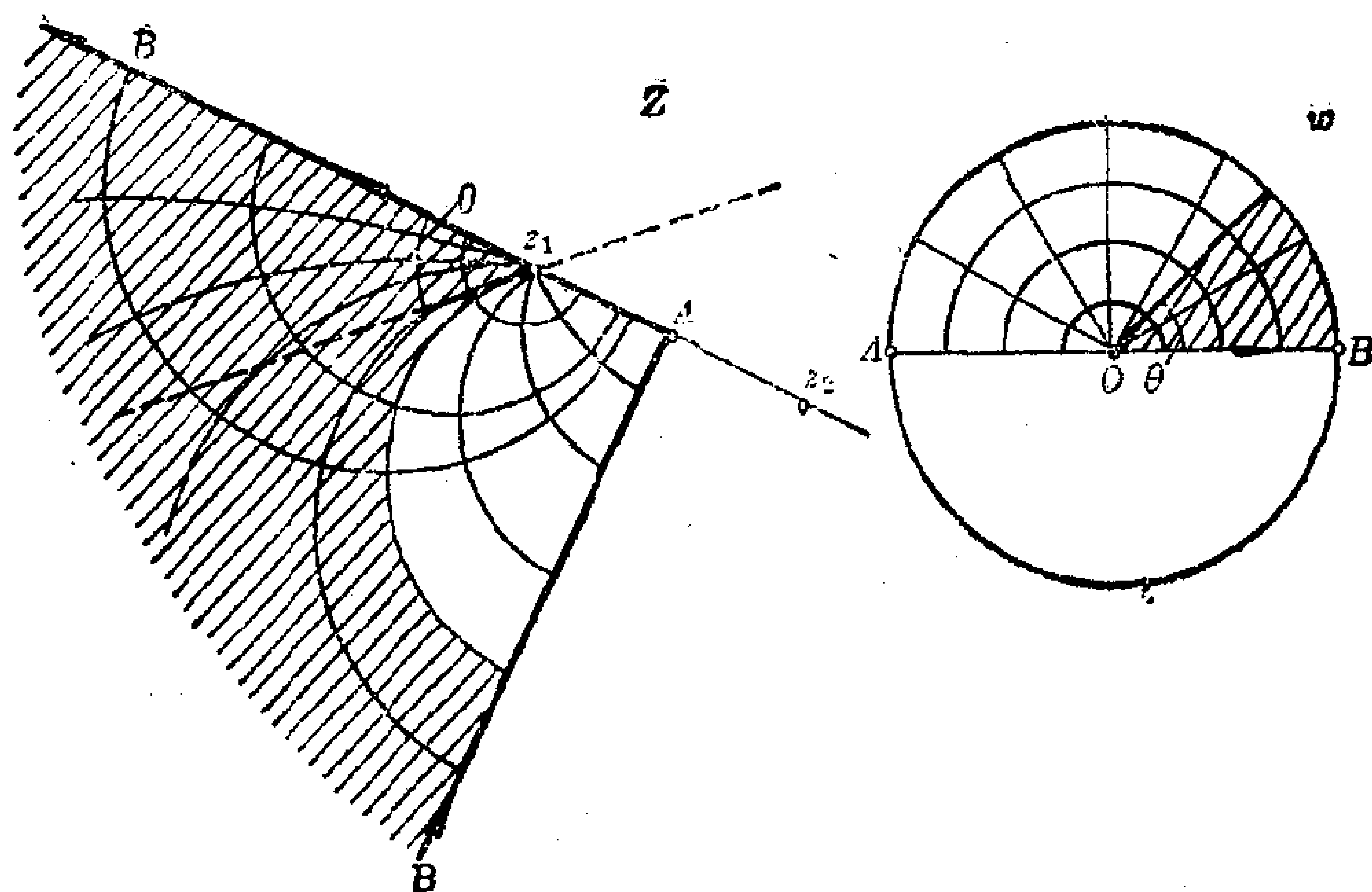


图 61

的弧互补，形成一个完整的圆；3）由阿波洛尼厄斯圆$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=R$以及与其正交的弧 $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=\theta$ 所构成的网格(图 61)对应于极网格(若$\theta>0$，则弧位于方向$\overrightarrow{z_1z_2}$的右边；若$\theta<0$，则位于左边)；4）图 61 中所示的直角对应于上半圆．**203**．变成半圆$|w|<1$，$\operatorname{Im}w<0$．**204**．变成包含点$w=0$，且由圆$|w|=1$与$\left|w+\frac{5i}{4}\right|=\frac{3}{4}$的两段圆弧所界的区域．**205**．变成从下半平面($\operatorname{Im}w<0$)中除去圆$\left|w-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}$含于下半平面内的部分而得到的区域．**206**．1）变成由直线$\operatorname{Re}w=1$以及与它相切的圆$\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$所界的区域；2）变成由互切的圆$\left|w-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$与$\left|w-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$所界的区域．**207**．变成边界由直线$\operatorname{Re}w=\frac{1}{2}$与圆$\left|w-\frac{4}{3}\right|=\frac{2}{3}$所组成的双连通区域．**208**．1）$w=-\frac{d}{z}+1+hi$或$w=\frac{d}{z}+hi$；2）$w=\frac{d_1}{d_2-d_1}\left(\frac{d_2}{z}-1\right)+hi$ 或 $w=\frac{d_1}{d_1-d_2}\left(\frac{d_2}{z}-1\right)+1+hi$；3）$w=\frac{d_1(z-d_2)}{z(d_1+d_2)}$．

209. 1) $w=-\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}$; 2) $w=\frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$.

210. 1) $w=\frac{(1+i)z+1+3i}{(1+i)z+3+i}$; 2) $w=\frac{iz+2+i}{z+1}$;

3) $w=\frac{1-i}{2}(z+1)$.

211. 1) $w=\frac{(-1+3i)z+1-i}{(1+i)z-1+i}$; 2) $w=\frac{z(1-4i)-2(1-i)}{2z(1-i)-(4-i)}$;

3) $w=\frac{z(3-i)-(1+i)}{(1+i)(1-z)}$.

212. $w=\frac{z-i}{iz-1}$; 上半平面变成单位圆. **213.** 1) $w=\frac{az+b}{cz+d}$, 其中 a, b, c, d 为实数且 $ad-bc>0$; 2) $w=\frac{az+b}{cz+d}$, 其中 a, b, c, d 为实数且 $ad-bc<0$; 3) $w=i\frac{az+b}{cz+d}$, 其中 a, b, c, d 为实数且 $ad-bc<0$. **214.** 1) $w=\frac{2}{2-z}$; 2) $w=-2\left(\frac{2z+1}{z-2}\right)$. **215.** $w=\frac{R-z}{R+z}$; 上半圆的象为角域 $u>0$, $v<0$. **216.** 1) $\frac{2+i}{5}$; 2) $\frac{9}{2}+i$. **217.** 1) $|z|=2$; 2) 直线 $x=\frac{1}{2}$; 3) $\left|z-\frac{i}{4}\right|=\frac{1}{4}$; 4) $xx_0+yy_0=\frac{1}{2}$; 5) $|z-z_0|=\sqrt{|z_0|^2-1}$(即此圆关于单位圆与自身对称); 6) $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0$(双纽线); 7) 顶点为 $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{1}{z_3}$ 的曲边三角形, 其三边为通过两个顶点与点 $z=0$ 的圆弧(其中之一可能为一直线段).

219. 1) $\theta(x)=\alpha+2\arg(x-\beta)$; 2) $w'(\beta)=\frac{e^{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)i}}{2b}$; 3) 若 $b\geqslant 2$, 则整个半平面收缩; 若 $b<2$, 则位于圆 $|z-\bar{\beta}|<\sqrt{2b}$ 内的区域伸长. (圆 $|z-\bar{\beta}|=\sqrt{2b}$ 称为等距圆.) **220.** 1) $w=\frac{z-i}{z+i}$; 2) $w=i\frac{z-2i}{z+2i}$; 3) $w=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\frac{z-(a+bi)}{z-(a-bi)}$. **221.** $w=Ri\frac{z-i}{z+i}+w_0$. **222.** $w=-\frac{z-2i}{z+2i}$. **223.** $w=-4\frac{zi+2}{z-2-4i}$.

224. $w=ke^{\frac{1}{2}\left(\pi+\arg\frac{z_2}{z_1}\right)i}\frac{z-z_1}{z-z_2}$, 其中 $k>0$. 位于圆盘 $|z|<1$ 内且通过点 z_1 与 z_2 的圆弧对应于半平面 $\operatorname{Re} w>0$ 内从点 $w=0$ 发出的射线;

位于圆盘 $|z|<1$ 内关于点 z_1 与 z_2 的阿波洛尼厄斯圆的圆弧对应于圆心在 $w=0$、位于半平面 $\operatorname{Re} w>0$ 内的半圆. **225.** $w_0=\dfrac{\bar{z}_2-z_1}{\bar{z}_2-z_2}$, $R=\dfrac{|z_2-z_1|}{2|\operatorname{Im} z_2|}$. **226.** $\dfrac{w-b}{w-\bar{b}}=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$. **227.** $\dfrac{w-\bar{a}}{w-a}=i\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$.

228. 1) $\theta(\varphi)=\alpha-\varphi+2\arg(e^{i\varphi}-a)=\alpha-\varphi+2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sin\varphi-\lambda\sin\theta}{\cos\varphi-\lambda\cos\theta}$, 其中 $a=\lambda e^{i\theta}$; 2) $w'(0)=(1-|a|^2)e^{i\alpha}$, $w'(a)=\dfrac{e^{i\alpha}}{1-|a|^2}$; 3) 若 $a\neq 0$, 则位于圆 $\left|z-\dfrac{1}{\bar{a}}\right|<\sqrt{\dfrac{1}{|a|^2}-1}$ 内的区域伸长, 而位于此圆外的区域收缩 $\left(\text{圆}\left|z-\dfrac{1}{\bar{a}}\right|=\sqrt{\dfrac{1}{|a|^2}-1}\text{ 为等距圆}\right)$. 若 $a=0$, 则 $|w'(z)|\equiv 1$; 4) $\max\left|\dfrac{dw}{dz}\right|=\dfrac{1+|a|}{1-|a|}$, $\min\left|\dfrac{dw}{dz}\right|=\dfrac{1-|a|}{1+|a|}$. **229.** 1) $w=\dfrac{2z-1}{2-z}$; 2) $w=\dfrac{2iz+1}{2+iz}$; 3) $w=-iz$; 4) $\dfrac{w-a}{1-\bar{a}w}=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

230. $R_2\dfrac{w-b}{R_2^2-\bar{b}w}=e^{i\alpha}R_1\dfrac{z-a}{R_1^2-\bar{a}z}$. **231.** $w=\dfrac{1-z}{z+2}$. **232.** $w=2\dfrac{z-2+i}{iz+2-2i}$. **233.** 1) $w=R^2e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{R^2-\bar{a}z}$; 2) $\dfrac{w-b}{R^2-\bar{b}w}=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{R^2-\bar{a}z}$; 3) $w=R^2\dfrac{z-a}{R^2-az}$, 其中 a 为实数, 且 $|a|<R$. **234.** $\dfrac{w-a}{1-aw}=e^{i\varphi}\dfrac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z}$, 其中 $\varphi=\pi-\arg\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1z_2}$, $a=\dfrac{|z_2-z_1|}{|1-\bar{z}_1z_2|+\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}$.

235. $w=\pm\dfrac{az-1+\sqrt{1-a^2}}{(1-\sqrt{1-a^2})z-a}$, $\rho=2\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}$. **238.** 1) $w=z$; 2) $w=\dfrac{z+2-\sqrt{3}}{1+(2-\sqrt{3})z}$, $w=i\dfrac{z-2+\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})z}$. **241.** 过点 z_0 的圆周, 这些圆周在 z_0 的切线由矢量 $\vec{h}$ 定义. **242.** $w=\dfrac{(R-ki)z-R^2}{z-(R+ki)}$, 其中 k 为实数, $k\neq 0$ ($k=\infty$ 时我们令 $w=z$). **247.** 若 $|a|<\sin\dfrac{\lambda}{2}$, 则变换为椭圆型. 记 $|a|=\sin\dfrac{\lambda}{2}\sin\beta$, $z_1=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, $z_2=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

$\cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\lambda_0}{2}=\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\cos\beta$, 则可将变换写成形式 $\frac{w-z_1}{w-z_2}=e^{i\lambda_0}\frac{z-z_1}{z-z_2}$. 若 $|a|=\sin\frac{\lambda}{2}$, 则有形如 $\frac{1}{w-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+ih\bar{z}_0$ 的抛物型变换, 其中 $z_0=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$, $h=\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$. 若 $|a|>\sin\frac{\lambda}{2}$, 则变换为双曲型. 记 $\sin\frac{\lambda}{2}=|a|\sin\beta$, $z_1=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\beta\right)}$, $z_2=e^{i\left(\alpha+\frac{\lambda}{2}-\pi+\beta\right)}$, $K=\frac{\cos\frac{\lambda}{2}+\sqrt{|a|^2-\sin^2\frac{\lambda}{2}}}{\cos\frac{\lambda}{2}-\sqrt{|a|^2-\sin^2\frac{\lambda}{2}}}$, 则可将变换写成形式 $\frac{w-z_1}{w-z_2}=K\frac{z-z_1}{z-z_2}$. **248**. $\Gamma=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{a}{h}$; 对充分小的 $\frac{a}{h}$, $\Gamma=\frac{2a}{h}+O\left[\left(\frac{a}{h}\right)^3\right]$; 对充分小的 $\frac{h}{a}$, $\Gamma=\pi-\frac{2h}{a}+O\left[\left(\frac{h}{a}\right)^3\right]$. **249**. $\Gamma=\gamma+2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x_0\sin\gamma}{1-x_0\cos\gamma}=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$; 若 $x_0<0$, 则 $\Gamma<\gamma$, 若 $x_0>0$, 则 $\Gamma>\gamma$. **253**. 1) $w=-\frac{20}{z}$; 2) $w=-(2iz+1+2i)$. **254**. $w=\frac{z-\sqrt{h^2-R^2}}{z+\sqrt{h^2-R^2}}e^{i\alpha}$; $\rho=\frac{h}{R}+\sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2-1}$. **255**. $h=\frac{5}{4}$; $w=2e^{i\alpha}\frac{4z-3}{4z+3}$ 或 $w=e^{i\alpha}\frac{4z+3}{4z-3}$. **256**. $w=\frac{2z}{z+24}e^{i\alpha}$ 或 $w=\frac{z+24}{3z}e^{i\alpha}$, $\rho=\frac{2}{3}$. **257**. $w=\lambda\frac{z-z_1'}{z-z_2'}$ 或 $w=\lambda\frac{z-z_2'}{z-z_1'}$, 其中 λ 为任意复数, $z_1'=z_1+\frac{u_1(z_2-z_1)}{d}$, $z_2'=z_1+\frac{u_2(z_2-z_1)}{d}$, $d=|z_2-z_1|$,

$$u_1=\frac{1}{2d}\left(r_1^2+d^2-r_2^2-\sqrt{[d^2-(r_1+r_2)^2][d^2-(r_1-r_2)^2]}\right),$$

$$u_2=\frac{1}{2d}\left(r_1^2+d^2-r_2^2+\sqrt{[d^2-(r_1+r_2)^2][d^2-(r_1-r_2)^2]}\right);$$

$$\mu\left(\text{或}\ \frac{1}{\mu}\right)=\left|\frac{(d+r_2-u_1)(r_1-u_2)}{(d+r_2-u_2)(r_1-u_1)}\right|.$$

258. 1) $\mu=2$; 2) $\mu=5+2\sqrt{6}$. **259**. 若 α 与 π 可通约, 则群为有限. **263**. 基本域(其可能的一类)在图 62 中由影线部分标出. 等价边界的边由箭头联结. 标上数码的点是使群旋转的不动点(数字表

示旋转次数). 小题(5)至(9)由双周期子群的平行四边形加以图示; 在小题(7)中,该平行四边形为正方形,在小题(8)与(9)中,则是角为 120° 与 60° 的菱形. 注. 可以证明,在线性变换的范围内,群 3 至 9 详尽无遗地论述了有一个极限点(这是关于等价点集极限点而言的术语)的线性变换群.

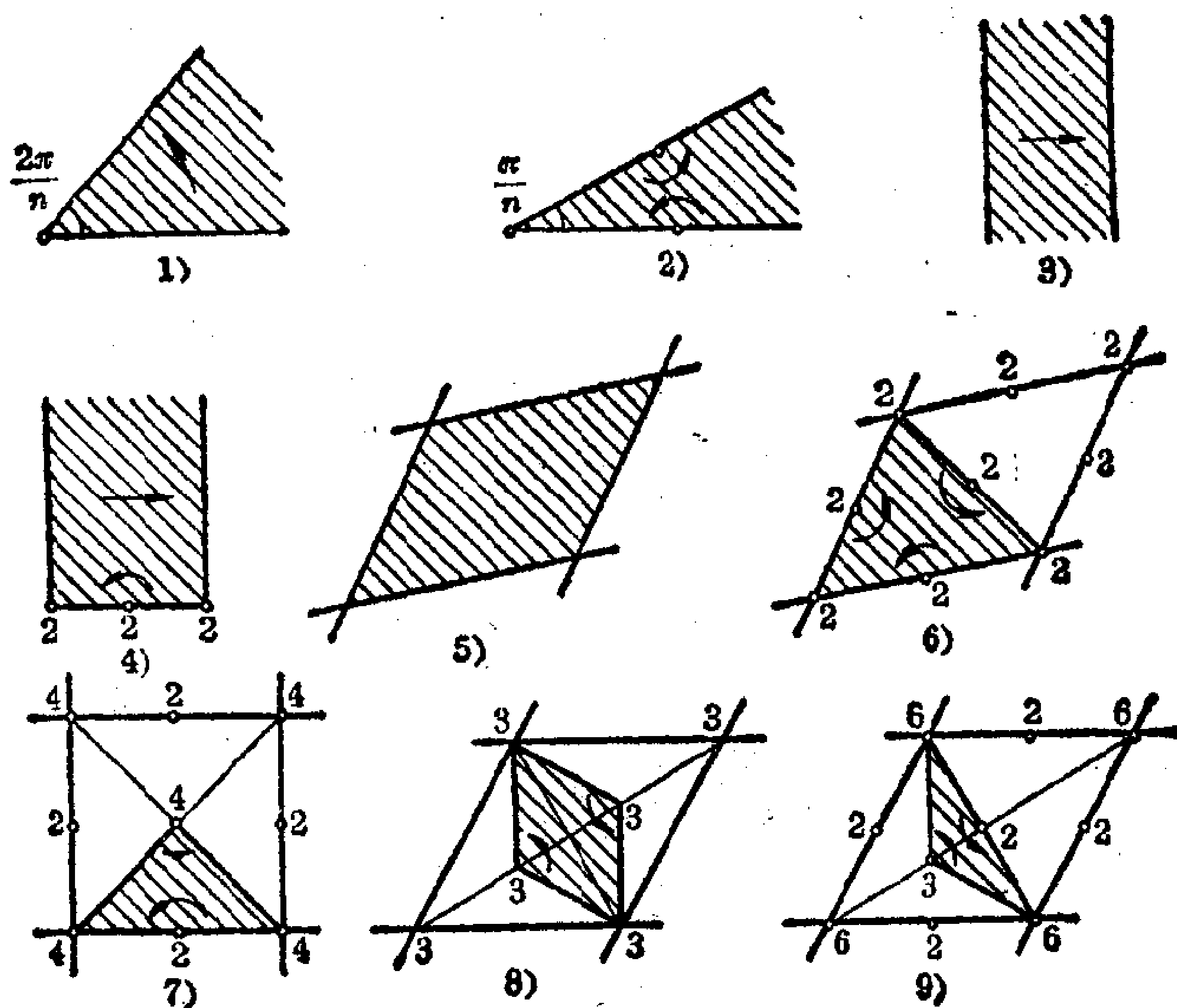


图 62

264. 1) $w=e^{i\alpha}z$; 2) $\frac{w-1}{w+1}=e^{i\alpha}\frac{z-1}{z+1}$; 3) $\frac{w-i}{w+i}=e^{i\alpha}\frac{z-i}{z+i}$; 4) $\frac{w-a}{1+\bar{a}w}=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1+\bar{a}z}$. **270**. 1) 与 2) 构造是显然的; 3) "直线" $\alpha\beta$ (α 与 β 为此直线的"无穷远点") 的等距曲线是以 α 与 β 为端点的圆弧 (称为超圆); 4) 以"无穷远处"点 α 为公共点的"平行线"束的极限曲线是与单位圆在点 α 相切(内切)的圆(称为极限圆). **271**. 2) 为了构造角为 φ_1, φ_2, φ_3 的"直线"三角形,首先作中心角为 $\Delta=\pi-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)$ 的扇形 OAB, 然后画"直线" AB, 以及过点 A 和 B、且与 AB 的交角为 φ_2 与 φ_3 的"直线", 这两条"直线"交于点 C. $\triangle ABC$ 即为所求的三角

形. **272**. 1) $w=i(z^2-a^2)$; 2) $w=\sqrt{z-\frac{p}{2}}-i\sqrt{\frac{p}{2}}$. **273**. 1) $w=\frac{z^2}{a^2}$; 2) $w=\sqrt{\frac{z}{a}}$; 3) $w=\frac{A}{2}\left(\frac{z+1}{z-2}\right)^2$. **274**. 区域由帕斯卡(Pascal)蜗线: $u=R(\cos\varphi+m\cos 2\varphi)$, $v=R(\sin\varphi+m\sin 2\varphi)$所界. 在 w-平面内将原点移到点 $w=-Rm$, 我们得到通常形式的蜗线方程(在极坐标系中): $\rho=R(1+2m\sin\theta)$. 当 $m=0$, 帕斯卡蜗线变成圆, 当 $m=\frac{1}{2}$ 时变成有尖点 $w=-\frac{R}{2}$ 的心脏线. 圆 $|z|=r<1$ 的象亦为帕斯卡蜗线, 将原点变到点 $w=-Rmr^2$, 容易得到其极坐标方程: $\rho=Rr(1+2mr\cos\theta)$. 圆的半径 $\arg z=\alpha$ 的象为通过原点的抛物线: $m(u\sin 2\alpha-v\cos 2\alpha)^2+R\sin\alpha(u\sin\alpha-v\cos\alpha)=0$. 半径 $\alpha=0$ 与 $\alpha=\pi$ 对应实轴上的线段 $0\leqslant u\leqslant R(1+m)$ 与 $R(m-1)\leqslant u\leqslant 0$. **275**. 区域由抛物线 $u=-v^2$ 与曲线 $\rho=2\cos\frac{\theta}{3}$, $|\theta|<\frac{3\pi}{4}$ 所界(图 63). **276**. 1) 区域由圆外旋轮

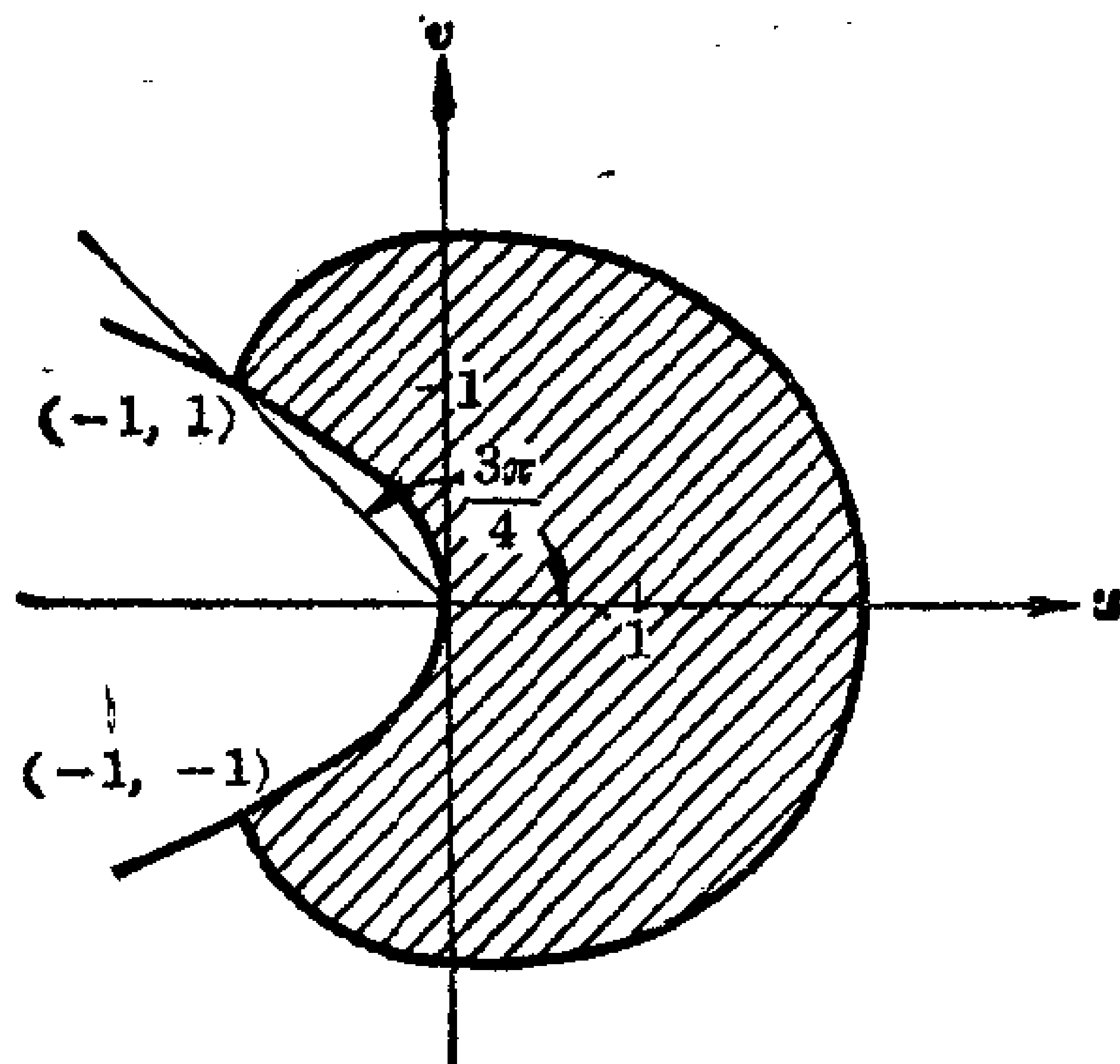


图 63

线: $u=R\left(\cos\varphi+\frac{\cos n\varphi}{n}\right)$, $v=R\left(\sin\varphi+\frac{\sin n\varphi}{n}\right)$所界, 此旋轮线有 $(n-1)$ 个尖点, 它们是点 $z=\sqrt[n-1]{-1}$ 的象; 2) 圆内旋轮线 $u=R\left(\cos\varphi+\frac{\cos n\varphi}{n}\right)$, $v=R\left(\sin\varphi-\frac{\sin n\varphi}{n}\right)$的外部, 此旋轮线有$(n+1)$个尖点(点 $z=\sqrt[n+1]{1}$的象). **277**. 1) $|m|\leqslant\frac{1}{n}$. 区域由一条"拉长的"

圆外旋轮线(长短幅圆外旋轮线)所界，即由下述点的轨迹所界：该点与沿半径为$\frac{R(n-1)}{n}$的圆周外部滚动且半径为$\frac{R}{n}$之圆的圆心距离为mR; 2) $|m|\leqslant\frac{1}{n}$. 第一种情形为单位圆外部；第二种情形，其内部映射到"缩短了的"圆内旋轮线的外部(即长短幅圆内旋轮线)。

278. 1) $w=z^{\frac{1}{\alpha}}$; 2) $w=\frac{2(\sqrt[3]{4}+1)e^{\frac{\pi i}{3}}z^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt[3]{4}-2)e^{\frac{\pi i}{3}}z^{\frac{4}{3}}+3\sqrt[3]{4}}$.

279. 1) $w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$; 2) $w=-\frac{z^2+1}{2z}$; 3) $w=\frac{-2z^2+3z-2}{2z^2+3z+2}$.

280. 1) $w=\frac{z^2+2iz+1}{iz^2+2z+i}$; 2) $w=\frac{2z^2+3iz+2}{2z^2-3iz+2}$.

281. 1) $w=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. **282**. 1) $w=\left(\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}+R^{\frac{1}{\alpha}}}{z^{\frac{1}{\alpha}}-R^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2$;

2) $w=\left(\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}-R^{\frac{1}{\alpha}}}{z^{\frac{1}{\alpha}}+R^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^2$. **283**. 1) $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{\frac{3}{2}}$;

2) $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$; 3) $w=\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$;

4) $w=i\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{\frac{3}{2}}$; 5) $w=\left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$.

284. $w=e^{\frac{\pi i}{3}}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{2}{3}}$. **285**. $w=\sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$. **286**. $w=\sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$.

287. $w=\sqrt{\frac{z-z_1}{z_2-z}}$. **288**. $w=\sqrt{\frac{z+R}{z-R}}$. **289**. $w=e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt{z-i}$.

290. $w=e^{\frac{i}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{1-h^2}}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$. **291**. $w=\sqrt{z^2+h^2}$. **292**. $w=\frac{\sqrt{z^2+h^2}}{z}$.

293. $w=\sqrt{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **294**. $w=\sqrt{\left(\frac{z^{\frac{1}{\beta}}-1}{z^{\frac{1}{\beta}}+1}\right)^2+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2\beta}}$.

295. $w=\sqrt{\left[\frac{(1-z)^{\frac{2}{3}}-(1+z)^{\frac{2}{3}}}{(1-z)^{\frac{2}{3}}+(1+z)^{\frac{2}{3}}}\right]+\frac{1}{3}}$. **296**. $w=\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$.

对$\sqrt{z}$的一个分枝,此函数给出(1)小题的解,而对$\sqrt{z}$的另一个分枝,则给出(2)小题的解. **297**. $w=\frac{z}{(1-z)^2}$. **298**. 圆$|z|=R$(图 64)对应共焦椭圆$\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$(圆$|z|=1$对应线段$v=0$, $-1\leqslant u\leqslant 1$);射线$\arg z=\alpha$对应共焦双曲线$\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=1$的各枝(射线$\arg z=0$对应射线$v=0$, $u\geqslant 1$; 射线$\arg z=\pi$对应射线$v=0$, $u\leqslant -1$; 射线$\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$对应轴$u=0$).

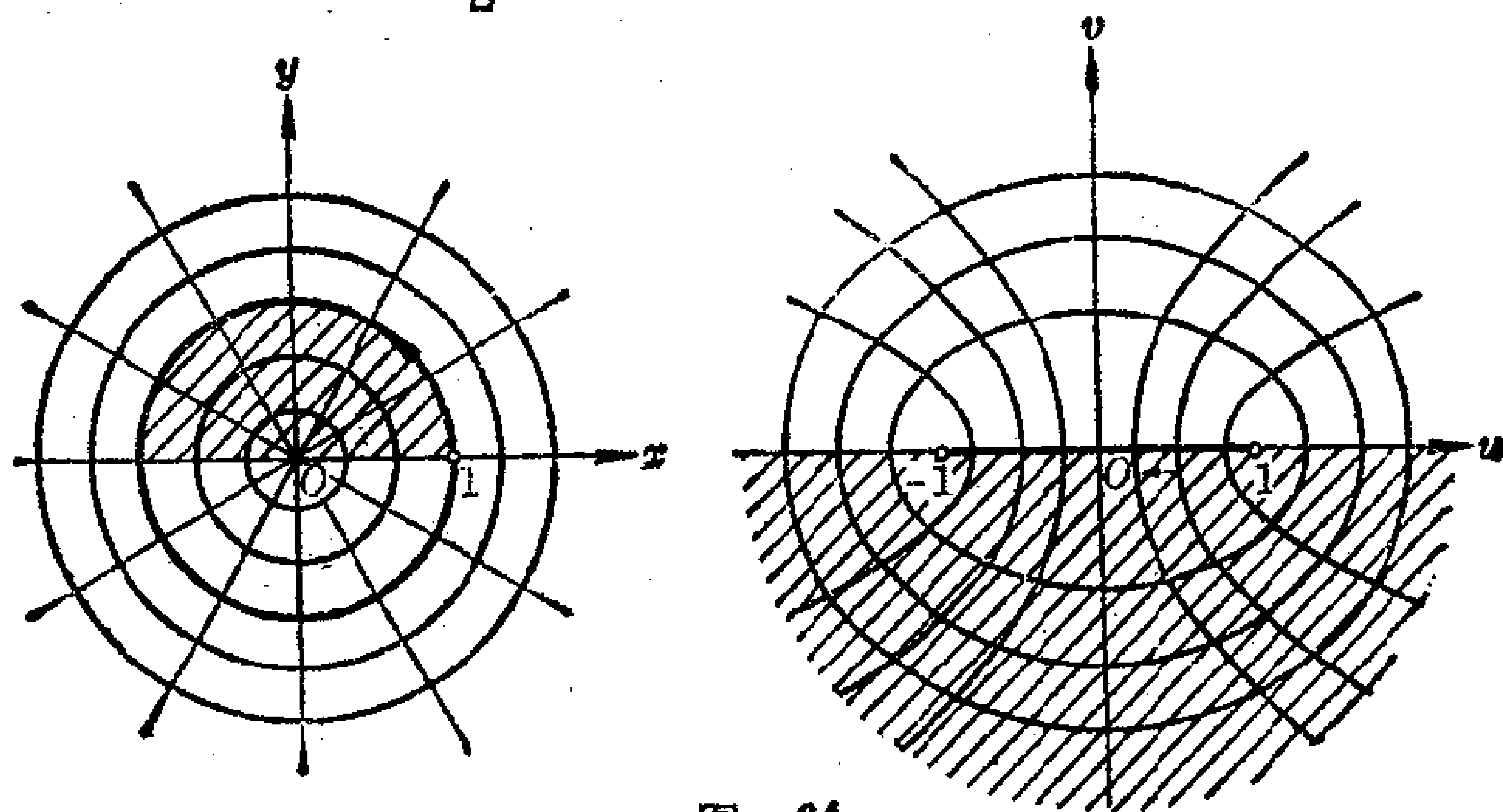


图 64

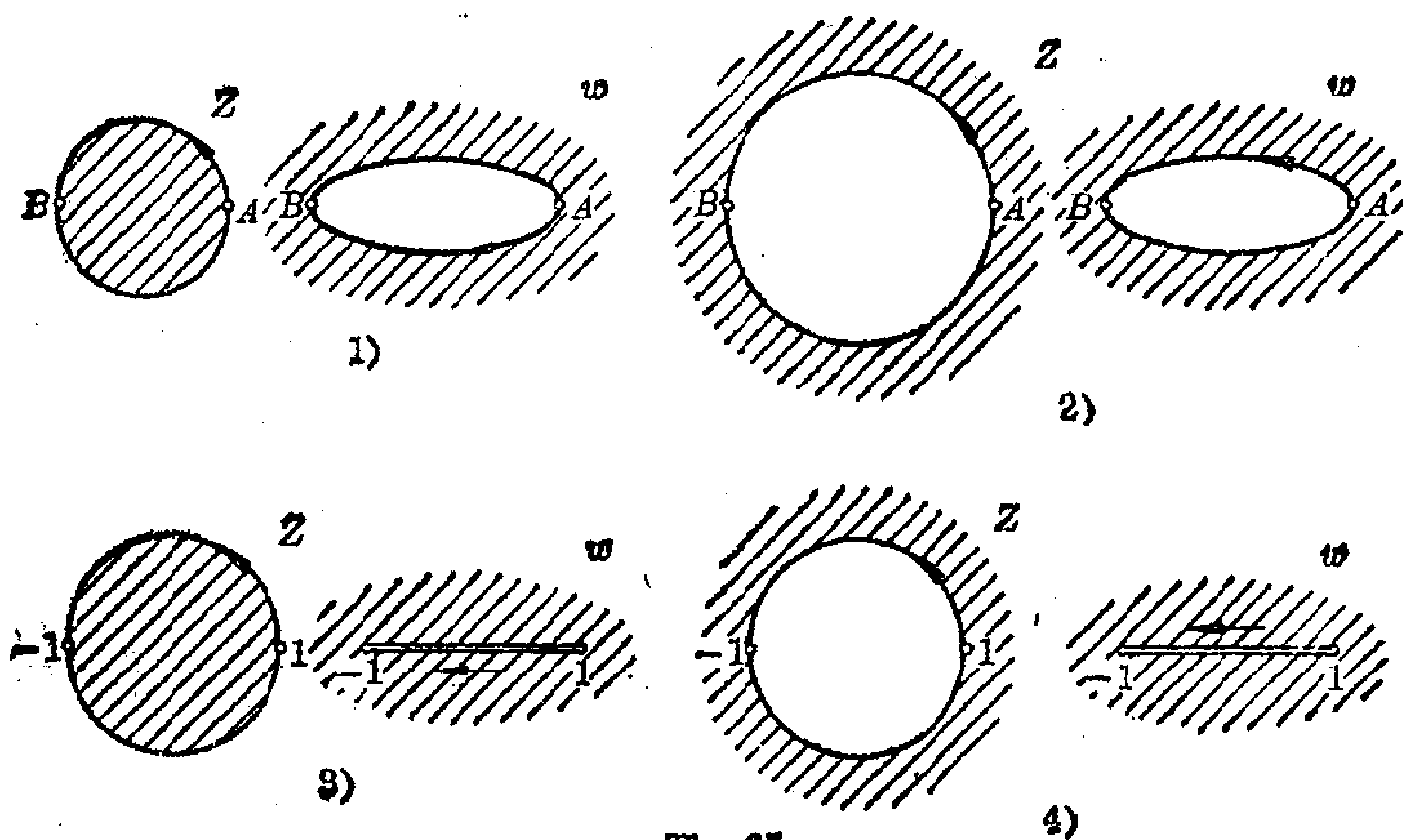


图 65

299. 1) 与 2) 椭圆 $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ 的外部(图 65, 1, 2); 3) 与 4) 沿线段 $[-1, 1]$ 截开的整个平面(图 65, 3, 4); 5) 与 6) 沿实轴上射线 $(-\infty, -1]$ 与 $[1, \infty)$ 截开的整个平面; 7) 下半平面; 8) 上半平面; 9) 上半平面; 10) 椭圆 $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ 内部的上半部分; 11) 椭圆 $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ 内部的下半部分; 12) 沿线段 $\left[1, \frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\right]$ 截开的椭圆 $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ 内部的右半部分; 13) 双曲线 $\frac{u^2}{\sin^2\alpha}-\frac{v^2}{\cos^2\alpha}=1$ 两枝之间的区域. **300**. 1) 圆 $|z|=R$ 对应椭圆 $\frac{4u^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}=1$ (圆 $|z|=1$ 对应线段 $u=0$, $-1\leqslant v\leqslant 1$), 射线 $\arg z=\alpha$ 对应双曲线 $\frac{v^2}{\sin^2\alpha}-\frac{u^2}{\cos^2\alpha}=1$ 的各枝(射线 $\varphi=0$ 与 $\varphi=\pi$ 对应轴 $v=0$, 射线 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 对应射线 $u=0$, $v\geqslant 1$, 射线 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ 对应射线 $u=0$, $v\leqslant -1$); 2) 圆 $|z|=R$ 对应椭圆 $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{a^2}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{a^2}{R}\right)^2}=1$(圆 $|z|=a$ 对应线段 $v=0$, $-a\leqslant u\leqslant a$), 射线 $\arg z=\alpha$ 对应双曲线 $\frac{u^2}{a^2\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{a^2\sin^2\alpha}=1$ 的各枝(射线 $\arg z=0$ 对应射线 $v=0$, $u\geqslant a$, 射线 $\arg z=\pi$ 对应射线 $v=0$, $u\leqslant -a$, 射线 $\arg z=\pm\frac{\pi}{2}$, 对应轴 $u=0$); 3) 共焦椭圆族与双曲线族, 是从关于茹可夫斯基函数(见题 **298**)的相应曲线族通过旋转一个角 γ 以及通过一个扩充因子为 $|c|$ 的相似变换(相似中心在原点)而得到. **301**. 1) $w=\frac{e^{i\alpha}}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})$; 2) $w=\frac{1}{a+b}(z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})$, 在两种情形中, 对于根式的一个分枝, 我们得到一个到单位圆外部的

映射，而对根式的另一个分枝，则为到单位圆内部的映射． **302**．$w=\dfrac{az-b\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}$． **303**．$w=A(z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)})$，其中 A 为一任意复数；$\mu=\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2}}$． **304**．若 $a>0$，则为沿线段 $\left[-1,\ \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$ 截开的整个平面；若 $a<0$，则为沿射线 $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$ 与 $[-1,\ +\infty)$ 截开的整个平面． **305**．$w=\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}}$．

306．$w=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)-\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}$． **307**．$w=\sqrt{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}+a+\frac{1}{a}\right)}$．

308．$w=\dfrac{\sqrt{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)}}{z+\frac{1}{z}}$．

309．$w=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right]}$．

310．$\left[1+\dfrac{h^2}{4(1-h)}\right]\left(w+\dfrac{1}{w}\right)=\left(\dfrac{z}{e^{i\alpha}}+\dfrac{e^{i\alpha}}{z}\right)-\dfrac{h^2}{2(1-h)}$．

311．$w+\dfrac{1}{w}=\dfrac{4a}{(1+a)^2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-2\dfrac{(1-a)^2}{(1+a)^2}$；　$w'(0)=\dfrac{(1+a)^2}{4a}$；

对应于截口之弧的长度为 $2\arccos\dfrac{6a-1-a^2}{(1+a)^2}$；当 $a=3-\sqrt{8}$，此弧长等于 π． **312**．$w+\dfrac{1}{w}=2\dfrac{2\left(z+\frac{1}{z}\right)-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}$；

$w'(0)=\dfrac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{4}$；对应于截口之弧的长度为

$$2\arccos\frac{4-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)},\ 2\pi-2\arccos\frac{-4-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)}.$$

313．1) 圆 C 的象为以点 ±1 为端点的圆弧，它在点 1 与实轴的交角为

2α; 已知圆的外部映射到沿所述弧截开的整个平面上; 2) 圆 C 的象(图 66) 是以 $w=1$ 为尖点的闭曲线(茹可夫斯基翼形); 在该尖点的切线与实轴交成 2α 的角; 在(1)中考虑的以 ±1 为端点的圆弧包含于由茹可夫斯基翼形所界的区域内; 圆 C 的外部映射到茹可夫斯基翼形的外部.

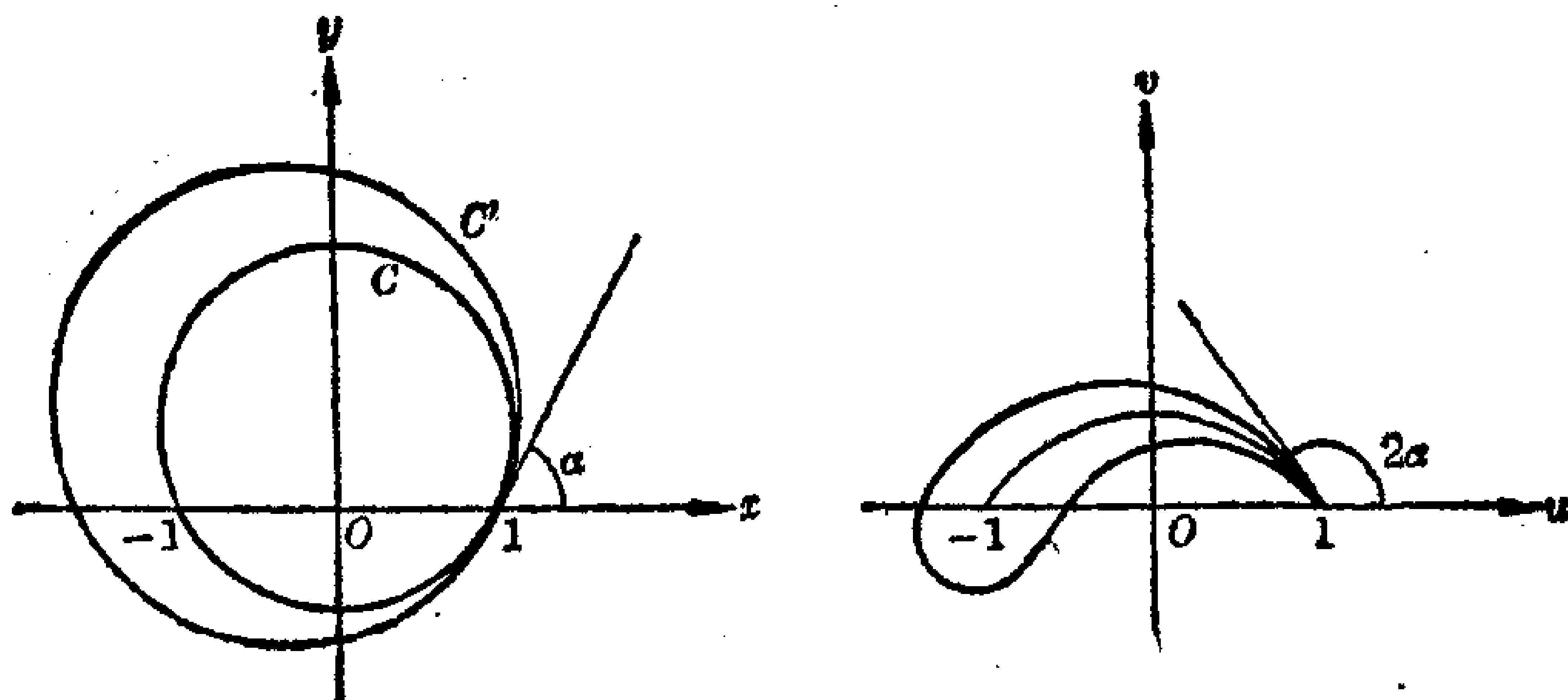


图 66

314. 1) 圆 C 的象是由以 ±1 为公共端点的两条圆弧所组成的闭曲线; 这两条弧在点 1 的切线与实轴分别交成 $2\alpha-\alpha\delta$ 与 $2\alpha+(\pi-\alpha)\delta$ 的角; 圆的外部映射到由上述弧所界的区域外部; 圆 C' 的象(图 67)是有角点 $w=1$ 的闭曲线, 在该角点的切线与实轴分别交成 $2\alpha-\alpha\delta$ 与 $2\alpha+(\pi-\alpha)\delta$ 的角; 圆 C 的象包含于圆 C' 的象所界的区域之内; 圆 C' 的外部映射到该圆之象的外部; 2) 圆 C 的内部映射到由通过点 $-1, 1$ 的圆弧所界的区域外部, 这两个圆在点 1 的切线与实轴的交角分别等于: a) $2\alpha+(\pi-\alpha)\delta$, $2\alpha+(2\pi-\alpha)\delta$, 若函数 $w(z)$ 定义在沿圆 C 的位于下半平面内的弧截开的 z-平面内; b) $2\alpha-\alpha\delta$, $2\alpha-(\pi+\alpha)\delta$, 若定义函数 $w(z)$ 的截口是沿圆 C 的位于上半平面内的弧.

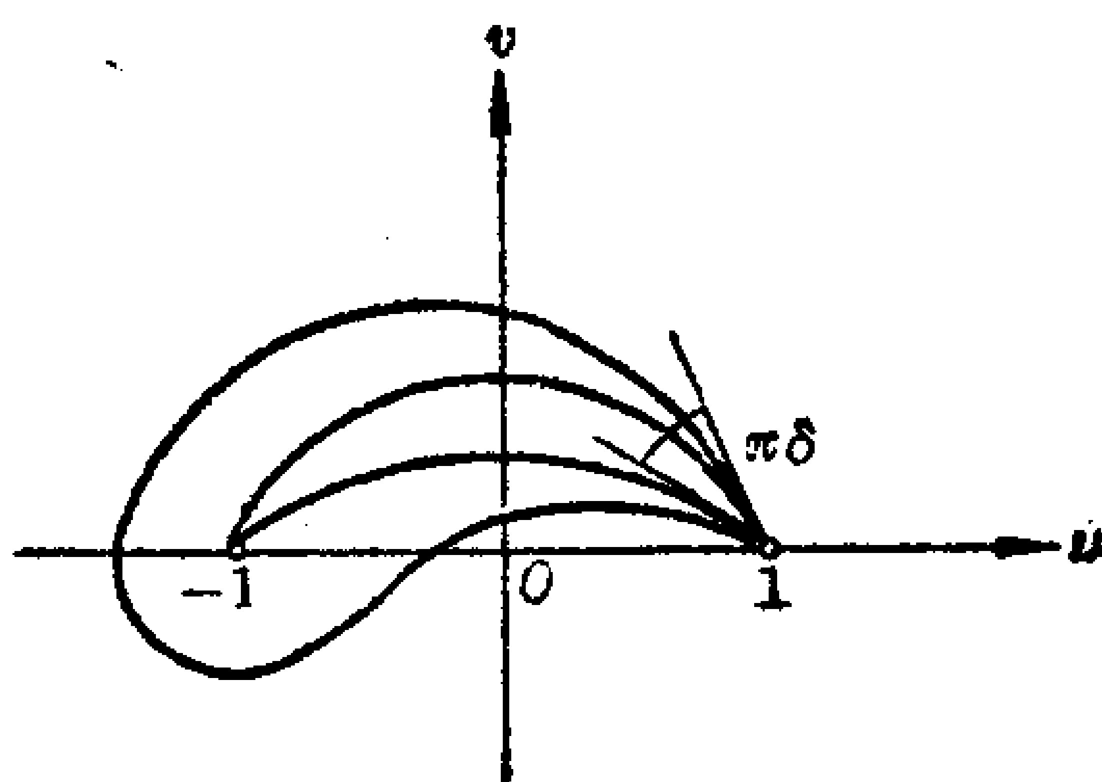


图 67

315. $\dfrac{w-1}{w+1}=\left(\dfrac{ze^{i\gamma}+ie^{i\frac{\beta}{2}}}{ze^{i\gamma}+ie^{-i\frac{\beta}{2}}}\right)^2$, 其中 $\gamma=\alpha$ 若 $\beta>0$, $\gamma=\alpha+\pi$ 若

$\beta<0$. **316**. 沿射线 $y=0,\ x\leqslant-\frac{1}{2}$ 与 $y=0,\ x\geqslant\frac{1}{2}$ 截开的整个平面. **317**. 沿线段 $y=0,\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 截开的半平面 $x>\frac{1}{2}$. **318**. 沿射线 $y=0$, $1\leqslant x<\infty$ 与 $y=0,\ -\infty<x\leqslant-1$ 截开的整个平面. **319**. 沿射线 $y=0$, $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}\leqslant x<\infty$ 截开的角域 $-\frac{\pi}{n}<\arg z<\frac{\pi}{n}$. **320**. 1) 沿射线 $|w|\geqslant\frac{1}{\sqrt[n]{4}}$, $\arg w=\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ 截开的整个平面; 2) $w=\frac{(1+z^n)^{\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{4}\,z}$.

321. 1) $w=\sqrt{z^2+\sqrt{z^4-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{z^2+1}+\sqrt{z^2-1})$;

2) $w=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}}{z}=\frac{1}{z\sqrt{2}}(\sqrt{1+z^2}+\sqrt{1-z^2})$.

322. 1) $w=(a^n+a^{-n})^{-\frac{1}{n}}\sqrt[n]{z^n+z^{-n}+\sqrt{(z^n+z^{-n})^2-(a^n+a^{-n})^2}}$.

解法: 函数 $\zeta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$ 将扇形映射到下半平面, 点 a 与 $ae^{\frac{\pi i}{n}}$ 变成点 $\pm\frac{1}{2}\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)$. 此外, 半平面 $\left(p=\frac{\zeta}{\frac{1}{2}(a^n+a^{-n})}\right)$ 被压缩且映射到单位半圆 $(\tau=p+\sqrt{p^2-1})$. 函数 $w=\sqrt[n]{\tau}$ 即为所求的函数;

2) $w=\left(a^{\frac{n}{2}}+a^{-\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{2}{n}}\left(z^{\frac{n}{2}}+z^{-\frac{n}{2}}+\sqrt{(z^{\frac{n}{2}}+z^{-\frac{n}{2}})^2-(a^{\frac{n}{2}}+a^{-\frac{n}{2}})^2}\right)^{\frac{2}{n}}$.

323. $w=\sqrt{\frac{\sqrt{z^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{z^2+c^2}}}$

与 $w=\frac{1}{\beta}(\sqrt{z^2+c^2}+\alpha+\sqrt{(\sqrt{z^2+c^2}+\alpha)^2-\beta^2})$,

其中 $\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2})$, $\beta=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2})$.

324. $w=\sqrt{\sqrt{z^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}$.

325. $w=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-1}\right)$.

326. $w=\sqrt{\dfrac{\sqrt{z^2-1}+z-i}{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha+1}(z-i)-\sqrt{z^2-1}}}$.

327. 当 $b<1$，$w=\sqrt{\dfrac{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{b_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}-\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}}$；

当 $b=1$，$w=\sqrt{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$；　当 $b>1$，

$$w=\sqrt{-\frac{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\sqrt{b_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}};\quad z_1=\frac{1+z}{1-z},\quad b_1=\frac{1+b}{1-b}.$$

328. $w=\dfrac{\sqrt{\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)+\left(b^2+\dfrac{1}{b^2}\right)}+\sqrt{\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+\left(b^2+\dfrac{1}{b^2}\right)}}{\sqrt{\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)-\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)}}$.

329. $w=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}\left(\sqrt{\sqrt{z^4+4}+2}+\sqrt{\sqrt{z^4+4}-\sqrt{5}}\right)$.

解法：函数 $\zeta=z^2$ 将沿线段 $[0,\ 1+i]$，$[0,\ -1+i]$ 截开的上半平面映射到题 **324** 的区域上，再把该区域映射到上半平面．按对称原理，所得到的函数将已知区域映射到沿某线段截开的平面上．最后再将此线段的外部映射到单位圆的外部． **330.** $w=\dfrac{i}{\sqrt{2}}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{\pi}{\alpha}}+(z+\sqrt{z^2-1})^{-\frac{\pi}{\alpha}}+2\right]^{\frac{1}{2}}=\dfrac{i}{\sqrt{2}}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{\pi}{2\alpha}}+(z+\sqrt{z^2-1})^{-\frac{\pi}{2\alpha}}\right]$.

解法：借助于函数 $\tau=\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}$，其中 $\zeta=z+\sqrt{z^2-1}$ 为茹可夫斯基函数的逆函数，已知区域的上半部分被映射到区域 $|\tau|>1$，$\operatorname{Im}\tau>0$，此区域又由茹可夫斯基函数映射到上半平面．应用对称原理，我们得到双曲线右边一枝的内部到沿射线 $(-\infty,\ -1]$ 截开的整个平面上的映射；而后者很容易映射到上半平面．注．因子 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 不起作用，因为变换 $w'=kw\ (k>0)$ 将半平面映射到自身．

331. $w=\left[e^{-i\alpha}(z+\sqrt{z^2-1})\right]^{\frac{\pi}{2\beta}}-\left[e^{-i\alpha}(z+\sqrt{z^2-1})\right]^{-\frac{\pi}{2\beta}}$，其中

$\beta=\pi-\alpha$. **332**. $w=\left[e^{-i\alpha}\dfrac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}\right]^p$，其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}, p=\dfrac{\pi}{2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a}{b}}$. **333**. 1) 区域用下述方法构造：圆环 $r_1^2<|w|<r_2^2$ 沿实轴上的线段 $r_1^2\leqslant u\leqslant r_2^2$ 截开，而同一圆环的一部分 $(r_1^2<|w|<r_2^2, 0\leqslant\arg w<2\alpha)$ 粘接到截口的下缘；若 $\alpha=\pi$，第二个圆环是完整的，则将其未粘过的边缘粘接到第一个圆环未粘过的边缘(在此情形中，我们得到一个两叶的圆环 $r_1^2<|w|<r_2^2$)；2) 若 $a\leqslant1$，不等式 $|z^2-1|<a$ 定义两个区域(参见题 **39**)，其中每一个都被映射到单叶的圆 $|w-1|<a$ 上；若 $a>1$，不等式 $|z^2-1|<a$ 定义一区域，它被映射到两叶的圆 $|w-1|<a$ 上(为构造这个两叶的圆，只要沿任一半径截开相同的两个圆 $|w-1|<a$，并将第一个圆的截口下缘与第二个圆截口上缘、以及第一个圆截口上缘与第二个圆截口下缘互相粘接起来)。
334. 1) 区域用下述方法构造：椭圆 $\dfrac{4u^2}{\left(R+\dfrac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\dfrac{1}{R}\right)^2}=1$ 的内部沿线段 $[-1, 1]$ 截开，w-平面也沿线段 $[-1, 1]$ 截开，将椭圆的内部粘接到 w-平面上，椭圆截口的上缘粘接于平面截口的下缘，而椭圆截口的下缘粘接于平面截口的上缘；2) 两叶的区域 $\left|\dfrac{w-1}{w+1}\right|<R^2$ (当 $R<1$，不等式 $\left|\dfrac{w-1}{w+1}\right|<R^2$ 定义了一个圆的内部，当 $R=1$ 时则为一半平面，又当 $R>1$ 时为一个圆的外部)。截口及其相应的粘接是沿着联接点 $w=1$ 与区域 $\left|\dfrac{w-1}{w+1}\right|<R^2$ 某边界点的连线进行的。 **335**. 1) 与 2) 黎曼面由两个沿线段 $[-1, 1]$ 截开的 z-平面组成，第一个截口的下缘粘接到第二个截口的上缘，而第一个截口的上缘则粘接到第二个截口的下缘。 **336**. 1) 与 2) 黎曼面由两叶 z-平面组成，这两个平面都分别沿着从点 $-i, 0, i$ 到无穷远点的射线(比如可取平行于实轴的正方向射线)截开。第一个平面截口的下缘粘接于第二个平面相应截口的上缘，反之亦然。 **337**. 黎曼面由沿射线 $(-\infty, -1]$ 与 $[1, \infty)$ 截开的三叶 z-平面组成。沿射线 $(-\infty, -1]$ 的联接按如下方式实现：第一叶截口的上缘联接于第二叶截口的下缘，第二叶截口的上缘则联接于第三叶截口的下缘，而第三叶截口的上缘又联接于第一叶截口的下缘。沿

射线[1, ∞)的联接如下：第一叶截口的下缘联接于第二叶截口的上缘，第二叶截口的下缘则联接于第三叶截口的上缘，而第三叶截口的下缘又联接于第一叶截口的上缘. **338**. 1) 变成极网格 $\rho=$常数，$\theta=$常数；2) 变成螺线 $\rho=e^{\frac{\theta-b}{k}}$（当 $k=0$ 时变成射线 $\theta=b$）；3) 变成角域 $\alpha<\theta<\beta$（当 $\alpha=0$ 与 $\beta=2\pi$，变成沿正实轴截开的平面）；4) 变成沿螺线 $\rho=e^{\theta}$ 截开的整个平面；5) 变成扇形 $\rho<1$，$0<\theta<\alpha$（当 $\alpha=2\pi$，变成沿半径 $v=0$，$0\leqslant u\leqslant 1$ 截开的单位圆）；6) 变成区域 $\rho>1$，$0<\theta<\alpha$（当 $\alpha=2\pi$，变成沿射线 $v=0$，$1\leqslant u<\infty$ 截开的单位圆外部）；7) 变成区域 $e^{\alpha}<\rho<e^{\beta}$，$\gamma<\theta<\delta$（当 $\delta-\gamma=2\pi$，此区域是沿线段 $\theta=\gamma$，$e^{\alpha}\leqslant\rho\leqslant e^{\beta}$ 截开的同心圆环）. **339**. 角域 $0<\arg(z+n)<\frac{\pi}{n}$；带形 $0<y<\pi$. **340**. 1) 变成正交笛卡儿网格 $u=C$，$v=C$； 2) 变成直线； 3) 变成带形 $0<v<\alpha$；4) 变成半带形 $u<0$，$0<v<\alpha$；5) 变成矩形 $\ln r_1<u<\ln r_2$，$0<v<2\pi$. **341**. 5) $b=a\left|\operatorname{th}\frac{\xi_0}{2}\right|$，$l=a\left|\operatorname{tg}\frac{\eta_0}{2}\right|$. **342**. 1) 直线族 $x=C$ 变成焦点在点 ±1 的共焦双曲线族 $\left(\frac{u^2}{\cos^2 C}-\frac{v^2}{\sin^2 C}=1\right)$；直线族 $y=C$ 变成焦点也在点 ±1 的共焦椭圆族 $\left(\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C}+\frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C}=1\right)$；2) 变成上半平面；3) 变成第四象限；4) 变成沿线段[0, 1]截开的右半平面；5) 变成沿实轴上的射线$(-\infty, -1]$与$[1, \infty)$截开的整个平面；6) 变成沿线段$[-\operatorname{ch}h, -1]$与$[1, \operatorname{ch}h]$截开的椭圆 $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 h}+\frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 h}=1$ 的内部. **343**. 1) 变成半带形 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$，$v>0$；2) 变成带形 $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$；3) 变成半带形 $0<u<\frac{\pi}{2}$，$v>0$；4) 变成带形 $-\frac{\pi}{2}<u<0$. **344**. 1) 直线族 $x=C$ 变成焦点在点 ±1 的共焦椭圆族 $\left(\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C}+\frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C}=1\right)$；直线族 $y=C$ 变成焦点也在点 ±1 的共焦双曲线族 $\left(\frac{u^2}{\cos^2 C}-\frac{v^2}{\sin^2 C}=1\right)$；2) 变成沿实轴上的射线$(-\infty, -1]$与$[1, \infty)$截开的整个平面；3) 变成上半平面. **345**. 1) 变成带形 $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$； 2) 变成半带形 $0<v$

$<\frac{\pi}{2}$, $u>0$. **346**. 1) 直线族 $x=C$ 变成以 $w=\pm i$ 为端点的圆弧束；该束包括虚轴上的相应部分；圆束的方程为 $(u-a)^2+v^2=1+a^2$ ($a=\operatorname{ctg} 2C$)；直线族 $y=C$ 变成关于点 $w=\pm i$ 的阿波洛尼厄斯圆族（该族亦包括实轴）；阿波洛尼厄斯圆族的方程为 $u^2+(v-b)^2=b^2-1$, $|b|>1$ ($b=\operatorname{cth} 2C$)；2) 变成沿虚轴上线段 $0\leqslant v\leqslant 1$ 截开的上半平面；3) 变成在虚轴上（沿线段 $-1\leqslant v\leqslant 1$）截开的整个平面；4) 变成半圆 $|w|<1$, $\operatorname{Re} w>0$；5) 变成单位圆. **347**. 1) 变成在实轴上（沿射线 $(-\infty, -1]$ 与 $[1, \infty)$）截开的整个平面；2) 变成在实轴上（沿射线 $[1, \infty)$）截开的右半平面.

348. $w=e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$. **349**. $w=-\operatorname{ch}\frac{(z-1)\pi}{h}$. **350**. $w=e^{\frac{2\pi iz}{z-2}}$.

351. $w=e^{\frac{\pi i(z+2)}{3(z-2)}}$. **352**. $w=\cos\frac{\pi(z+2)}{2z}$. **353**. $w=e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}-1}(\sqrt{z}-i)}$.

354. 1) $w=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\operatorname{th}\frac{\pi i(z+3i)}{4(z-i)}$; 2) $w=-\frac{e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}+2-i}{e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}+2+i}$;

3) $w=\frac{2e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}}{1+e^{\pi i\frac{z+i}{z-i}}}$. **355**. 1) $w=\sqrt{e^{2\pi iz}+e^{-2\pi h}}$; 2) $w=\sqrt{\frac{e^{2\pi iz}+e^{-2\pi h_1}}{e^{2\pi iz}+e^{-2\pi h_2}}}$.

356. $w=\sqrt{\frac{\cos\pi z-\cos\pi h}{1+\cos\pi z}}$. **357**. $w=\sqrt{\frac{\cos\pi z-\cos\pi h_1}{\cos\pi z+\cos\pi h_2}}$.

358. $w=\sqrt{\cos 2z+\operatorname{ch} 2h}$. **359**. $w=\sqrt{\frac{\cos 2z+\operatorname{ch} 2h}{\cos 2z+1}}$.

360. $w=\sqrt{\frac{\cos 2z+\operatorname{ch} 2h_1}{\cos 2z+\operatorname{ch} 2h_2}}$. **361**. $w=\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{z}}{1+\sin\frac{\pi}{z}}}$.

362. $w=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{4\pi}{z}}{\cos\frac{4\pi}{z}-\cos\frac{4\pi}{a}}}$. **363**. $w=\sqrt{\frac{\cos\frac{4\pi}{z}-\cos\frac{4\pi}{b}}{\cos\frac{4\pi}{z}-\cos\frac{4\pi}{a}}}$.

364. $w=\sqrt{\frac{\cos\frac{2\pi}{z}-\cos\frac{2\pi}{b}}{\cos\frac{2\pi}{z}-\cos\frac{2\pi}{a}}}$. **365**. $w=\sqrt{\frac{e^{-\frac{2\pi}{\beta}}-e^{\frac{2\pi i}{z}}}{e^{\frac{2\pi}{\alpha}}-e^{\frac{2\pi i}{z}}}}$.

366. $w=\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{h}-\cos\dfrac{\pi}{z}}{1-\cos\dfrac{\pi}{z}}}$. **367.** $w=i\operatorname{ch}\dfrac{\pi\sqrt{z}}{2a}$, $w=\operatorname{th}^2\dfrac{\pi\sqrt{z}}{4a}$（参见题 **330** 答案中的注）. **368.** $w=\arcsin\dfrac{\sin z}{\operatorname{ch} a}$. 解法：函数 $\sin z$ 将半带形 $y>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ 映射到上半平面，点 $\pm\dfrac{\pi}{2}+ai$ 变成点 $\pm\operatorname{ch} a$. 因此，我们容易看到，函数 $w=\arcsin\dfrac{\sin z}{\operatorname{ch} a}$ 将上述半带形映射到自身，使得射线 $x=\pm\dfrac{\pi}{2}$, $a\leqslant y<\infty$ 对应于射线 $u=\pm\dfrac{\pi}{2}$, $0\leqslant v<\infty$. 反复应用对称原理，可知找出的函数即为所求.

369. $w=\dfrac{b\arcsin\dfrac{i\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} a}}{\arcsin\dfrac{1}{\operatorname{ch} a}}$.

370. $w=\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{\operatorname{ch} a}+\sqrt{\left(\arcsin\dfrac{1}{\operatorname{ch} a}\right)^2-\left(\arcsin\dfrac{\sin z}{\operatorname{ch} a}\right)^2}}{\arcsin\dfrac{\sin z}{\operatorname{ch} a}}$.

371. $w=\sqrt{\dfrac{\arcsin\dfrac{\sin z}{\operatorname{ch} a}-\arcsin\dfrac{\sin p}{\operatorname{ch} a}}{\arcsin\dfrac{\sin q}{\operatorname{ch} a}-\arcsin\dfrac{\sin z}{\operatorname{ch} a}}}$.

372. $w=\arcsin e^{2iz}$. 解法：函数 $\zeta=e^{2iz}$ 将带形 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 映射到上半平面，而函数 $w=\arcsin\zeta$ 将上半平面映射到半带形 $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$, $v>0$. 将带形映射到半带形的函数 $w=\arcsin e^{2iz}$ 分别将射线 $x=0$, $-\infty<y<0$ 与 $x=\dfrac{\pi}{2}$, $-\infty<y<0$ 变成射线 $x=\dfrac{\pi}{2}$, $0<y<\infty$ 与 $x=-\dfrac{\pi}{2}$, $0<y<\infty$. 反复应用对称原理，可知这样得到的函数即为所求.

373. 1) 若 $b<2\pi$, 则为曲线矩形 $1<\rho<e^{\gamma}$, $0<\theta<b$; 若 $b=2\pi$, 则为沿线段 $[1, e^{\gamma}]$ 截开的圆环 $1<\rho<e^{\gamma}$; 若 $b=2k\pi(k=2, 3, \cdots)$, 则为由 k 个沿线段 $[1, e^{\gamma}]$ 截开并相互粘接的圆环 $1<\rho<e^{a}$ 所组成的多叶区域，其中第一个圆环的截口下缘联接于第二个圆环的截口上缘，第二个圆环的截口下缘联接于第三个圆环的截口上缘，如此等等；若 $b=2k\pi+\beta$

$(k=2, 3, \cdots, 0<\beta<2\pi)$，则必须将曲线矩形 $1<\rho<e^a, 0<\theta<\beta$ 沿线段 $[1, e^a]$ 联接到所作黎曼面最后一个圆环的未粘接过的下缘上；2) 由沿线段 $[1, e^a]$ 截开的圆环 $1<\rho<e^a$ 所组成的无穷多叶区域，其联接方式如上；3) 由沿线段 $[1, e^a]$ 截开的圆环 $1<\rho<e^a$ 所组成的无穷多叶区域，诸圆环用整数 $(\cdots-2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$ 编号并相互联接，使得每一个圆环截口的下缘联接于下一个较大数号的圆环截口的上缘. 此区域是函数 $\operatorname{Ln} w$ 的黎曼面位于圆环 $1<\rho<e^a$ 之上的部分. **374**. 1) 由联接两个右半平面而得到的两叶区域，每一个右半平面沿着射线 $v=0$, $1\leqslant u<\infty$ 截开，截口的边缘交叉联接，即第一叶的下缘粘接于第二叶的上缘，反之亦然；2) 由沿实轴上的射线 $-\infty<u\leqslant-1$ 与 $1\leqslant u<\infty$ 截开的两个平面所组成的两叶区域，沿截口 $-\infty<u\leqslant-1$ 交叉粘接，截口 $1\leqslant u<\infty$ 的边缘则不粘接. **375**. 由沿虚轴(沿线段 $-1\leqslant v\leqslant1$) 截开的两个平面所组成的两叶区域，其中第一叶截口的左缘联接于第二叶截口的右缘，其余的缘则不粘接. **376**. 黎曼面有无穷多叶，且有两个位于点 $w=0$ 与 $w=\infty$ 之上的对数枝点. 对应于沿正实轴截开的 w-平面上诸叶的 z-平面内的单叶区域，由诸圆 $2k\pi(x^2+y^2)+y=0(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 所界. **377**. $r_1=\infty$, $r_2=r_3=1$. 圆 $|z|<r_1$ 的象是移去点 $w=-1$ 的整个平面；圆 $|z|<r_2$(以及圆 $|z|<r_3$) 的象是半平面 $\operatorname{Re} w>-\frac{1}{2}$. **378**. 1) $r_1=\frac{1}{2}$; 2) $r_1=\frac{1}{2|a|}$; 3) $r_1=1$. **383**. 1) $r_2=\frac{1}{4}$; 2) $r_2=\frac{1}{4|a|}$; 3) $r_2=2-\sqrt{3}$. **384**. $r_1=\pi$, $r_2=1$. **385**. 1) $r_3=\frac{1}{2}$; 2) $r_3=\frac{1}{2|a|}$; 3) $r_3=1$.

第三章

388. 1) $I_1=2+i$, $I_2=1+\frac{i}{2}$; 2) $I_1=\frac{i\pi}{2}$, $I_2=-\frac{\pi}{2}$; 3) $I_1=i\pi R^2$, $I_2=-\pi R^2$. **389**. 1) $\sqrt{5}\left(1-\frac{i}{2}\right)$; 2) 2; 3) $2i$; 4) 0. **390**. πi. **391**. $\frac{4}{3}$. **392**. 1) 若 $n\neq-1$, $\frac{R^{n+1}}{n+1}[(-1)^{n+1}-1]$; 若 $n=-1$, πi; 2) 与 3) 若 $n\neq-1$, 0; 若 $n=-1$, $2\pi i$. **393**. 1) -2

$(1-i)$; 2) $2(1-i)$; 3) $-2(1+i)$; 4) -4; 5) $4i$. **394**. 1) $2\pi i$; 2) -2π; 3) $2\pi Ri$; 4) $2\pi Ri$. **395**. 1) 若 $n\neq-1$, $\frac{2\pi i}{n+1}$; 若 $n=-1$, $-2\pi^2$; 2) 若 $n\neq-1$, $(-1)^{n+1}\frac{2\pi i}{n+1}$; 若 $n=-1$, $-2\pi^2$. **396**. 若 $\alpha\neq-1$, $\frac{e^{2\alpha\pi i}-1}{1+\alpha}$; 若 $\alpha=-1$, $2\pi i$. **398**. 1) $|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{2}$; 2) $\sin p\alpha\geqslant0$.

412. 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) 0. **413**. 若围道 C 包含点 0 于其内部而不包含 1 与 -1, 则 $I=-2\pi i$; 若 C 仅包含点 -1 或 1 之一而不包含点 0, 则 $I=\pi i$. 于是, 显然积分能有五个不同的值($-2\pi i$; $-\pi i$; 0; πi; $2\pi i$). **414**. 若 $n>1$, 2^n-1; 若 $n=1$, 2. **415**. $\frac{\pi i}{2}$. **416**. $\frac{\sin a}{a}$. **417**. $e^a\left(1+\frac{a}{2}\right)$. **418**. 1) 1; 2) $-\frac{e}{2}$; 3) $1-\frac{e}{2}$. **420**. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $1-\frac{2i}{3}$. **425**. $R=1$. **426**. ∞. **427**. 0. **428**. 2. **429**. e. **430**. 1. **431**. 1. **432**. 1. **433**. $\frac{1}{4}$. **434**. $\frac{1}{e}$. **435**. 若 $|a|\leqslant1$, 1; 若 $|a|>1$, $\frac{1}{|a|}$. **436**. 1. **437**. 1) R; 2) $\frac{R}{2}$; 3) ∞; 4) 0; 5) R^k; 6) 若 $|z_0|\leqslant1$, R; 若 $|z_0|>1$, $\frac{R}{|z_0|}$. **438**. 1) $R\geqslant\min(r_1, r_2)$; 2) $R\geqslant r_1r_2$; 3) $R\leqslant\frac{r_1}{r_2}$. **439**. 1) $\frac{z}{(1-z)^2}$; 2) $-\ln(1-z)$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$; 4) $\ln(1+z)$. **440**. 在所有点上都发散. **441**. 除 $z=1$ 外在所有点上都收敛(非绝对). **442**. 绝对收敛. **443**. 除 $z=-1$ 外在所有点上收敛(非绝对). **444**. 除 $z=e^{2k\pi i/p}$ 外($k=0, 1, \cdots, p-1$)在所有点上收敛(非绝对). **445**. 除 $z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ 与 $z=-1$ 外在所有点上收敛(非绝对). **446**. 绝对收敛. **447**. 例如 $c_n=(-1)^n$. **449**. 解法: 首先考察在点 $z=1$ 上的收敛性. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 中带有分母 k^2, k^2+1, $\cdots$, $(k+1)^2-1$ 的项有符号 $(-1)^k$; 记这些项之和为 $(-1)^k\sigma_k$ 并证明 σ_k 单调趋于 0. 我们有 $0<\sigma_k<\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2}=\frac{2k+1}{k^2}\to0$, 当 $k\to\infty$. 此外, 差 $\sigma_k-\sigma_{k+1}=\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]+\left[\frac{1}{k^2+1}-\frac{1}{(k+1)^2+1}\right]+\cdots+$

$\left[\frac{1}{(k+1)^2-1}-\frac{1}{(k+2)^2-3}\right]-\frac{1}{(k+2)^2-2}-\frac{1}{(k+2)^2-1}>(2k+1)$

$\cdot\left[\frac{1}{(k+1)^2-1}-\frac{1}{(k+2)^2-3}\right]-\frac{1}{(k+2)^2-2}-\frac{1}{(k+2)^2-1}>0$. 这

证明已知级数当 $z=1$ 时收敛. 若 $|z|=1$ 而 $z\neq1$, 则按提示, 利用题 **90** 的收敛性检验法, 令 $a_n=(-1)^{[\sqrt{n}]}z^n$, $b_n=\frac{1}{n}$. 前两个条件显然成立; 为证明第三个条件, 我们来估计 S_n. $S_n=-z-z^2-z^3+z^4+\cdots+(-1)^{[\sqrt{n}]}z^n=-z\frac{1-z^3}{1-z}+z^4\frac{1-z^5}{1-z}-z^9\frac{1-z^7}{1-z}+\cdots\pm z^{p^2}\frac{1-z^{2p+1}}{1-z}\mp(z^{p+1}+\cdots+z^n)$, 其中 $p=[\sqrt{n}]-1$. 由此, $|S_n|<\frac{2p}{|1-z|}+2p+3$; 故对每个 z 存在 k, 使得 $|S_n|<kp<k\sqrt{n}$, 从而证毕.

452. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **453**. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$.

454. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$. **455**. $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$.

456. $a^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n$, 其中 $\binom{\alpha}{0}=1$, $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ $(n=1, 2, \cdots)$; $R=|a|$.

457. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{z}{i}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots2n}\left(\frac{z}{i}\right)^n\right]$, $R=1$.

458. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^nz^n}{b^{n+1}}$, $R=\left|\frac{b}{a}\right|$. **459**. $\frac{i}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3i)^n-(2+3i)^n}{13^n}\cdot z^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$, 其中 $c_n=\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^m\binom{n}{2m+1}2^{n-2m-1}3^{2m}$, $R=\sqrt{13}$.

460. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^n$, $R=1$. **461**. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

462. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$.

463. $z+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}z^{2n+1}$, $R=1$.

464. $\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{z^n}{n}$, $R=1$. **465**. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $R=\infty$.

466. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $R=\infty$.

467. $\frac{1}{3}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$, $R=3$.

468. $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}[(z-1)^{2n}+(z-1)^{2n+1}]$, $R=2$.

469. $\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-3)(z-1)^n}{2^{n+2}}$, $R=2$.

470. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}(z-1)^n$, $R=1$.

471. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{n}$, $R=1$.

472. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(z-1)^{2n}$, $R=\infty$. 473. $1+z^2+\frac{z^4}{3}+\cdots$.

474. $1-\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{96}+\cdots$. 475. $1+z^2-\frac{1}{2}z^3+\frac{5}{6}z^4-\frac{3}{4}z^5+\cdots$.

476. $1+z+z^2+\frac{5}{6}z^3-\frac{5}{8}z^4+\frac{13}{30}z^5+\cdots$.

477. $z+\frac{z^2}{2!}+\frac{2z^3}{3!}+\frac{9z^5}{5!}+\cdots$.

478. $\ln 2+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^4}{192}+\cdots=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$; $c_0=\frac{1}{2}$, c_0+nc_1 $+n(n-1)c_2+\cdots+n!c_{n-1}+2n!c_n=1$, $n\geqslant 1$.

479. $$2\left[\frac{z^2}{2}+\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3}+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{z^4}{4}+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)\frac{z^n}{n}+\cdots\right].$$

480. $$-4\pi^2+2\left[-2\pi iz+(1-2\pi i)\frac{z^2}{2}+\left(1+\frac{1}{2}-2\pi i\right)\frac{z^3}{3}+\cdots+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-2\pi i\right)\frac{z^n}{n}+\cdots\right].$$

481. $$z^2-\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{z^4}{2}+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{z^6}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{z^{2n}}{n}+\cdots].$$

482. $2\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\frac{z^5}{5}+\cdots\right.$

$$\left.+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right].$$

483. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}\right]z^n.$

487. $1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}z^{2k}}{(2k)!},\ R=\pi.$

488. 1) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}B_{2k}}{2k(2k)!}z^{2k},\ R=\pi;$

2) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1},\ R=\frac{\pi}{2};$

3) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_{2k}}{2k(2k)!}z^{2k},\ R=\frac{\pi}{2};$

4) $1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2^{2k}-2)B_{2k}}{(2k)!}z^{2k},\ R=\pi.$

489. $c_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],n\geqslant 0,\ R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

490. $c_0=\frac{A}{\alpha},\quad c_1=\frac{\alpha B-\beta A}{\alpha^2},\quad c_2=\frac{\alpha^2C-\alpha\beta B+(\beta^2-\alpha\gamma)A}{\alpha^3};$

$$\alpha c_n+\beta c_{n-1}+\gamma c_{n-2}+\delta c_{n-3}=0\quad(n=3,\ 4,\ \cdots).$$

496. $\frac{e^{\frac{-zt}{1-t}}}{1-t};\ L_{n+1}(z)-(2n+1-z)L_n(z)+n^2L_{n-1}(z)=0\quad(n\geqslant 1).$

497. $z+z^3+\frac{z^5}{4\times 5}+\frac{z^9}{4\times 5\times 8\times 9}+\cdots$

$$+\frac{z^{4n+1}}{4\times 5\times 8\times 9\cdots 4n(4n+1)}+\cdots;\quad |z|<\infty.$$

498. $z-\frac{n(n+1)-1\times 2}{3!}z^3+\frac{[n(n+1)-1\times 2][n(n+1)-3\times 4]}{5!}z^5+\cdots$

$$+\frac{[n(n+1)-1\times 2][n(n+1)-3\times 4]\cdots[n(n+1)-(2k-1)2k]}{(2k+1)!}z^{2k+1}$$

$+\cdots;\ |z|<1.$ 499. $\frac{z}{1-z^2}.$ 500. $1-\frac{m^2}{2!}z^2+\frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}z^4-\cdots$

$$+(-1)^n\frac{m^2(m^2-2^2)\cdots[m^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}z^{2n}+\cdots.$$

501. $w=F(a,\ b,\ c,\ z)=1+\frac{ab}{1\times c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2+\cdots$

$$+\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n;\quad |z|<1.$$

503. 解法：微分超几何方程，我们得到一个为函数$\zeta=\frac{d}{dz}F(a,b,c,z)$所满足的方程：

$$z(1-z)\frac{d^2\zeta}{dz^2}+[(c+1)-(a+b+3)z]\frac{d\zeta}{dz}-(a+1)(b+1)\zeta=0. \tag{1}$$

因函数$F(a,\ b,\ c,\ z)$在$z=0$解析，函数$\frac{d}{dz}F(a,\ b,\ c,\ z)$作为函数$F(a,\ b,\ c,\ z)$的导函数也在点$z=0$解析，又因方程(1)的在$z=0$解析的任何解必有形式$kF(a+1,\ b+1,\ c+1,\ z)$（参见题**501**），其中$k$为一常数，从而推出$\frac{d}{dz}F(a,\ b,\ c,\ z)=kF(a+1,\ b+1,\ c+1,\ z)$．令$z=0$，我们求得$k=\frac{ab}{c}$．**505**．1) 4; 2) 15; 3) 3．**506**．1) $k+l$阶零点；2) 阶不小于$\min(k,\ l)$的零点；3) 若$k>l$，$k-l$阶零点；若$k=l$，正则的非零点；若$k<l$，奇点．**507**．点$z=\pm3i$为一阶零点．**508**．点$z=\pm3i$为一阶零点；无穷远点为二阶零点．**509**．$z=0$为二阶零点；$z=k\pi(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为一阶零点．**510**．$z=\pm2$为三阶零点；$z=2k\pi i(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为一阶零点．**511**．$z=2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为二阶零点．**512**．$z=\pm\pi$为三阶零点；形如$z=k\pi$ $(k=0,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots)$的所有其余的点为一阶零点．**513**．$z=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为一阶零点．**514**．无零点．**515**．$z=k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为三阶零点．**516**．$z=0$为二阶零点；$z=k\pi(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为三阶零点．**517**．$z=0$为三阶零点；$z=\sqrt[3]{k\pi}$与$z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{k\pi}(1\pm i\sqrt{3})(k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为一阶零点．**518**．$z=(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为三阶零点．**519**．$z=\sqrt[3]{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$与$z=\frac{1}{2}\sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}(1\pm i\sqrt{3})(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$为一阶零点．**520**．$z=4$为一个分枝的三阶零点．**521**．此处给出两个函数；其中之

一在点 $z=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 有二阶零点，而另一个在点 $z=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 有二阶零点($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$)。 **522**. 只有无穷远点才能为极限点. **523**. 1), 2) 与 3) 不存在; 4) 存在 $\left(f(z)=\frac{1}{z+1}\right)$. **524** 1) 存在 $(f(z)=z^2)$; 2) 不存在. **525**. 与唯一性定理不矛盾，因点 $z=1$ 并不属于函数的解析性区域. **526**. 解法: 从展开式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 推出 $u(x,y)=\frac{c_0+\bar{c}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{c_n[(x-x_0)+i(y-y_0)]^n+\bar{c}_n[(x-x_0)-i(y-y_0)]^n\}$. 令 $x=x_0+\frac{\zeta-z_0}{2}$, $y=y_0+\frac{\zeta-z_0}{2i}$, 其中 ζ 充分接近于 z, 我们得到(试证明之!) $u\left(x_0+\frac{\zeta-z_0}{2},\ y_0+\frac{\zeta-z_0}{2i}\right)=\frac{1}{2}[\bar{c}_0+f(\zeta)]$, 再以 z 置换 ζ, 即得所要求的等式. **528**. z^2+2+Ci. **529**. $ze^z-\frac{i}{z}+Ci$. **530**. $(1+i)z-3i+C$. **531**. $\sin z-\operatorname{ch} z+C$($C$ 为任意实常数). **538**. 2) $2\pi^2M$.

第 四 章

543. 对 $|z|<2$, $-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$; 对 $|z|>2$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$.

544. 对 $|z|<|a|$, $\frac{(-1)^k}{a^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{z}{a}\right)^n$; 对 $|z|>|a|$, $\frac{1}{z^k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k-1}\left(\frac{a}{z}\right)^n$. **545**. 对 $|z|<1$, $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$; 对 $0<|z-1|<1$, $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$; 对 $|z|>1$, $-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$. **546** 对 $|z|<|a|$, $\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{a^{n+1}b^{n+1}}z^n$; 对 $0<|z-a|<|b-a|$, $\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\right]$; 对 $|z|>|b|$, $\frac{1}{b-a}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{z^n}$; 对 $|a|<|z|<|b|$, $\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{b^{n+1}}+\frac{a^n}{z^{n+1}}\right)$. **547**. 对 $0<|z-2|<\sqrt{5}$, $\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$; 对 $1<|z|<$

2, $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$. **548** 对 $0<|z-i|<2$, $-\frac{i}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n(z-i)^n}{2^{n+4}}$; 对 $|z|>1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{z^{2n+2}}$.

549 对 $|z|>|b|$, $\pm\left[z-\frac{1}{2}(a+b)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}\right]$, 其中 $c_{-(n-1)}=(-1)^n$
$\left[\binom{\frac{1}{2}}{n}b^n+\binom{\frac{1}{2}}{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{1}b^{n-1}a+\binom{\frac{1}{2}}{n-2}\binom{\frac{1}{2}}{2}b^{n-2}a^2+\cdots+\binom{\frac{1}{2}}{n}a^n\right]$.

550 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 其中 $c_{-n}=\frac{(-1)^n i}{\sqrt{2}}\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n+m}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{m}2^{-m}\right]$, $c_n=2^{-n}c_{-n}(n=1,2,\cdots)$, $c_0=\frac{i}{\sqrt{2}}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{m}^2 2^{-m}\right]$.

551 对 $0<|z|<\infty$, $\frac{1}{2}+z+z^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!z^n}$. **552** 对$0<|z-1|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(z-1)^n}$; 对 $|z|>1$, $1-\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$, 其中 $c_{-n}=-1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\binom{n-1}{k}(n=2,3,\cdots)$. **553** 对 $0<|z-2|<\infty$, $\cos 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k-1}4^{2k-1}\sin 1}{(2k-1)!(z-2)^{4k-2}}+\frac{(-1)^k 4^{2k}\cos 1}{(2k)!(z-2)^{4k}}\right]$. **554** 对 $0<|z-1|<\infty$, $(z-1)+2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{k-1}\left[\frac{1}{(2k-1)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right]}{(z-1)^{2k-1}}+\frac{2(-1)^k}{(2k+1)!(z-1)^{2k}}\right]$. **555** $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}$, 其中 $c_n=c_{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}(n=0,1,2,\cdots)$. **556** $\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-2n}z^{-2n}$, 其中 $c_{2n}=c_{-2n}=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!}$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

557 对 $0<|z-1|<\infty$, $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}$; 对 $|z|>1$, $-\sin 1-\frac{\cos 1}{z}+\frac{\sin 1-2\cos 1}{2!z^2}+\frac{6\sin 1-5\cos 1}{3!z^3}+\cdots$. **558** 对 $0<|z|<\pi$,

$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}z^{2n-1}$，其中 B_{2n} 为伯努利数(参见题485)；对 $\pi<|z|<2\pi$， $\frac{3}{z}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}+\frac{2}{\pi^{2n}}\right]z^{2n-1}$.

559. 对 $|z|>\max(|a|, |b|)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{nz^n}$. **560**. 对 $|z|>2$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$，其中 $c_{-2k}=-i\left(2^{2k-1}-\frac{2^{2k-3}}{3}+\frac{2^{2k-5}}{5}-\cdots+(-1)^{k+1}\frac{2}{2k-1}\right)$，$c_{-(2k+1)}=2c_{-2k}(k=1, 2, \cdots)$；对 $1<|z|<2$，$i\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$，其中 $c_{-1}=2i\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$，$c_{-2k}=2^{2k}i\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)2^{2m+1}}\right)$，$c_{-(2k+1)}=2c_{-2k}\ (k=1, 2, \cdots)$.

561. 1) 是；2) 是；3) 否(点 $z=1$ 非孤立奇点)；4) 否；5) 否；6) 否；7) 否；8) 否(在内圆包含点 $z=0$ 的任何圆环内，函数不连续)；9) 否；10) 是；11) 是，若 α 为整数或零；否，在所有其余的情形. **562**. 1) 否；2) 是，两枝都可展开；3) 否；4) 是，所有三个分枝都可展开；5) 否；6) 四枝中由条件 $\sqrt{1+\sqrt{1}}=\pm\sqrt{2}$ 确定的两枝有展开式；7) 否；8) 否；9) 否；10) 是，所有六个分枝都可展开；11) 否；12)，13)，14) 是，任何分枝都能展开；15) 否；16) 否；17) 除了由值 $\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ 确定的两枝外，所有分枝都能展开. **565**. $z=0$，$z=\pm1$ 为一阶极点，$z=\infty$ 为正则点(三阶零点). **566**. $z=\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$，$z=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$ 为一阶极点；$z=\infty$ 为正则点. **567**. $z=1$ 为二阶极点；$z=\infty$ 为三阶极点. **568**. $z=0$ 为一阶极点；$z=\pm2i$ 为二阶极点；$z=\infty$ 为正则点(五阶零点). **569**. $z=\pm i$ 为一阶极点；$z=\infty$ 为本性奇点. **570**. $z=\infty$ 为本性奇点. **571**. $z=\infty$ 为本性奇点. **572**. $z=2k\pi i\ (k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点；$z=\infty$ 为极点的极限点. **573**. $z=0$ 为二阶极点；$z=2k\pi i\ (k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点；$z=\infty$ 为极点的极限点. **574**. $z=(2k+1)\pi i(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点；$z=\infty$ 为极点的极限点. **575**. $z=0$ 为三阶极点；$z=2k\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3})\ (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点；$z=\infty$ 为极点的极限点. **576**. $z=k\pi i(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点；$z=\infty$ 为极点的极限点. **577**. $z=0$ 为本性奇点；

$z=\infty$ 为正则点. **578**. $z=0$ 为本性奇点; $z=\infty$ 为一阶极点. **579**. $z=1$ 为本性奇点; $z=\infty$ 为正则点. **580**. $z=0$ 为本性奇点; $z=\infty$ 为本性奇点. **581**. $z=1$ 为本性奇点; $z=2k\pi i(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; $z=\infty$ 为极点的极限点. **582**. $z=k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; $z=\infty$ 为极点的极限点. **583**. $z=0$ 为二阶极点; $z=\infty$ 为本性奇点. **584**. $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; $z=\infty$ 为极点的极限点. **585**. $z=(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为二阶极点; $z=\infty$ 为极点的极限点. **586**. $z=0$ 为三阶极点; $z=k\pi(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; $z=\infty$ 为极点的极限点. **587** $z=k\pi(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; $z=\infty$ 为极点的极限点. **588**. $z=k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; $z=\infty$ 为极点的极限点. **589** 若 $a\neq m\pi+\frac{\pi}{2}(m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$, 则 $z=2k\pi+a$ 与 $z=(2k+1)\pi-a(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为简单极点; 若 $a=m\pi+\frac{\pi}{2}$, 则对偶数 m, $z=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 为二阶极点, 而对奇数 m, $z=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$ 为二阶极点; 在所有情形中 $z=\infty$ 都为极点的极限点。 **590** 若 $a\neq m\pi(m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$, 则 $z=(2k+1)\pi\pm a(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; 若 $a=m\pi$, 则对奇数 m, $z=2k\pi$ 为二阶极点, 而对偶数 m, $z=(2k+1)\pi$ 为二阶极点; 在所有情形中 $z=\infty$ 都为极点的极限点. **591**. $z=1$ 为本性奇点, $z=\infty$ 为正则点(一阶零点). **592**. $z=-2$ 为二阶极点; $z=2$ 为本性奇点; $z=\infty$ 为三阶极点. **593** 与 **594**. $z=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为一阶极点; $z=0$ 为极点的极限点; $z=\infty$ 为一阶极点. **595**. $z=0$ 为本性奇点; $z=\infty$ 为正则点(一阶零点). **596**. $z=0$ 为本性奇点; $z=\infty$ 为本性奇点. **597**. $z=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为本性奇点; $z=0$ 为本性奇点的极限点; $z=\infty$ 为本性奇点. **598**. $z=\frac{2}{(2k+1)\pi}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为本性奇点; $z=0$ 为本性奇点的极限点; $z=\infty$ 为正则点. **599** $z=\frac{1}{k\pi}(k=\pm1, \pm2, \cdots)$ 为本性奇点; $z=0$ 为本性奇点的极限点; $z=\infty$ 为本性奇点. **600**. $z=\frac{2}{(2k+1)\pi}(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 为

本性奇点; $z=0$ 为本性奇点的极限点; $z=\infty$ 为正则点. **601**. 对一枝为正则点, 对另一枝为一阶极点. **602**. 对一枝为一阶极点, 对其余五枝为正则点. **603**. 对一枝为正则点,对另一枝为二阶极点. **604**. 对一枝为正则点, 对另一枝为本性奇点. **605**. 对两枝都为一阶极点. **606**. 对一枝, $z=\left(1+\frac{1}{k\pi}\right)^2$ 为正则点, 而对另一枝, 则为一阶极点; $z=1$ 对一枝为正则点, 而对另一枝为非孤立奇点(极点的极限点). **607**. 所给各点对一枝都为正则点, 而对另一枝为一阶极点. **608**. 对一枝为正则点, 对另一枝为本性奇点. **609**. 1) 对所有各枝都为一阶极点; 2) 对分枝的一无穷集合,为正则点, 对其余的分枝的无穷集合, 为一阶极点. **610**. 对分枝的一无穷集合,为正则点,对其余的分枝的无穷集合,为本性奇点. **611**. 1) 若 $n\neq m$,点 $z=\infty$ 为 $k=\max(n, m)$ 阶极点;若 $n=m$, $z=\infty$ 或为阶 $k\leqslant n$ 的极点,或为正则点; 2) 若 $n>m$, 为 $(n-m)$ 阶极点,若 $n\leqslant m$, 则为正则点; 若 $n<m$,则 $z=\infty$ 为 $(m-n)$ 阶零点; 3) $(n+m)$ 阶极点. **613**. 例: 1) z^2; 2) $\frac{1}{z^2}+z$; 3) $\frac{1}{z^n-1}$.

614. 1) $\frac{a}{z-\alpha}(a\neq 0)$ 或 $az+b(a\neq 0)$; 2) $\frac{a}{(z-\alpha)^n}(a\neq 0)$ 或 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n(a_n\neq 0)$; 3) $\frac{1}{z^2}+C$; 4) $\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_{n+m}z^{n+m}}{z^n}$ $(a_0\neq 0,\ a_{n+m}\neq 0)$; 5) $\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}$(对 $k\neq l$, $\alpha_k\neq\alpha_l$, 且诸数 a_m 中至少一个不为零)或 $\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{n-1})}$ $(a_n\neq 0$, 对 $k\neq l$, $\alpha_k\neq\alpha_l)$. **616**. 1) z_0 为可去奇点; 2) 若 $\varphi(z)$ 在点 z_0 的邻域内单叶, z_0 为 n 阶极点, 若 $\varphi(z)$ 在该点邻域内为 m 叶, 则为 nm 阶极点; 3) z_0 为本性奇点. **617**. 1) 若 γ' 为直线段, 点 z_0^* 为 n 阶极点,若 γ' 为圆弧,则 z_0^* 为重数为 n 的正则点, 即 $f(z)-f(z_0^*)=(z-z_0^*)^n\varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在点 z_0^* 的邻域内解析且 $\varphi(z_0^*)\neq 0$. 若 $z_0^*=\infty$,则上述条件写成 $f(z)-f(\infty)=z^{-n}\varphi(z)$ 的形式,其中 $\varphi(z)$ 在 ∞ 解析且 $\varphi(\infty)\neq 0$; 2) z_0^* 为本性奇点. **619**. 1) -1; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **620**. 1) 本性奇点 $z=\infty$; 例外值为 0(以及 ∞!); 当 $x\to-\infty$ 时 $e^z\to 0$(当 $x\to+\infty$ 时 $e^z\to\infty$); 2) 本性奇点 $z=0$; 例外值为 0(以及 ∞); 例如, 当 z 沿路径 $y=0$,

$x<0$ 趋于 0 时，$e^{\frac{1}{z}}\to 0$（当 z 沿路径 $y=0$，$x>0$ 趋于 0 时，$e^{\frac{1}{z}}\to\infty$）；
3) 本性奇点 $z=0$；无例外值(除 ∞ 外)；当 $x=0$，$y\to 0$ 时 $\cos\frac{1}{z}\to\infty$；
4) 本性奇点 $z=\infty$；例外值为 i 与 $-i$。 **621**．$\operatorname*{res}_{z=\pm 1}[f(z)]=-\frac{1}{2}$；
$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=1$；$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=0$。 **622**．$\operatorname*{res}_{z=i}[f(z)]=-\frac{i}{4}$；$\operatorname*{res}_{z=-i}[f(z)]$
$=\frac{i}{4}$；$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=0$。 **623**．$\operatorname*{res}_{z=-1}[f(z)]=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$；
$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$。 **624**．$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=1$；
$\operatorname*{res}_{z=\pm 1}[f(z)]=-\frac{1}{2}$；$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=0$。 **625**．$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=0$；$\operatorname*{res}_{z=1}[f(z)]$
$=1$；$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=-1$。 **626**．$\operatorname*{res}_{z=-1}[f(z)]=2\sin 2$；$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=-2\sin 2$。
627．$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=\frac{1}{9}$；$\operatorname*{res}_{z=3i}[f(z)]=-\frac{1}{54}(\sin 3-i\cos 3)$；$\operatorname*{res}_{z=-3i}[f(z)]$
$=-\frac{1}{54}(\sin 3+i\cos 3)$；$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=\frac{1}{27}(\sin 3-3)$。
628．$\operatorname*{res}_{z=\frac{2k+1}{2}\pi}[f(z)]=-1(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$。 **629**．$\operatorname*{res}_{z=k\pi}[f(z)]$
$=(-1)^k(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$。 **630**．$\operatorname*{res}_{z=k\pi}[f(z)]=0(k=0,\ \pm 1,$
$\pm 2,\ \cdots)$。 **631**．$\operatorname*{res}_{z=k\pi}[f(z)]=-1(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$。 **632**．1)
$\operatorname*{res}_{z=2}[f(z)]=\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=0$； 2) $\operatorname*{res}_{z=2}[f(z)]=-\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=-\frac{143}{24}$。
633．$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=-\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$。 **634**．$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]$
$=\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=0$。 **635**．$\operatorname*{res}_{z=-1}[f(z)]=-\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=-\cos 1$。
636．$\operatorname*{res}_{z=-3}[f(z)]=-\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=-\sin 2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}+\right.$
$\left.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\right]$。 **637**．$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=\frac{1}{2}$；$\operatorname*{res}_{z=\frac{2k\pi i}{h}}[f(z)]=\frac{1}{2k\pi i}$
$(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$。 **638**．若 $n<0$ 或 $n>0$ 为奇数，$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=0$；
若$n=0$或$n>0$为偶数，$\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}$；$\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]=-\operatorname*{res}_{z=0}[f(z)]$。
639．$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{k\pi}}[f(z)]=(-1)^{k+1}\frac{1}{k^2\pi^2}(k=\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$； $\operatorname*{res}_{z=\infty}[f(z)]$

$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{1}{6}$. **640**. $\underset{z=k^2\pi^2}{\text{res}}[f(z)]=(-1)^k 2k^2\pi^2(k=1, 2, \cdots)$.

641. 若 n 为奇数, $\underset{z=0}{\text{res}}[f(z)]=0$; 若 $n=2k(k=0, 1, 2, \cdots)$,

$\underset{z=0}{\text{res}}[f(z)]=(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}$, 其中 B_{2k} 为伯努利数(参见题 485); $\underset{z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{\text{res}}[f(z)]=-\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^n\pi^n}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

642. 1; -1. **643**. 0; 2. **644**. 若 $\sqrt{1}=1$ 以及 $\text{Ln}\,1=2k\pi i$, $-2e^{2k\pi ai}$; 对于由值 $\sqrt{1}=-1$ 定义的分枝, 0. **645**. $\pm\frac{(a-b)^2}{8}$. **646**. 1) $\alpha-\beta$ (对所有分枝); 2) $e^{\alpha}-e^{\beta}$(对所有分枝). **647**. 1) 若 $\text{Ln}\,1=2k\pi i$, $2k\pi i+\frac{1}{2\times3!}-\frac{1}{4\times5!}+\cdots$; 2) $-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3\times4!}-\frac{1}{5\times6!}+\cdots$(对所有分枝). **648**. 若 $\text{Arc tg}0=k\pi$, $\underset{z=0}{\text{res}}[f(z)]=k\pi$; 若 $\text{Arc tg}\,\infty=\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $\underset{z=\infty}{\text{res}}[f(z)]=-\frac{(2k+1)\pi}{2}$. **649**. 若 $n\geqslant0$, $\underset{z=0}{\text{res}}[f(z)]=0$; 若 $n=-1$, $\underset{z=0}{\text{res}}[f(z)]=\text{Ln}\frac{\alpha}{\beta}$, 以及若 $n\leqslant-2$, $\underset{z=0}{\text{res}}[f(z)]=\frac{1}{n+1}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$; 若 $n\geqslant0$, $\underset{z=\infty}{\text{res}}[f(z)]=\frac{1}{n+1}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})$; 若 $n=-1$ 且 $\text{Ln}\,1=2k\pi i$, $\underset{z=\infty}{\text{res}}[f(z)]=-2k\pi i$, 以及若 $n\leqslant-2$, $\underset{z=\infty}{\text{res}}[f(z)]=0$. **650**. $-2c_0c_1$.

651. 1) $A\varphi(a)$; 2) $c_{-1}\varphi(a)+\frac{c_{-2}\varphi'(a)}{1!}+\cdots+\frac{c_{-k}\varphi^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$. **652**. 1) n; 2) $-n$. **653**. 1) $n\varphi(a)$; 2) $-n\varphi(a)$. **654**. $\frac{A}{\varphi'(a)}$. **655**. AB.

656. $\sum_{n=1}^{k}(-1)^n\frac{n\bar{c}_{-n}(\beta^*-a)^{n+1}}{R^{2n}}$. **657**. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. **658**. $-2\pi i$.

659. $-\frac{\pi i}{121}$. **660**. πi. **661**. $-\frac{2\pi i}{9}$. **662**. 1. **663**. 0. **664**. 若 $n\geqslant-1$, $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$; 若 $n<-1$, 0. **665**. $32\pi i$. **666**. 0.

667. $\frac{f(0)}{g(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{a_kg'(a_k)}$. **669**. 若 $r<1$, 0; 若 $r>1$, ±1(符号依赖于被积函数的枝). **670**. $\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **671**. $\frac{1}{\pi(1+a)}$.

672 $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}}$. **673**. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. **674** $\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}$. **675**. $\frac{(2a+b)\pi}{[a(a+b)]^{\frac{3}{2}}}$.

676 若 $|a|>1$, $\frac{2\pi}{1-a^2}$; 若 $|a|>1$, $\frac{2\pi}{a^2-1}$; 若 $|a|=1$, $a\neq\pm1$, 0(主值)(对 $a=\pm1$, 无主值). **677** 若 $|a|<1$, $\frac{\pi(a^6+1)}{1-a^2}$; 若 $|a|>1$, $\frac{\pi(a^6+1)}{a^6(a^2-1)}$; 若 $|a|=1, a\neq\pm1$, $\frac{\pi}{2}\frac{1-a^{12}}{a^6(a^2-1)}$ (主值)(对 $a=\pm1$, 无主值). **678**. 若 $n\geqslant0$, $\frac{2\pi}{n!}$; 若 $n<0$, 0. **679**. $\pi i\operatorname{sign}a$ (对 $a=0$, 积分主值为 0). **680**. $-2\pi i\operatorname{sign}\operatorname{Im}a$. **682**. $-\frac{\pi}{27}$. **683**. $\frac{\pi}{4a}$. **684**. 若 $n>1$, $\frac{1\times3\times5\times\cdots(2n-3)}{2\times4\times6\times\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}$; 若 $n=1$, $\frac{\pi}{2}$. **685**. $\frac{\pi}{ab(a+b)}$. **686**. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **687**. $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$. **688**. $\frac{\pi}{n}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$. **690**. $\frac{(-1)^{k-1}}{(2ih-z)^k}$. **691** 1) $\frac{\pi}{3e^3}(\cos1-3\sin1)$; 2) $\frac{\pi}{3e^3}(3\cos1+\sin1)$.

692. $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos2+\sin2)$. **693**. $\frac{\pi e^{-ab}}{2b}$. **694**. $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$. **696**. 若 $t>0$, πi; 若 $t=0$, 0; 若 $t<0$, $-\pi i$. **697**. $\pi(2\sin2-3\sin3)$. **698**. $\frac{\pi}{5}\left(\cos1-\frac{1}{e^2}\right)$. **699**. $\frac{\pi}{3}\left[\sin|t|+e^{\frac{-|t|\sqrt{3}}{2}}\left(\sin\left|\frac{t}{2}\right|+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)\right]$.

700. $\frac{\pi}{4}[e^{-|t|}-\sin|t|]$. **701**. $\pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right)$. **702**. $\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})$.

703. $\frac{\pi}{4b^4}[2-(2+ab)e^{-ab}]$. **704**. $\pi(b-a)$. **705**. $\frac{\pi}{2}$. **706**. $\frac{3\pi}{8}$.

707. 1) $\frac{\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}}{a^p}$; 2) $\frac{\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}}{a^p}$. 为了看出当 $-1<p<0$ 时答案是正确的, 只要注意到对 p 的这些值积分收敛且答案中给出的函数为解析. **708**. $\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$. **709**. $\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$.

710. $\frac{1}{p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$(对 $p=1$, 积分等于 $\frac{\pi}{2}$). **712**. $\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

714 $\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi p}{2}}$. **715**. $\frac{\pi(1-p)}{4\cos\frac{\pi p}{2}}$(对 $p=1$, 积分等于 $\frac{1}{2}$). **716**. 若

$\lambda\neq 0$, $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\dfrac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}$; 若 $\lambda=0$, $\dfrac{p\pi}{\sin p\pi}$. **713** 0. **719** $\dfrac{\pi}{4}$.

720. $\pi\operatorname{ctg}\pi p$. **721** $\pi\operatorname{ctg}p\pi$. **722** $\dfrac{\pi p(1-p)}{2^{3-p}\sin p\pi}$.

723. $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left(2^{\frac{p}{2}}\cos\dfrac{p\pi}{4}-1\right)$. **724.** $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left[2^{p}\left(1-\dfrac{p}{2}\right)-1\right]$.

725. $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left[1-\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^{p}\right]$. **726** $\dfrac{p\pi}{\sin p\pi}\dfrac{a^{p-1}}{(1+a)^{p+1}}$.

727. $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\left(\sin\dfrac{p\pi}{2}+\cos\dfrac{p\pi}{2}-1\right)$. **728** $\dfrac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$. **729** 若 a 不属于区间 $(-1,1)$, 则 $I=-\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, 其中 $\sqrt{a^2-1}>0$ 对 $a>1$ (在沿线段 $[-1,1]$ 截开的平面上, 量 $\sqrt{a^2-1}$ 为单值); 当 $a=\pm e^{i\alpha}$, $I=\pm\dfrac{\pi}{\sqrt{2\sin\alpha}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$; 当 $a=iy$, $I=\dfrac{\pi i}{\sqrt{1+y^2}}\operatorname{sign}y$; 当 $-1<a<1$, $I=0$(主值). **730** 若 b 不属于区间 $(0,1)$, 则 $I=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}b^{p-1}(b-1)^{-p}$, 其中 $(b-1)^{-p}>0$, $b^{p-1}>0$ 对 $b>1$; 若 $0<b<1$, 则 $I=-\pi b^{p-1}(1-b)^{-p}\operatorname{ctg}p\pi$(主值). **731** $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$. **732** $\dfrac{\pi}{2a}\ln a$. **733** $\dfrac{\pi}{8a}(\pi^2+4\ln^2 a)$.

734. $\dfrac{\pi}{2a^3\sqrt{2a}}\left(\dfrac{3}{2}\ln a-1-\dfrac{3\pi}{4}\right)$. **735** $-\pi$. **736** $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$.

737. $\dfrac{1}{2}\ln^2\dfrac{a}{1+a}$. **739** 1) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{\ln a}$ $\left(对\ a=1,\ I=\dfrac{1}{2}\right)$;

2) $\dfrac{\pi}{2a\left(\ln^2 a+\dfrac{\pi^2}{4}\right)}-\dfrac{1}{1+a^2}$.

740. $\dfrac{1}{2n+1}\left\{\dfrac{\pi}{2a}\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k\dfrac{2k+1}{\ln^2 a+\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2}-\dfrac{1}{1+a^2}\right\}$.

741. $\dfrac{1}{2n}\left\{\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{\pi}{2a}\sum\limits_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k+1}\dfrac{2k+1}{\ln^2 a+\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}$.

743 $\dfrac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin a\pi}$(对 $a=1$, $I=\ln 2$). **744** $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{th}\dfrac{\pi a}{2}$. **745** $\dfrac{\pi}{2\operatorname{ch}\dfrac{\pi a}{2}}$.

746 $\frac{\pi^2 e^{\pi a}}{(e^{\pi a}+1)^2}$. **747** $\frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$. **748** 若$0<a<1$, $\frac{\pi}{a}\ln(1+a)$; 若$a>1$, $\frac{\pi}{a}\ln\frac{1+a}{a}$. **750** 1) $\frac{t^n}{n!}$; 2) 若$t>1$, $\frac{\ln^n t}{n!}$; 若$t<1$, 0; 若$t=1$, 则当$n>1$时$I=0$, 当$n=1$时$I=\frac{1}{2}$(主值). **751**. $\frac{e^{at}t^n}{n!}$.

752 $\sin t$. **753**. 1) $\cos t$; 2) $t-\sin t$. **754**. $\frac{e^{at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$. **755**. 若$t\geqslant 1$, $\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{t}\right)^n$; 若$t\leqslant 1$, 0.

758. 1) $\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}$; 2) $\frac{e^{-it}}{\sqrt{\pi t}}$. **759**. $\operatorname{erf}\sqrt{t}$, 其中$\operatorname{erf} u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-x^2}dx$.

760. $e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}$. **761**. 若$t<\pi$, $\sin t$; 若$t\geqslant\pi$, 0. **762**. 若$0<t<a$, 1; 若$t=a$, 0; 若$a<t<2a$, -1; 若$t=2a$, $-\frac{1}{2}$; 若$t>2a$, 0.

763. 若$na<t<(n+1)a$, $n+1$; 若$t=na$, $n+\frac{1}{2}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$.

764. $1-\operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{t}}$(参见题**759**的答案). **765**. $\frac{1}{a}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi r}{a}}{n\pi r}$. **766**. $-Ei(-t)$, 其中$Ei(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{e^u}{u}du$. **767**. $\frac{2\operatorname{sh}t}{t}$.

768. $\frac{2\pi i}{a}$. **769**. 若$b<0$, 0; 若$b>0$, $\operatorname{arch}\frac{b}{a}$.

772. $\frac{1}{\sqrt{z^2+1}\,(z+\sqrt{z^2+1})^n}$ (对$z>0$, $\sqrt{z^2+1}>0$). **773**. 1) 若$a>b$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$; 若$a<b$, 0; 2) 若$a>b$, 0; 若$a<b$, $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

774. $\frac{\pi}{2}J_0(i|a|\sqrt{t^2-b^2})$. **775**. 如果至少一个极点的实部为正, 则$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\infty$; 如果所有极点的实部都为负, 则$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=0$; 如果某些极点位于虚轴上而所有其余极点有负实部, 则$f(t)$当$t\to\infty$时振动, 且若至少一个虚轴上的极点的阶高于一阶, 则振幅无限增加, 而当位于虚轴上的所有极点都为简单极时, 振幅保持有界. 如果在虚轴上只有一个极点(在原点), 则当极点为多重时$f(t)\to\infty$, 而当极点为简单极时,

$f(t)\to\operatorname*{res}_{z=0}[e^{zt}\varphi(z)]$. **777**. $f(t)\sim\frac{at-3}{a^4}$.

778. $f(t)\sim\frac{i\omega}{\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}e^{i\omega t-\sqrt{2ai\omega-\omega^2}}$.

781. 解法：将积分写成 $\int_{-x}^{x}\frac{e^{-x-t}}{t}dt+\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-x-t}}{t}dt$ 的形式．因在 x 的负幂的渐近展开式中，$e^{-x}\sim0$，从题 **780** 的解推出第二个积分渐近地等于 0．由积分主值的定义

$$\int_{-x}^{x}\frac{e^{-x-t}}{t}dt=e^{-x}\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{-x}^{-\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt\right]$$
$$=e^{-x}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{x}\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}dt=e^{-x}\int_{0}^{x}\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}dt$$

（在最后一个积分中，被积函数为连续）．此外，

$$\int_{0}^{x}\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^{-t}-e^{t}}{t}dt+\int_{1}^{x}\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t}dt\sim O(1)+\int_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t}dt.$$

由分部积分，我们得到

$$\int_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t}dt=C+e^{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{x^n}\right)+n!\int_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t^{n+1}}dt,$$

其中 $C=C(n)$ 为常数．剩下的是要证明

$$\lim_{x\to\infty}x^n e^{-x}\int_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t^{n+1}}dt=0,$$

借助于洛比大(l'Hospital)法则，这是容易证明的．**784** 解法：考虑 $\int_{C}e^{z^2-t^2}dt$，其中围道 C 如图 68 所示（对 $\mathrm{Re}\,z>0$）．此积分等于零，从而($z=x+iy$)

图 68

$$\int_{0}^{z}e^{z^2-t^2}dt=\int_{0}^{\infty}e^{z^2-t^2}dt-\int_{x}^{\infty}e^{z^2-(t+iy)^2}dt.$$

右端第一个积分等于 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{z^2}$，将第二个积分改写成如下形式：

$$-\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\frac{1}{t+iy}de^{z^2-(t+iy)^2}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{z^2-(t+iy)^2}}{(t+iy)^2}dt.$$

反复进行分部积分，即得所要求的展开式．对余项，我们有估计

$$\left|\frac{1\times3\cdots(2n-1)}{2^n}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{z^2-(t+iy)^2}}{(t+iy)^{2n}}dt\right|<\frac{1\times3\cdots(2n-1)}{2^n}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{z^2-t^2}}{|t+iy|^{2n}}dt.$$

再分部积分得

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{x^2-t^2}}{|t+iy|^{2n}}dt<\frac{1}{2|z|^{2n}x},$$

由此推出展开式为渐近的. $\operatorname{Re}z<0$ 的情形用类似的方法考虑. 若 $\operatorname{Re}z=0$, 则

$$\left|\int_0^{\infty}\frac{e^{-y^2-(t+iy)^2}}{(t+iy)^{2n}}dt\right|<\int_0^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{y^{2n}}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2y^{2n}}.$$

785. $f(t)\sim\frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\omega^2\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{t^{\frac{3}{2}}}-\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\omega^2 t^{\frac{7}{2}}}+\cdots\right.$

$$\left.+(-1)^n\frac{\Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)}{\omega^{2n}t^{2n+3/2}}+\cdots\right];$$

对充分小的 t,

$$f(t)=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left[1-\frac{(2\omega t)^2}{1\times3\times5}+\frac{(2\omega t)^4}{1\times3\times5\times7\times9}-\cdots\right]\approx2\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

787. $f(t)\sim1+\frac{1}{\pi}\sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(3n+\frac{3}{2}\right)}{t^{3n+\frac{3}{2}}}$; 对充分小的 t,

$$f(t)=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}-\frac{t^3}{\Gamma(4)}+\frac{t^{\frac{9}{2}}}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}-\cdots\approx\frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}.$$

788. 1. **789.** 0. **790.** 4. **792.** 1; 3. **793.** 0; 4. **794.** 2. **795.** 1. **796.** n. **797.** n. **799.** 解法: 因函数列 $f_n(z)$ 除点 $z=0$ 外处处收敛于函数 $e^{\frac{1}{z}}$, 故对任一圆 K(圆心在 $z\neq0$, 且不将原点包含于其内部或边界上), 对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使当 $n>N$ 时, 对圆 K 的所有点满足不等式 $|f_n(z)-e^{\frac{1}{z}}|<\varepsilon$. 再选取 $\varepsilon<\min\limits_{z\in C}|e^{\frac{1}{z}}|$, 其中 C 为圆 K 的圆周, 并应用路歇定理. **803.** 0. **804.** 2; 1. **805.** 在每个象限内有一根. **806.** 在第二与第三象限内各有两个根. **808.** 在区域 $\beta>0$, $\alpha>+\sqrt{\beta}$ (图 69 中区域 I) 内, $m=0$; 在区域 $\beta>0$, $\alpha<+\sqrt{\beta}$ (区域 II) 内, $m=2$; 在区域 $\beta<0$ (区域 III) 内, $m=1$. **809.** 在区域 $\alpha>0$, $\beta>\frac{1}{\alpha}$ (图 70 中

区域 I) 内, $m=0$; 在区域 $\alpha\leqslant 0$ 或 $\alpha>0$, $\beta<\frac{1}{\alpha}$ (区域 II) 内, $m=2$。

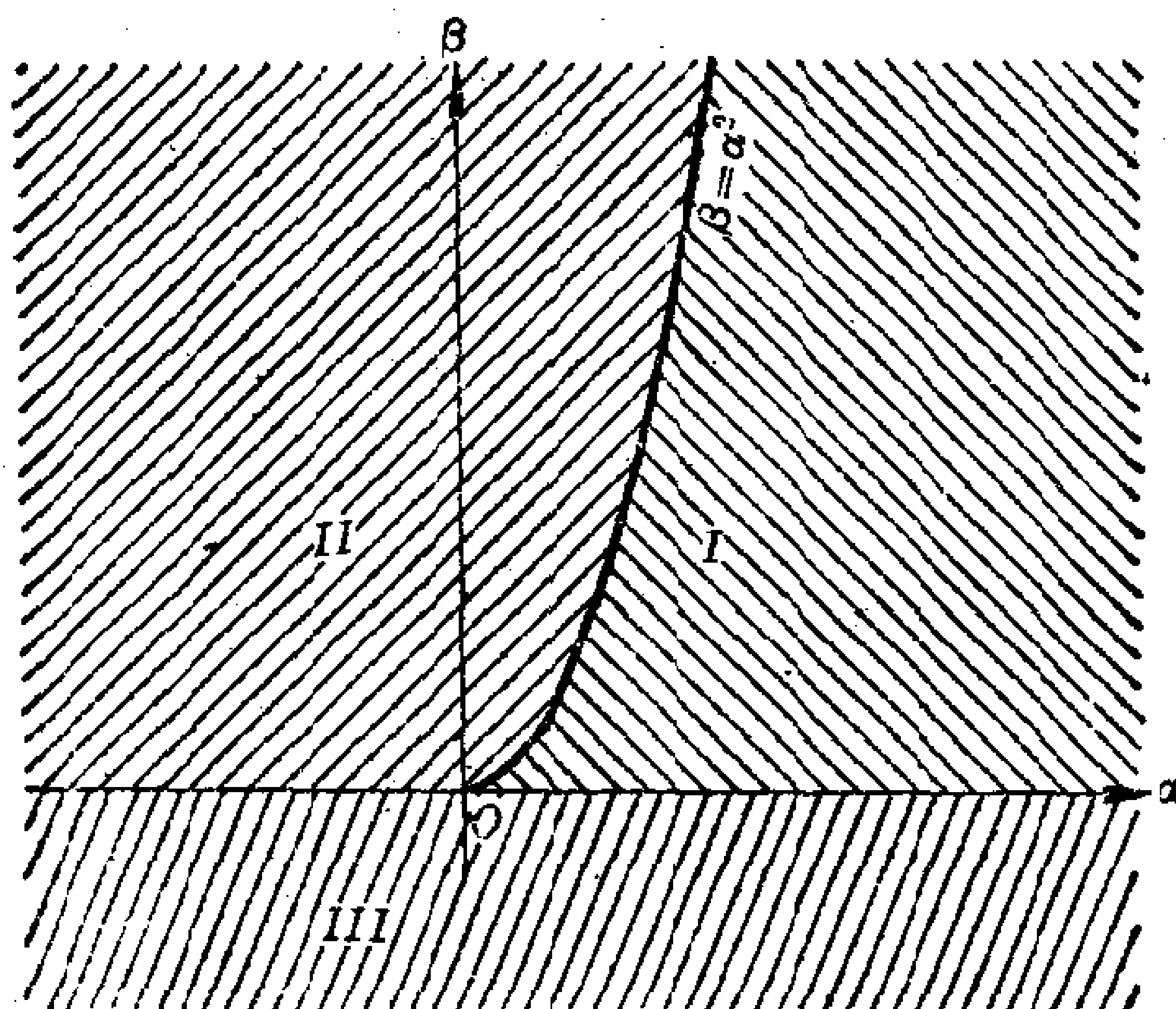


图 69

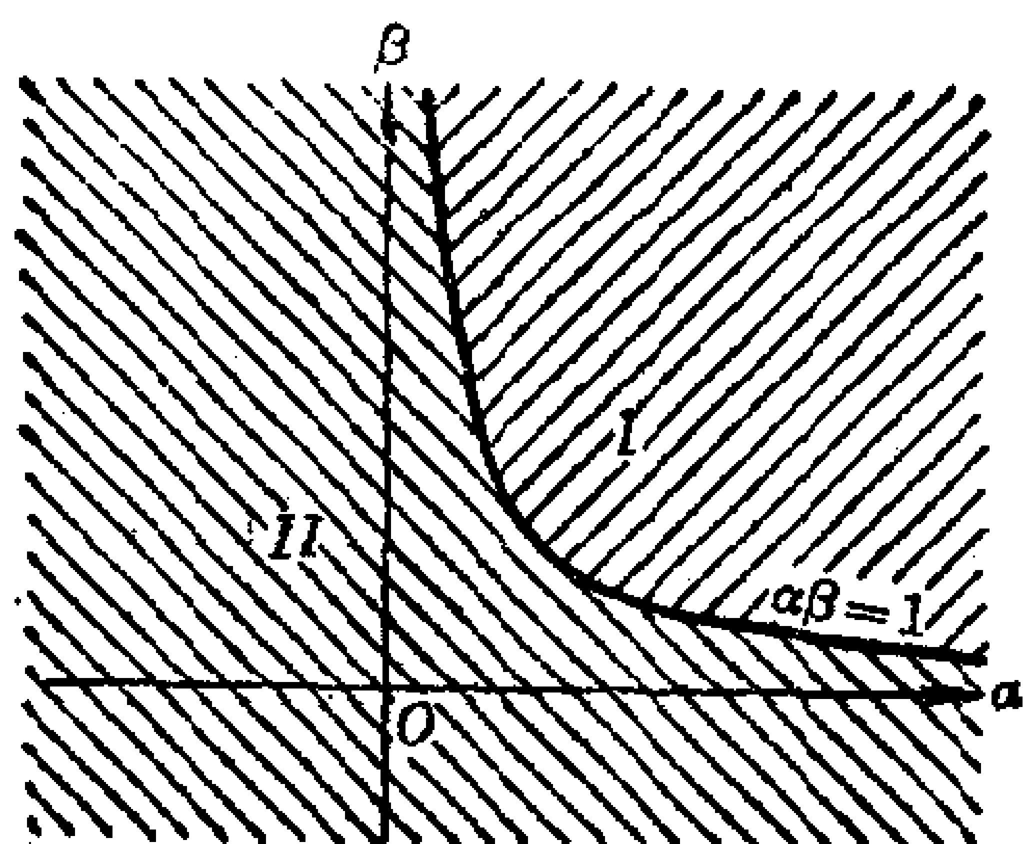


图 70

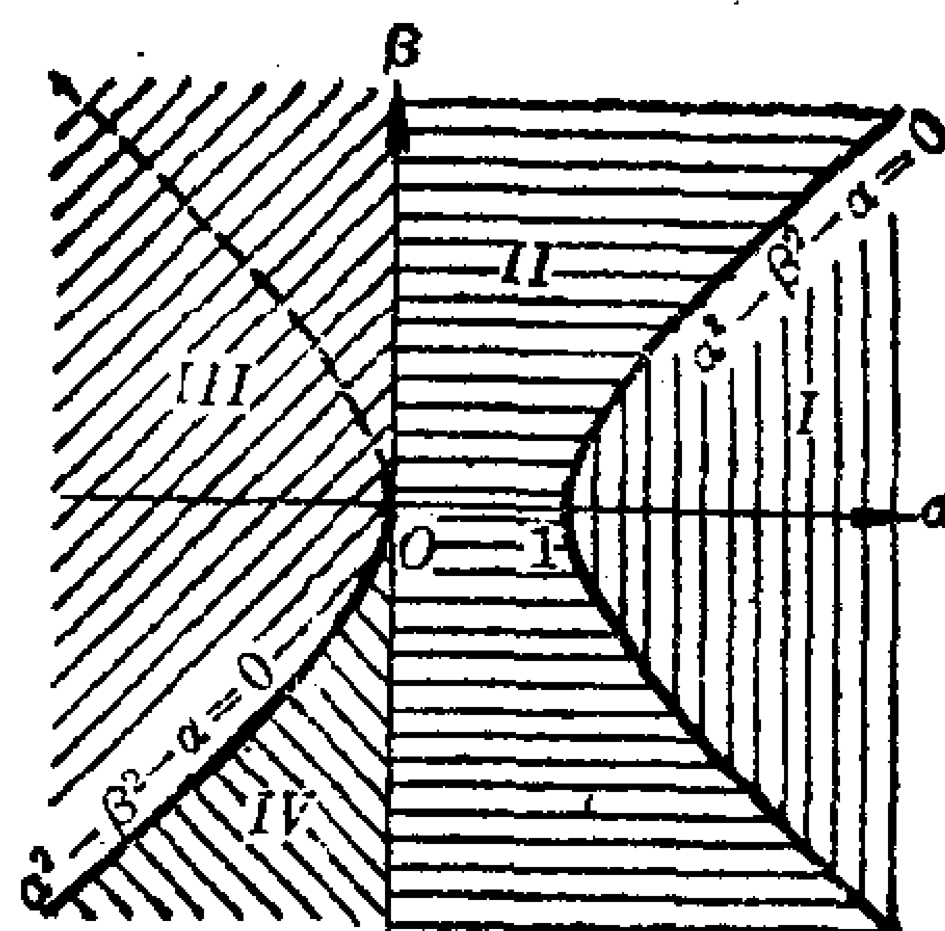


图 71

810. 在区域 $\alpha>\frac{1}{2}+\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}$ (图 71 中区域 I) 内, $m=0$; 在区域 $0<\alpha<\frac{1}{2}+\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}$ (区域 II) 内, $m=2$; 在区域 $\alpha<\frac{1}{2}-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}$ 或 $\frac{1}{2}-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}\leqslant\alpha<0$, $\beta>0$ (区域 III) 内, $m=1$; 在区域 $\frac{1}{2}-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{4}}<\alpha<0$, $\beta<0$ (区域 IV) 内, $m=3$.

812 包含正半轴 a 且由曲线 $a+b=0$ 与

$$\begin{cases} a=-\dfrac{t\cos\tau t}{\sin\tau t}, \\ b=\dfrac{t}{\sin\tau t}, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$$ 所界的区域。

813. 位于第一象限且由曲线 $b=0$ 与

$$\begin{cases} a=\operatorname{tg}\tau t, \\ b=\dfrac{t^2}{\cos\tau t}, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2\tau}$$ 所界的区域。

814. 由线段 $b=0,\ 0\leqslant a\leqslant\dfrac{\pi}{2\tau}$ 与弧

$$\begin{cases} a=t\sin\tau t, \\ b=t^2\cos\tau t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2\tau}$$ 所界的有限区域。

824. $z=a+\dfrac{w}{1!}f(a)+\dfrac{w^2}{2!}\dfrac{d}{da}\{[f(a)]^2\}+\cdots+\dfrac{w^n}{n!}\dfrac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{[f(a)]^n\}$ $+\cdots$.

825. $z=\dfrac{1}{2}w+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{2^{2n-1}\times n!}w^n$;

$z=-2-\dfrac{1}{2}w+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{2^{2n-1}\times n!}w^n$.

826. $z=a+\dfrac{w}{1!}\dfrac{1}{2}(a^2-1)+\dfrac{w^2}{2!}\dfrac{1}{2^2}\dfrac{d}{da}[(a^2-1)^2]+\cdots$

$$+\frac{w^n}{n!}\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[(a^2-1)^n]+\cdots.$$

828 1) $z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}a^{n-1}}{n!}w^n$; 2) $e^{bz}=b\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(an+b)^{n-1}}{n!}w^n$.

829. $z=a+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{w^n}{n!}\dfrac{d^{n-1}}{da^{n-1}}(\sin^n a)$. **830**. 解法: 若 $r<\dfrac{\pi}{2}$, 则函数 $w=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{2}}{\sin z}$ 在圆 $\left|z-\dfrac{\pi}{2}\right|<r$ 内解析，且在此圆内除 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 外无其它零点. 在此圆的圆周上，$|w|\geqslant\dfrac{2r}{e^r+e^{-r}}$，这就表明，半径为 $\rho<\dfrac{2r}{e^r+e^{-r}}$ 的圆 $|w|<\rho$ 被一一映射到点 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 的相应邻域上，且展开式 $z(w)$ 在该圆内收敛. 函数 $\dfrac{2r}{e^r+e^{-r}}$ 在 $r=r^*$ 有极大值，其中 $e^{2r^*}=\dfrac{r^*+1}{r^*-1}\left(r^*=1.19\cdots<\dfrac{\pi}{2}\right)$，且此极大值等于 $\dfrac{2r^*}{e^{r^*}+e^{-r^*}}=\sqrt{r^{*2}-1}=0.6627\cdots$. 这

样，所求的收敛半径不小于 0.6627…．同时，使 $\frac{dw}{dz}=0$ 即 $\operatorname{tg} z=z-\frac{\pi}{2}$ 的点 w，不能位于 $z(w)$ 展开式的收敛圆内部．记 $z-\frac{\pi}{2}=t$，将方程 $\frac{dw}{dz}=0$ 变成 $\operatorname{ctg} t=-t$ 或 $e^{2it}=\frac{it+1}{it-1}$ 的形式。因此，$it=r^*$ 为方程 $\frac{dw}{dz}=0$ 的根．相应的值 $w=\frac{t}{\cos t}=-\frac{2ir^*}{e^{r^*}+e^{-r^*}}$，由此得 $|w|=\frac{2r^*}{e^{r^*}+e^{-r^*}}=\sqrt{r^{*2}-1}=0.6627\cdots$．从而该点在收敛圆的圆周上，故收敛圆的半径等于 $\sqrt{r^{*2}-1}=0.6627\cdots$.

第 五 章

832．圆环 $\frac{1}{2}<|z|<1$．**833**．单位圆外部($|z|>1$)．**834** $|z|<1$．**835**．半平面 $\operatorname{Re} z<-1$．**836**．实轴．**837**．除点 $z=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ 之外的整个平面．**838**．$|z|>1$．**839** $|z|<1$．**840**．除单位圆之外的整个平面($|z|\neq1$)．**841**．除点 $z=4^{\frac{1}{n}}e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ ($k,\ n=1,\ 2,\ \cdots$) 之外的整个平面． **842**．解法：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{1-z^n}$ 在 $|z|<1$ 内显然收敛，又从等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{1-z^n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{z}\right)^n}$ 推出此级数在 $|z|>1$ 内也收敛．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R\leqslant1$．在 $|z|>1$ 内级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{1-z^n}$ 的发散性从下面的事实可得：否则，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1-z^n}$ 将为收敛级数，因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{1-z^n}-\frac{a_nz^n}{1-z^n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也为收敛级数．但若 $|z|<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_nz^n}{1\mp z^n}$ 的通项之比的模 q 在 $1-|z|\leqslant q\leqslant2$ 的范围之内，因而两个级数同时收敛或发散．**843**．1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nz^n$，其中 $b_n=\sum a_p$，和式取遍包括 1 与 n 在内的 n 的所有因子 p．收敛半径 $R=\min\{r,\ 1\}$，其中 r 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛

半径. **844**. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$, 其中 $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln k)^n}{k^2}\left(a_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\right)$; $R=1$. **845**. 若$|z|<1$, $\frac{1}{2}$; 若$|z|>1$, $-\frac{1}{2}$. **846**. 若$|z|<1$, $\frac{z}{(1-z)^2}$; 若$|z|>1$, $\frac{1}{(1-z)^2}$. **847**. 若$|z|<1$, z; 若$|z|>1$, 1. **848**. 若$|z|<1$, $\frac{z}{z-1}$; 若$|z|>1$, $\frac{1}{z-1}$. **850**. 1) 与 2) 在任何圆 $|z|\leqslant r<1$ 与任何区域 $|z|\geqslant R>1$ 内,一致收敛; 3) 沿着整个实轴一致收敛;在所有其它点上都发散. **852**. 在圆$|z|=1$上一致收敛; 在所有其它点上都发散. **853**. 在任何半平面 $\mathrm{Re}\,z\geqslant\delta$ 内一致收敛,其中 $\delta>0$. **854**. 在任何半平面 $\mathrm{Re}\,z\geqslant 1+\delta$ 内一致收敛, 其中 $\delta>0$. **855**. 沿着实轴一致收敛;在所有其它点上都发散. **856**. 沿着实轴上的任何线段 $[2k\pi+\varepsilon, (2k+1)\pi-\varepsilon]$ 一致收敛 ($k=0, 1, 2, \cdots$). **857**. 否. **864**. $x_c=x_a=-\infty$. **865**. $x_c=-\infty$, $x_a=1$. **866**. $x_c=-\infty$, $x_a=+\infty$. **867**. $x_c=0$, $x_a=+\infty$. **868**. $x_c=0$, $x_a=1$. **869**. $x_c=x_a=-1$. **870**. $x_c=x_a=+\infty$. **873**. $x_c=0$; 在所有边界点上都发散. **874**. $x_c=x_a=-2$; 在所有边界点上都发散. **875**. $x_c=x_a=0$; 在点 $z=(2k+1)\pi i (k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 上收敛(非绝对), 而在所有其它边界点上都发散. **876**. $x_c=x_a=0$; 在所有边界点都绝对收敛. **877**. $x_c=x_a=0$; 在所有边界点都非绝对收敛. **885**. 在任何带形 $0<\alpha\leqslant\mathrm{Re}\,z\leqslant A<\infty$ 内,积分一致收敛. **886**. 在任何半平面 $\mathrm{Re}\,z\geqslant\alpha>0$ 内,积分一致收敛. **887**. 在任何带形 $\alpha\leqslant\mathrm{Re}\,z\leqslant 2-\alpha$ 内,积分一致收敛,其中 $\alpha>0$. **888**. 在任何带形 $\alpha\leqslant\mathrm{Re}\,z\leqslant 1-\alpha$ 内,积分一致收敛,其中 $\alpha>0$. **889** 与 **890**. 在实轴上的任何不包含原点的闭区间内,积分一致收敛. **891**. 在除去半圆$|z|<r$ 的半平面 $\mathrm{Im}\,z\geqslant 0$ 内,积分一致收敛, 其中 r 是任意小正数. **892**. 在区间 $0<\alpha\leqslant z\leqslant\beta<1$ 与 $1<\gamma\leqslant z<\infty$ 内,积分一致收敛. **893**. 例: $f(t)=e^{t^2}$, 当 $n<t<n+e^{-n^2}$ 时 ($n=1, 2, \cdots$); 而 $f(t)=0$, 当 t 为所有其余的值时. **894**. $x_c=x_a=0$. **895**. $x_c=x_a=-\infty$. **896**. $x_c=x_a=+\infty$. **897**. $x_c=-\infty$; $x_a=1$. **898**. $x_c=-\infty$; $x_a=+\infty$. **899**. $x_c=-1$; $x_a=+\infty$. **900**. $x_c=0$; $x_a=1$. **901**. 在所有的边界点上都发散. **902**. 绝对收敛. **903**. 在点 $z=0$ 发散;在所有其余的边界点上收敛(非绝对). **904**. 在所有的边界点上收敛(非绝对).

第 六 章

914. 解法：在显然的不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx$$

中计算积分的值，我们得到

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

为了证明瓦利斯公式，必须证明这个不等式中两端的项之差当 $n \to \infty$ 时趋于零． **916.** 1) 不成立； 2) 成立． **918.** 1) 发散； 2) 发散(于零)； 3) 收敛； 4) 收敛． **919.** 非绝对收敛． **920.** 发散． **921.** 若 $p > \frac{1}{2}$，收敛；若 $p > 1$，绝对收敛；若 $p \leqslant \frac{1}{2}$，发散． **922.** 若 $p > 1$，绝对收敛；若 $p \leqslant 1$，发散． **923.** 绝对收敛． **925.** $|z| < 1$． **926.** $|z| < 2$． **927.** $|z| < \infty$． **928.** $|z| > 1$． **929.** $|z| < \frac{1}{e}$． **930.** $|z| < \infty$． **931.** $|z| < \infty$． **932.** $|z| < \infty$． **933.** $|z| < \infty$． **940.** 解法：1) 从级数 $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$ 中减去级数 $2^{-s}\zeta(s)$，我们得到 $(1-2^{-s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots$，这个等式右边缺 n 可被 2 整除的项 $\frac{1}{n^s}$．类似地

$$(1-2^{-s})(1-3^{-s})\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \cdots,$$

右边缺 n 可被 2 或 3 整除的项 $\frac{1}{n^s}$．一般地，

$$(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s})\cdots(1-p_m^{-s})\zeta(s) = 1 + \sum \frac{1}{n^s}, \qquad (1)$$

(1)的右边关于不能被 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 中任何一个整除的 n（大于 1）求和．容易证明：当 $\operatorname{Re} s \geqslant 1 + \delta\ (\delta > 0)$ 时，(1)右边的级数的和随 $m \to \infty$ 而趋于零．因此 $\zeta(s) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - p_m^{-s}) = 1$． 2) 由绝对收敛判别法（参见题 917），即得乘积 $\prod_{m=1}^{\infty} (1 - p_m^{-s})$ 当 $\operatorname{Re} s \geqslant 1 + \delta$ 时收敛，故函数 $\zeta(s)$ 在 $\operatorname{Re} s > 1$ 没有零点． **941.** 解法：由上题所证，即得对任何 $\delta > 0$，有

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-(1+\delta)})=\frac{1}{\zeta(1+\delta)}$，因此，容易断定 $\lim_{\delta\to 0}\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-(1+\delta)})=0$. 由于 $(1-p_n^{-1})<(1-p_n^{-(1+\delta)})$，故显然乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-1})$ 发散(于零)，因此，$\sum_{n=1}^{\infty}p_n^{-1}$ 也是一发散级数。

961. $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi a}$. **962**. $\frac{\pi^2\operatorname{ctg}\pi a}{\sin\pi a}$. **963**. $\frac{\pi^2}{8}$.

964. $\frac{1}{2a^2}(1+\pi a\operatorname{cth}\pi a)$. **965**. $\frac{1}{2a^2}\left(1+\frac{\pi a}{\operatorname{sh}\pi a}\right)$. **966**. $\frac{\pi^3}{32}$.

967. $\frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}$，$B_{2k}$ 是伯努利数(参见题**485**)。 **968**. $\frac{\pi}{2}\frac{\sin ab}{\sin\pi a}$. **971**. $\rho=0$. **972**. $\rho=n,\ \sigma=a$. **973**. $\rho=1,\ \sigma=3$. **974**. $\rho=1,\ \sigma=3$. **975**. $\rho=3,\ \sigma=2$. **976**. $\rho=2,\ \sigma=\sqrt{5}$. **977**. $\rho=1$, $\sigma=1$. **978**. $\rho=1,\ \sigma=1$. **979**. $\rho=1,\ \sigma=\sqrt{2}$. **980**. $\rho=\frac{1}{2}$，$\sigma=1$. **981**. $\rho=\frac{1}{2^n}$，$\sigma=1$. 解法: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2^2\times n)!}=\frac{1}{2}(\cos\sqrt{z}+\cos i\sqrt{z})$，由此得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2^2\times n)!}=\frac{1}{2}(\cos\sqrt[4]{z}+\cos i\sqrt[4]{z})$. 类似地，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2^3\times n)!}=\frac{1}{4}(\cos\alpha\sqrt[4]{z}+\cos\alpha^2\sqrt[4]{z}+\cos\alpha^3\sqrt[4]{z}+\cos\alpha^4\sqrt[4]{z})$，其中 $\alpha=\sqrt[4]{-1}$，由此得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2^3\times n)!}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\cos\alpha^k\sqrt[8]{z}$，如此等等. **982**. $\rho=\infty$. **983**. 解法: 易见，考虑值 $z>0$ 即可. 因此，$\frac{\int_0^1 e^{zt^2}dt}{e^z}<1$；另一方面，若 $0<\alpha<1$，则 $\frac{\int_0^1 e^{zt^2}dt}{e^{\alpha z}}=\int_0^1 e^{z(t^2-\alpha)}dt\geqslant\int_{\sqrt{\alpha}}^1 e^{z(t^2-\alpha)}dt\to\infty$，当 $z\to\infty$ 时. 因此，$\rho=1,\ \sigma=1$. **985**. $\rho^*=\max(\rho_1,\rho_2)$. **986**. 1) $\rho^*=\rho,\ \sigma^*\leqslant\sigma_1+\sigma_2$; 2) $\rho^*=\rho,\ \sigma^*=\max(\sigma_1,\sigma_2)$. **987**. 1) $\rho^*\leqslant\rho,\ \sigma^*\leqslant 2\sigma$; 2) $\rho^*\leqslant\rho,\ \sigma^*\leqslant\sigma$. **988**. 解法: 若 $z=re^{i\varphi}$，则对任给的 r，量 $\left|1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right|$ 当 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ 时达到极大值；它等于 $1+\frac{r^2}{\lambda_n^2}$. 另一方面，对任何 $\varepsilon>0(\varepsilon<\alpha)$ 以及 $n>n_0(\varepsilon)$，我们有 $\frac{n}{\beta+\varepsilon}<\lambda_n<\frac{n}{\alpha-\varepsilon}$，因此，$1+\frac{(\alpha-\varepsilon)^2r^2}{n^2}<1+\frac{r^2}{\lambda_n^2}<1+\frac{(\beta+\varepsilon)^2r^2}{n^2}$ (*). 由于 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\gamma^2r^2}{n^2}\right)=\frac{\sin i\pi\gamma r}{i\pi\gamma r}=\frac{e^{\pi\gamma r}-e^{-\pi\gamma r}}{2\pi\gamma r}$ (参见

题 **952** 或 **957**)，从不等式(*)即得(由 ε 的任意性与题 **984** 的解)函数 $f(z)$ 的阶 ρ 等于 1，以及型 σ 不小于函数 $e^{\pi\alpha z}$ 的型，且不大于函数 $e^{\pi\beta z}$ 的型，即 $\pi\alpha\leqslant\sigma\leqslant\pi\beta$.

990. 解法：设 $M(r)$, ρ, σ 为 $|f(z)|$ 在圆 $|z|=r$ 上的极大值，$f(z)$ 的阶与型. 又设 $M_1(r)$, ρ_1 与 σ_1 分别是 $f'(z)$ 的上述特征. 从等式 $f(z)=\int_0^z f'(t)dt+f(0)$，即得 $M(r)\leqslant rM_1(r)+|f(0)|$，因此 $\rho\leqslant\rho_1$. 由于 $f'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$，其中 Γ 可为中心在点 z，而半径为 δ(δ 为任意正数)的圆，因此 $M_1(r)\leqslant\dfrac{M(r+\delta)}{\delta}$，即 $\rho_1\leqslant\rho$，所以 $\rho_1=\rho$. 由此(并由上面所述的不等式)，我们还可得到 $\sigma_1=\sigma$. 该题的另一种解法基于题 **991** 之前给出的定理. **992**. $\rho=1,\ \sigma=\dfrac{1}{e}$. **993**. $\rho=a,\ \sigma=\infty$. **994**. $\rho=a,\ \sigma=0$. **995**. $\rho=0$. **996**. $\rho=0$. **997**. $\rho=1,\ \sigma=1$. **998**. $\rho=1,\ \sigma=2$. **999**. $\rho=1$; $h(\varphi)=\cos\varphi$. **1000**. $\rho=1$; 若 $\cos\varphi\geqslant0$, $h(\varphi)=\cos\varphi$; 若 $\cos\varphi<0$, $h(\varphi)=0$. **1001**. $\rho=1$; $h(\varphi)=|\sin\varphi|$. **1002**. $\rho=1$; $h(\varphi)=|\sin\varphi|$. **1003**. $\rho=1$; $h(\varphi)=|\cos\varphi|$. **1004**. $\rho=n$; $h(\varphi)=\cos n\varphi$. **1005**. $\rho=\dfrac{1}{2}$; $h(\varphi)=\left|\sin\dfrac{\varphi}{2}\right|$. **1006**. 1) 若 $h(\varphi)>0$, $h^*(\varphi)=h(\varphi)$; 若 $h(\varphi)<0$, $h^*(\varphi)=0$; 若 $h(\varphi)=0$, $h^*(\varphi)\leqslant0$; 2) 总是有 $h^*(\varphi)=h(\varphi)$. **1007**. 例: $f(z)=e^z-P(z)$, $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}$.

第 七 章

1009. 1) $F^+(z)=(z-a)^n$, $F^-(z)\equiv0$; 2) $F^+(z)\equiv0$, $F^-(z)=-\dfrac{1}{(z-a)^n}$; 3) $F^+(z)=\dfrac{1}{(z-a)^n}$, $F^-(z)\equiv0$. 在这三种情形中，柯西型积分都转化为柯西积分. **1010**. 1) $F^+(z)=\varphi(z)-\sum g_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right)$, $F^-(z)=-\sum g_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right)$; 2) $F^+(z)=\sum g_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right)+g(z)$, $F^-(z)=-\varphi(z)+\sum g_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right)+g(z)$. $g_k\left(\dfrac{1}{z-a_k}\right)$ 为函数 $\varphi(z)$ 在极点 a_k 邻域内展开式的主要部分; $g(z)$ 为 $\varphi(z)$ 在无穷远点邻域内展开式的主要部分，且包括常数项.

1011 $F^+(z)=\dfrac{z+\ln\dfrac{z-2}{z-3}}{z^2-4}$, $F^-(z)=-\dfrac{i}{z^2+1}$.

1012. $F^+(z)=\operatorname{ctg} z-\dfrac{1}{z}-\dfrac{2z}{z^2-\pi^2}$, 特别, $F^+(0)=0$, $F^+(\pi)=-\dfrac{3}{2\pi}$, $F^+(-\pi)=\dfrac{3}{2\pi}$; $F^-(z)=-\dfrac{1}{z}-\dfrac{2z}{z^2-\pi^2}$.

1013. $F^+(z)=\dfrac{z}{2(z+i)}$, $F^-(z)=-\dfrac{z}{2(z-i)}$.

1014. $F^+(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(a_n-ib_n)z^n}{R^n}$, $F^-(z)=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{R^n(a_n+ib_n)}{z^n}$;

极限值: $F^+(Re^{i\theta})=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n-ib_n)e^{in\theta}=\dfrac{a_0}{4}+\dfrac{1}{2}\varphi(Re^{i\theta})+\dfrac{i}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\theta+a_n\sin n\theta)$; $F^-(Re^{i\theta})=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)e^{in\theta}=\dfrac{a_0}{4}-\dfrac{1}{2}\varphi(Re^{i\theta})+\dfrac{i}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\theta+a_n\sin n\theta)$.

1015. 1) 若点 z 位于圆 Q_k: $|z-k\pi|<\dfrac{\pi}{2}$ 内, 则 $I_1(z)=f(z-k\pi)$, $I_2(z)=(-1)^k f(z-k\pi)$. 特别, 若 $|z|<\dfrac{\pi}{2}$, 则 $I_1(z)=I_2(z)=f(z)$. 若点 z 位于所有闭的 $\bar{Q}_k$ 之外, 则 $I_1(z)=I_2(z)=0$. 2) 设 Q_k 为圆 $|z-k\pi|<\pi$. 若 $z\in Q_{k-1}Q_k$, 则 $I_1(z)=f(z-k\pi)+f[z-(k-1)\pi]$, $I_2(z)=(-1)^k[f(z-k\pi)-f(z-(k-1)\pi)]$; 若 $z\in Q_kQ_{k+1}$, 则 $I_1(z)=f(z-k\pi)+f[z-(k+1)\pi]$, $I_2(z)=(-1)^k[f(z-k\pi)-f(z-(k+1)\pi)]$; 若 z 在区域 $Q_k-Q_{k-1}Q_k-Q_kQ_{k+1}$ 的内部, 则 $I_1(z)=f(z-k\pi)$, $I_2(z)=(-1)^k f(z-k\pi)$; 若 z 位于所有的 Q_k 的余集内部, 则 $I_1(z)=0$, $I_2(z)=0$. **1016** $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{z-1}{z+1}$[1]; $F^\pm(\zeta)=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}\pm\dfrac{1}{2}$, $F(\zeta)=\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}(-1<\zeta<1)$; $F(\pm i)=\pm\dfrac{1}{4}$, $F^\pm(0)=\pm\dfrac{1}{2}$, $F(0)=0$. **1017**. $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln}\dfrac{z+R}{z-R}$ 在沿着 C 截开的 z-平面内为一

---

1) 初看起来, 解似乎是显然的:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}[\ln(1-z)-\ln(-1-z)]=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-1}{z+1}.$$

可是必需检验最后的变换是否确实导致对数的指定分枝. 这是因为, 一般来说, 等式 $\ln z_2-\ln z_1=\ln\dfrac{z_2}{z_1}$ 不能成立. 这一点以后也应记住.

个由值 $\operatorname{Ln}1=0$ 确定的单值分枝. $\operatorname{Ln}\frac{z+R}{z-R}=\ln\left|\frac{z+R}{z-R}\right|+i\Delta_C\arg(\zeta-z)$，其中 $\Delta_C\arg(\zeta-z)$ 为 $\arg(\zeta-z)$ 沿着 C 的增量.

$$F^+(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{\zeta+R}{\zeta-R}\right|+\frac{3}{4},\quad F^-(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{\zeta+R}{\zeta-R}\right|-\frac{1}{4}.$$

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{\zeta+R}{\zeta-R}\right|+\frac{1}{4};\quad F(0)=\frac{1}{2}.$$

$$F^+(iR)=\frac{3}{4},\ F^-(iR)=-\frac{1}{4},\quad F(iR)=\frac{1}{4};\quad F'(0)=-\frac{i}{\pi R}.$$

1018. $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{z+R}{z-R}$(在沿着 C 截开的 z-平面内为一个由值 $\operatorname{Ln}1=0$ 确定的单值分枝；当 $|z|>R$ 时，它与题 **1017** 中的类似的分枝相一致；$F^+(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{\zeta+R}{\zeta-R}\right|+\frac{1}{4}$，$F^-(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left|\frac{\zeta+R}{\zeta-R}\right|-\frac{3}{4}$；$F(0)=-\frac{1}{2}$，$F'(0)=-\frac{i}{\pi R}$. **1019**. 1) 若 $|z|<r$ 或 $|z|>R$，则为 0，若 $r<|z|<R$，则为 $\frac{1}{z^n}$；2) 若 $\operatorname{Im}z>\pi$，则为 $\frac{1}{z^n}$，若 $\operatorname{Im}z<\pi$，则为 0；3) 若 $|\operatorname{Im}z|<\pi$，则为 0，若 $|\operatorname{Im}z|>\pi$，则为 $-\frac{1}{z^n}$；4) 若 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$，则为 $\frac{1}{2\pi iz^n}\left[\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}-2\sum_{k=1}^{m}\frac{z^{2k-1}}{(2k-1)R^{2k-1}}\right]$，$\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}=\ln\left|\frac{R+z}{R-z}\right|+i\Delta_C\{\arg(\zeta-z)-\arg\zeta\}$ 在沿着 C 截开的 z-平面内为一个由值 $\operatorname{Ln}1=0$ 确定的单值分枝. 这个分枝在 C 上的极限值的虚部在左边为 $\frac{\pi}{2}$，在右边为 $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$. 这就确定了在 C 上的极限值 $F^\pm(\zeta)$；$F(0)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1+(-1)^{n-1}}{nR^n}$；5)函数 $F(z)$ 与上一小题相同，唯一的差别是 $\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}$ 在沿着另一半圆 C 截开的 z-平面内为一个有相同值 $\operatorname{Ln}1=0$ 的单值分枝. 该枝在 C 上的极限值的虚部在左边为 $\frac{3\pi}{2}$，在右边为 $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. 这就确定了在 C 上的极限值 $F^\pm(\zeta)$；$F(0)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1+(-1)^{n-1}}{nR^n}$. 注. 在第(4)与第(5)小题中，$\operatorname{Ln}\frac{R+z}{R-z}$ 的分枝在圆 $|z|<R$ 内相同，但一般而言，它们是不同的；例如，在 ∞ 处，第一个情形中，此分枝的值为 $-\pi i$，而第二个情形中，则为 $+\pi i$. 但 $F(\infty)=0$. **1020**. $\operatorname{Ln}\frac{b-z}{a-z}=\ln\left|\frac{b-z}{a-z}\right|$

$+i\Delta_0\arg(\zeta-z)$在沿着C截开的z-平面内为一个由值$\operatorname{Ln}1=0$确定的单值分枝(题**1021**至**1024**中的分枝都以同样的方式定义).

1021. $b-a+z\operatorname{Ln}\dfrac{b-z}{a-z}$. **1022**. 1) $\sum\limits_{k=1}^{n}A_{nk}z^{k-1}+z^{n}\operatorname{Ln}\dfrac{b-z}{a-z}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}c_nA_{nk}z^{k-1}+\varphi(z)\operatorname{Ln}\dfrac{b-z}{a-z}$, 其中 $A_{nk}=\dfrac{b^{n-k+1}-a^{n-k+1}}{n-k+1}$.

1023. $\dfrac{1}{z-z_0}\left(\operatorname{Ln}\dfrac{b-z}{a-z}-\operatorname{Ln}\dfrac{b-z_0}{a-z_0}\right)$. **1024**. $\dfrac{1}{(z-z_0)^n}\left[\operatorname{Ln}\dfrac{b-z}{a-z}-\operatorname{Ln}\dfrac{b-z_0}{a-z_0}+\sum\limits_{k=2}^{n}A_k(z-z_0)^{k-1}\right]$, $A_k=\dfrac{1}{k-1}\left[\dfrac{1}{(b-z_0)^{k-1}}-\dfrac{1}{(a-z_0)^{k-1}}\right]$, $F(z_0)=-A_{n+1}$. **1025**. 1) $F^+(z)=\ln(z+R)$, $F^-(z)=\ln\left(1+\dfrac{R}{z}\right)$; $F^+(\zeta)=\ln 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\dfrac{\varphi}{2}$, $F^-(\zeta)=\ln 2\cos\dfrac{\varphi}{2}-i\dfrac{\varphi}{2}$; 2) $F^+(z)=\ln(R-z)+\pi i$[1], $F^-(z)=\ln\left(1-\dfrac{R}{z}\right)$; $F^+(\zeta)=\ln 2R\left|\sin\dfrac{\varphi}{2}\right|+i\dfrac{\pi+\varphi}{2}$, $F^-(\zeta)=\ln 2\left|\sin\dfrac{\varphi}{2}\right|+i\dfrac{\pi-\varphi}{2}$. **1026**. 1) $F^+(z)=0$, $F^-(z)=\ln\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$; $F^+(\zeta)=0$, $F^-(\zeta)=\ln\left(1-\dfrac{1}{\zeta}\right)$; 2) $F^+(z)=\ln\dfrac{z}{z-1}$, $F^-(z)=0$; $F^+(\zeta)=\ln\dfrac{\zeta}{\zeta-1}$, $F^-(\zeta)=0$. **1027**. $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{nz^n}\left[\operatorname{Ln}\dfrac{R+z}{R-z}-2\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{z^{2k-1}}{(2k-1)R^{2k-1}}\right]$, 其中 $m=\left[\dfrac{n}{2}\right]$,而$\operatorname{Ln}\dfrac{R+z}{R-z}$有与题**1019**(4) 相同的值. 这也确定了在C上的极限值$F^{\pm}(\zeta)$. 若$|z|<R$, 则 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, 其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C\ln\dfrac{\zeta}{\zeta-1}\dfrac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$. **1028**. $F^+(z)=-\dfrac{1}{\pi i}\left[2+\sqrt{z}\ln\dfrac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right]$, $F^-(z)=-\dfrac{1}{\pi i}\left[2+\sqrt{z}\ln\dfrac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}\right]-\sqrt{z}$.

1029. $F^+(z)\equiv0$, $F^-(z)=\operatorname{Ln}\dfrac{z-b}{z-a}$(对数的分枝由问题的条件所确定).

1030. $F^+(z)\equiv1$, $F^-(z)=1-\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$. **1031**. $F^+(z)=z-\lambda a-(1-\lambda)b$, $F^-(z)=z-\lambda a-(1-\lambda)b-(z-a)^{\lambda}(z-b)^{1-\lambda}$. **1032**. $F^+(z)=\operatorname{Ln}\dfrac{z-z_0}{z-b}$,

1) 若$\operatorname{Ln}z$与$\ln z$都是题中给出的分枝,则$\operatorname{Ln}z=\ln(-z)+\pi i$.

$F^-(z)=\mathrm{Ln}\dfrac{z-\zeta_0}{z-a}$. **1034**. $-x^2+x-3.5$. **1035** 1) $\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{z}{z-1}\right)^2$; 2) $\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{\tau}{1-\tau}\right)^2-\dfrac{\pi^2}{2}$. **1037**. 若$|z|>1$而$z\overline{\in}C$, 则$F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\cdot\ln\dfrac{z}{z-1}\,\mathrm{Ln}\dfrac{R+z}{R-z}+F_1(z)$, 其中$F_1(z)$在$|z|>1$内解析,$\mathrm{Ln}\dfrac{R+z}{R-z}$的枝的选取方法如同题**1019**(4).从这个关系式,可看出$F(z)$在点$\pm R$,即弧C的端点处的性状. **1038**. $D(f)$是区域G的映象区域G'的面积. **1044**. 1) $\ln\left|\dfrac{R^2-\bar{\zeta}z}{R(z-\zeta)}\right|$; 2) $\ln\left|\dfrac{z-\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right|$; 3) $\ln\left|\dfrac{e^{\pi z}-e^{\pi\bar{\zeta}}}{e^{\pi z}-e^{\pi\zeta}}\right|$. **1050**.

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)\frac{r^2-R^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta,\ u(\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\zeta)d\theta.$$

1052. 1) $f(z)=\varphi(z)+\overline{\psi\left(\dfrac{R^2}{\bar{z}}\right)}$, $f_1(z)=-\overline{\varphi\left(\dfrac{R^2}{\bar{z}}\right)}-\psi(z)$, 其中$v(0)=\mathrm{Im}\,f(0)=\mathrm{Im}[\varphi(0)+\overline{\psi(\infty)}]$; 2) $f(z)=-i\varphi(z)+\overline{i\psi\left(\dfrac{R^2}{\bar{z}}\right)}$, $f_1(z)=\overline{i\varphi\left(\dfrac{R^2}{\bar{z}}\right)}+i\psi(z)$, $v(0)=\mathrm{Im}\,f(0)=\mathrm{Im}[-i\varphi(0)+\overline{i\psi(\infty)}]$. **1053**. 1) $f(z)=z^n$, $f_1(z)=-\dfrac{R^{2n}}{z^n}$(在这里以及在题**1054**至**1057**的答案中, $v(0)$的值取0). **1054**. $f(z)=\dfrac{z^n}{R^{2n}}$, $f_1(z)=-\dfrac{1}{z^n}$. **1055**. $f(z)=-\ln\left(1-\dfrac{z}{R^2}\right)(\ln 1=0)$, $f_1(z)=\ln\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$. **1056**. $f(z)=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-z}}\left(f(0)=\dfrac{1}{R}\right)$, $f_1(z)=-\sqrt{\dfrac{z}{z-1}}$. **1057**. $f(z)\equiv\ln R$, $f_1(z)\equiv-\ln R$. **1059** $u(z)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\frac{y\,dt}{(t-x)^2+y^2}$, $f(z)=\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)dt}{t-z}+iC$($u(t)$在整个区间$(-\infty,\infty)$上的逐段连续与有界足以保证第一个积分的存在, 至于第二个积分, 还要添加条件, 例如要求函数$u(t)$在无穷远处的阶为$\dfrac{1}{|t|^\alpha}$$\alpha>0)$). **1060**. $f(z)=u(z)+iv(z)=\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\mathrm{cth}\frac{\pi(t-z)}{2}dt-\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}u_1(t)\mathrm{th}\frac{\pi(t-z)}{2}dt$, 其中$u_1(t)=u(t+i)$(对于积分的存在,只要加条件,例如$u(t)$在无穷远处如$\dfrac{1}{|t|^{1+\alpha}}(\alpha>0)$一样地递减就足够了). **1062** 圆盘$|z|<1$内在点

$e^{i\theta}$ 与圆 $|z|=1$ 相切的圆. **1064** 在圆 $|z|<1$ 内部的联接点 $e^{i\theta_1}$ 与 $e^{i\theta_2}$ 的圆弧. **1065**. $\omega(z; a, b)=\frac{1}{\pi}\arg\frac{z-b}{z-a}$, $\omega(z; -\infty, b)=\frac{1}{\pi}\arg(z-b)$, $\omega(z; a, \infty)=1-\frac{1}{\pi}\arg(z-a)$. 这些调和测度的几何意义是由线段或射线在点 z 所张的角(除以 π). **1066**. 对于射线 $\arg z=0$, 为 $1-\frac{1}{\gamma}\arg z$, 而对于射线 $\arg z=\gamma$, 为 $\frac{1}{\gamma}\arg z$. **1067**. $\omega(z, \Delta)=\frac{2}{\pi}\arg\frac{z-R}{z+R}-1=1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2Ry}{R^2-|z|^2}$, $\omega(z, \Gamma)=1-\omega(z, \Delta)$. 对于 $\omega(z, \Delta)$, 阶层曲线为圆弧(联接点 $\pm R$), 以该圆弧上的点为顶点、直径 Δ 张的角为 $\frac{\pi}{2}(1+\omega)$, 对于 $\omega(z, \Gamma)$, 阶层曲线也为圆弧(联接点 $\pm R$), 但以该圆弧上的点为顶点、直径 Δ 张的角为 $\pi\left(1-\frac{\omega}{2}\right)$. **1068**. $\omega(z, \Gamma)=\frac{2}{\pi}\arg\frac{z-R}{z+R}$. **1069**. $\omega(z, \Gamma)=\frac{2}{\pi}\arg\frac{\sqrt{z}-\sqrt{R}}{\sqrt{z}+\sqrt{R}}$. **1070**. 对于 $|z|=R$, $\frac{\ln|z|-\ln r}{\ln R-\ln r}$, 而对于 $|z|=r$, $\frac{\ln|z|-\ln R}{\ln r-\ln R}$. **1073**. $u(z)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\omega_\nu(z)$.

第 八 章

1078. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$; 由这个展开式, $f(z)$ 被解析延拓到圆 $|z-a|<|1-a|$ 内, 若 a 不属于区间$[0, 1)$, 则此圆就不完全位于圆 $|z|<1$ 的内部. **1079**. $f(z)=\ln\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^n}{n}$; 此级数的收敛圆为 $\left|z+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$. **1093**. 解法: 置换 $e^t=x$ 将积分化为形式 $f(s)=\int_1^\infty\frac{\sin x\,dx}{x^s}$ $(x^s=e^{s\ln x})$. 分部积分, 我们得到 $f(s)=\cos 1-\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^{s+1}}dx$. 后一积分在半平面 $\operatorname{Re}s>-1$ 内收敛. **1096**. $0<\operatorname{Re}z<1$, $-1<\operatorname{Re}z<1$. **1098**. 点 $z=1$ 为简单极, 残数为 1. **1099**. 解法: 记 $f_1(z)=\int_0^\infty e^{-t}\varphi(zt)dt$. 函数 $f_1(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内的解析性从题 **535** 的结果及从拉普拉斯积分的一般性质(参见题 **893** 前的说明)得出. 分部积分 $(n+1)$

次，并利用题535的不等式，我们得到，当 $|z|<1$ 时

$$f_1(z)=-\sum_{k=0}^{n} z^k\left[e^{-t}\varphi^{(k)}(zt)\right]_0^{\infty}+z^{n+1}\int_0^{\infty}e^{-t}\varphi^{(n+1)}(zt)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k+z^{n+1}\int_0^{\infty}e^{-t}\varphi^{(n+1)}(zt)dt.$$

估计 $|\varphi^{(n+1)}|$，即得后一等式中右边的第二项当 $n\to\infty$ 时趋于零($|z|<r$)。欲证明第二个论断，任取一点 $z\in G$. 容易证明，函数 $f(z)$ 在以 Oz 为直径的圆的内部与边界上都没有奇点．这就说明对于一个充分小的 $\delta>0$，函数 $f(z)$ 在半径为 $\frac{|z|}{2}+\delta$，且与已作出的圆同心的圆内部(及其边界 C 上)也解析．所以，对于展开式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 的系数 c_n，等式 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta$ 成立，因此，

$$\varphi(zt)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nt^n}{n!}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nt^nf(\zeta)}{n!\,\zeta^{n+1}}$ 在 C 上一致收敛，故 $\varphi(zt)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)e^{\frac{zt}{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta}$. 量 $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ 在 C 上的极大值等于 $\frac{|z|}{|z|+\delta}=q<1$(在证明该论断的过程中，考虑 z 取正实数的情形就够了，这是因为关于原点的旋转并不改变 $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\zeta}\right)$，因此，$|\varphi(zt)|<Ae^{qt}$($A=$ 常数))；由此即得积分 $\int_0^{\infty}e^{-t}\varphi(zt)\,dt$ 收敛. **1103**. 若 $\mathrm{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}$ 为函数 $\mathrm{Ln}\frac{z-z_2}{z-z_1}$ 的一个分枝，在沿着弧 γ_1 截开的 z-平面内解析，且在 $z=\infty$ 为零，则 $F^-(z)=(a-b)\,\mathrm{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}$，$F^+(z)=(a-b)\,\mathrm{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}+2\pi bi$；在 G^+ 的内部．越过 γ_1 解析延拓时，$F^-(z)=(a-b)\,\mathrm{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}-2\pi i(a-b)$；越过 γ_2 解析延拓时，$F^-(z)=(a-b)\mathrm{Ln}^{(1)}\frac{z-z_2}{z-z_1}$. **1105**. 1) $z=\pm3$; 2) $z=\pm2i$; 3) $z=\pm2i$. 在所有三种情形中，$w'(z)$ 都取不同的值。 **1107**. 在 $z=1$ 上，有两个元素；$z=1+t$,

$$w_1=\frac{1-(1-t)^{\frac{1}{2}}}{t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}t+\cdots,\ |t|<1,$$

$$w_2=\frac{1+(1-t)^{\frac{1}{2}}}{t}=\frac{2}{t}-\frac{1}{2}+\cdots,\ 0<|t|<1;$$

在 $z=2$ 上，有一个代数元素：$z=2+t^2,\ w=\frac{1}{1+it}=1-it-t^2+\cdots,$ $|t|<1$. **1108**. 在 $z=1$ 上，有两个代数元素：

$$z=1+t^2,\ w=\pm i\sqrt{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm i\sqrt{2}\left(1-\frac{t}{4}+\cdots\right),\ |t|<2;$$

在 $z=5$ 上，有一个代数元素：$z=5+t^2,\ w=\frac{t}{2}\left(1-\frac{t^2}{32}+\cdots\right),\ |t|<2,$ 以及两个正则元素：$z=5+t,\ w=\pm 2i\left(1+\frac{t}{32}+\cdots\right),\ |t|<4$; 在 $z=\infty$ 上，有一个代数元素：$z=t^{-4},\ w=\frac{1}{t}-t+\cdots,\ 0<|t|<\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$. **1109**. 在 $|z|=1$ 上，有两个代数元素：$z=1+t^2, w=\pm(1+t)^{\frac{1}{2}}=\pm\left(1+\frac{1}{2}t-\cdots\right),$ $|t|<1$. **1110**. 在 $z=1$ 上，有三个代数元素：$z=1+t^3,\ w=\omega_k\left(1+\frac{t}{3}+\cdots\right),\ |t|<1$, 其中 $\omega_1=1,\ \omega_{2,3}=e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$; 在 $z=2$ 上，有一个代数元素：$z=2+t^3,\ w=-\frac{t}{\sqrt[3]{2}}\left(1-\frac{t^3}{12}+\cdots\right),\ |t|<1$, 以及三个正则元素：$z=2+t,\ w=\omega_k\sqrt[3]{2}\left(1+\frac{t}{12}+\cdots\right),\ |t|<1$; 在 $z=\infty$ 上，有一个代数元素：$z=t^{-6},\ w=\frac{1}{t}+\frac{t^2}{3}+\cdots,\ 0<|t|<\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$. **1111**. 在 $z=\infty$ 上，有两个代数元素：

$$z=t^{-2},\ w=\pm\frac{1}{t}(1-at)^{\frac{1}{2}}(1-bt)^{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{t}\left(1-\frac{a+b}{2}t+\cdots\right),$$

$0<|t|<\min\left(\frac{1}{|a|},\ \frac{1}{|b|}\right)$. **1112**. $z=0$ 为双值本性奇点：$z=t^2,\ w=e^{\frac{1}{t}}=1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2!\,t^2}+\cdots,\ 0<|t|<\infty$. **1113**. 在 $z=0$ 上，有一个代数元素：$z=t^2,\ w=\frac{\sin t}{t^4}=\frac{1}{t^3}-\frac{1}{3!\,t}+\frac{1}{5!}t-\cdots,\ 0<|t|<\infty$. **1114**. 在 $z=0$ 上，有一个代数元素：$z=t^3,\ w=\operatorname{ctg} t=\frac{1}{t}-\frac{t}{3}+\cdots,\ 0<|t|<\pi$. **1115**. 在 $z=0$ 上，有一个代数元素：$z=t^2,\ w=t\left(1-\frac{t^4}{12}+\cdots\right),\ |t|<\sqrt{\pi}$. **1116**. 在 $z=1$ 上，有一个一阶超越枝点；在 $z=\infty$ 上，有一个一阶代数枝点. **1117**. 在 $z=0$ 与 $z=\infty$ 上，各有一个一阶代数枝点；在 $z=1$ 上，有一个正则点与一个本性奇点(孤立奇点). **1118**. 在 $z=0$ 与

$z=\infty$ 上，各有一个一阶代数枝点；在每个点 $z=\left(1+\frac{1}{k\pi}\right)^2$ ($k=\pm1,\pm2,\cdots$)上，有一个正则点与一个一阶极点；在 $z=1$ 上，有一个正则点与一个单值性质的非孤立奇点(极点的极限点)． **1119**．在 $z=0$ 上，有一个一阶代数枝点；在每个点 $z=k^2\pi^2$ ($k=\pm1, \pm2, \cdots$)上，有两个一阶极点；在 $z=\infty$ 上，有一个非孤立枝点(极点的极限点)． **1120**．在 $z=0$, $z=2$ 上，各有六个一阶代数枝点；在 $z=1$ 上，有两个二阶代数枝点以及六个正则点；在 $z=\infty$ 上，有两个五阶代数枝点． **1121**．在点 $z=i$, $z=-i$ 上，各有一个一阶极点的无穷集合；在点 $z=0$ 与 $z=\infty$ 上，各有一个对数枝点． **1122**．在 $z=1$ 上，有无穷多个正则点与无穷多个一阶极点；在点 $z=0$ 与 $z=\infty$ 上，各有一个对数枝点． **1123**． $w=\frac{1}{4}$, $w=\infty$ 为一阶代数枝点． **1124**． $w=\pm2$ 为一阶代数枝点；$w=\infty$ 为二阶代数枝点． **1125**． $w=\frac{1}{4}$, $w=\infty$ 为一阶代数枝点． **1126**． $w=0$, $w=\infty$ 为一阶代数枝点． **1127**． $w=\frac{1}{2}e^{\pm i\alpha}$ ($a=\cos\alpha$) 为一阶代数枝点． **1128**． $w=\infty$ 为 $(n-1)$ 阶代数枝点．导数 $w'(z)$ 的每个 k 阶零点对应函数 $z(w)$ 的同阶代数枝点． **1129**．导数 $w'(z)$ 的零点对应代数枝点，与前面的情形相同．函数 $w(z)$ 的阶数大于 1 的极点对应阶数比极点阶数小 1 的代数枝点．若在 ∞ 处，函数 $w(z)=w_0+\frac{c_{-k}}{z^k}+\cdots$ ($k>1$)，则 $z=\infty$ 对应 $w=w_0$ 上的一个 $(k-1)$ 阶代数枝点． **1130**． $z(w)$ 的黎曼面与 $\sqrt[n]{w}$ 的黎曼面相同，它的枝点位于 $w=0$, $w=\infty$ 之上，且对应 $z=-n$, $z=\infty$． w-平面上的有截口 $0<u<\infty$, $v=0$ 的各叶对应以点 $z=-n$ 为顶点的角域 $\frac{2\pi}{n}$．当 $n\to\infty$ 时，这些角域变成宽度为 2π 的水平带形，函数 $w(z)$ 变成 e^z, $z(w)$ 的黎曼面变成 $\operatorname{Ln} w$ 的黎曼面． **1131**． $z(w)$ 的黎曼面与 $\sqrt[n]{w}$ 的黎曼面相同．带有截口 $-\infty<u<0$ 的 w-平面的各叶，对应在点 $z=a$, $z=b$ 角度为 $\frac{2\pi}{n}$ 的月牙形(图 72，其中 $n=3$)[1]． **1132**．联接带有截口 $|u|<1$, $v=0$ 的 w-平面的两叶，得到 $z(w)$

1) 在本章各题的图中，对应的点都用相同的字母表示．如通常规定，无穷远点记为 Ω 与 Ω'．

的黎曼面．这两叶分别对应区域$|z|<1$与$|z|>1$．枝点位于$w=\pm1$之上，且对应$z=\pm1$．极网格$|z|=r$，$\arg z=\varphi$对应以±1为焦点的椭圆与双曲线：

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right]^2}+\frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right]^2}=1;\ \frac{x^2}{\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{\sin^2\varphi}=1.$$

1133．$w(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots$是单叶保形映射理论中熟知的极值函数．它将单位圆$|z|<1$映射到带有截口$-\infty<u<-\dfrac{1}{4}$，$v=0$的$w$-平面之上．联接这样两叶就得到$z(w)$的黎曼面．

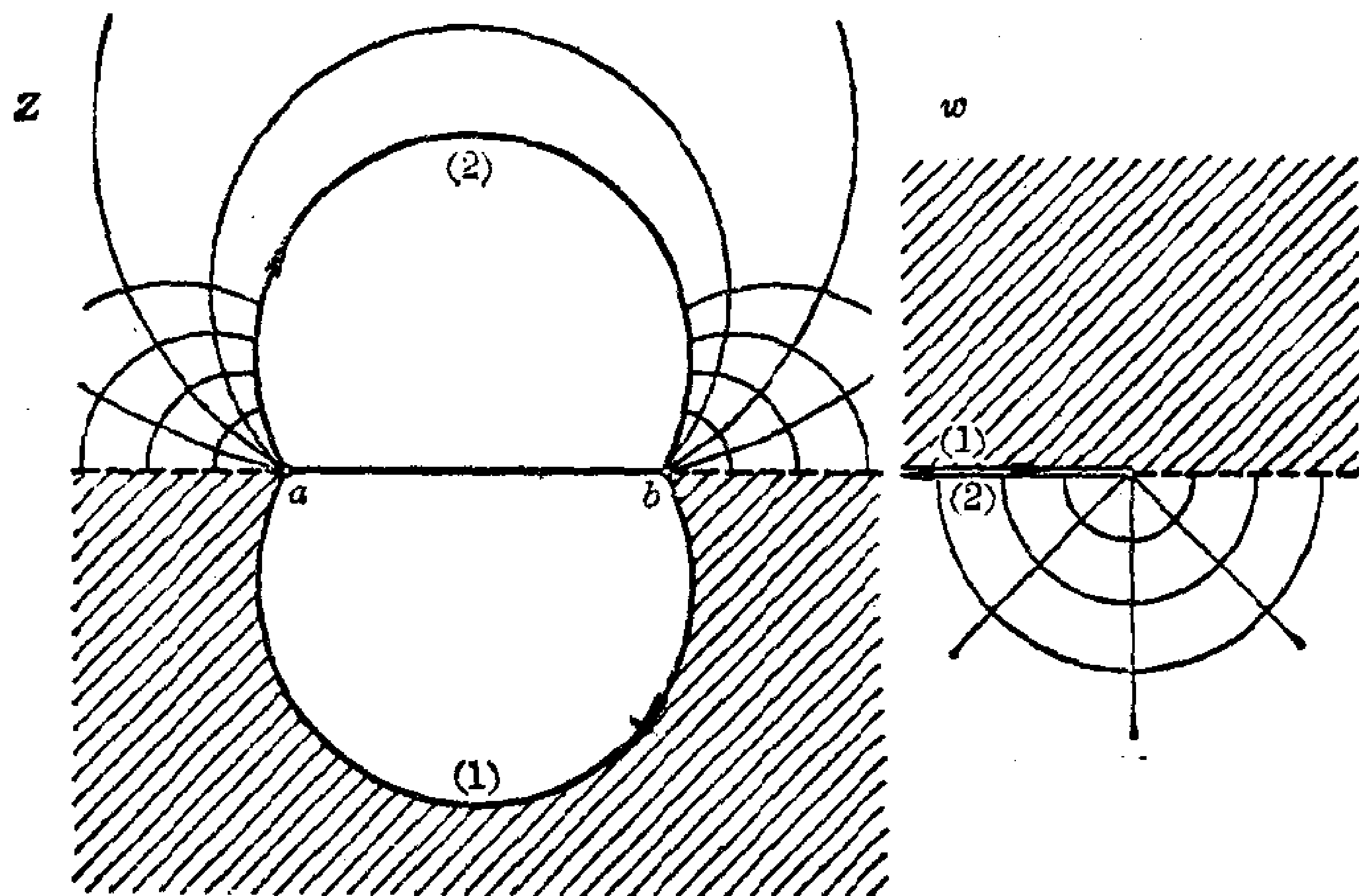


图 72

1134．相继联接带有截口$1<|u|<\infty$，$v=0$的$2n$叶w-平面就得到$z(w)$的黎曼面．在$w=\pm1$上，它有$2n$个一阶枝点，而在$w=\infty$上，它有两个$(n-1)$阶枝点．主要的映射如图73所示．函数$w(z)$关于由变换$T=\omega z\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)$，$S=\dfrac{1}{z}$生成的线性变换群为自守(不变)．这些变换对应$z(w)$的黎曼面到自身的变换，在这些变换下，各叶循环地互相变化，其点到w-平面上的射影则保持不变．

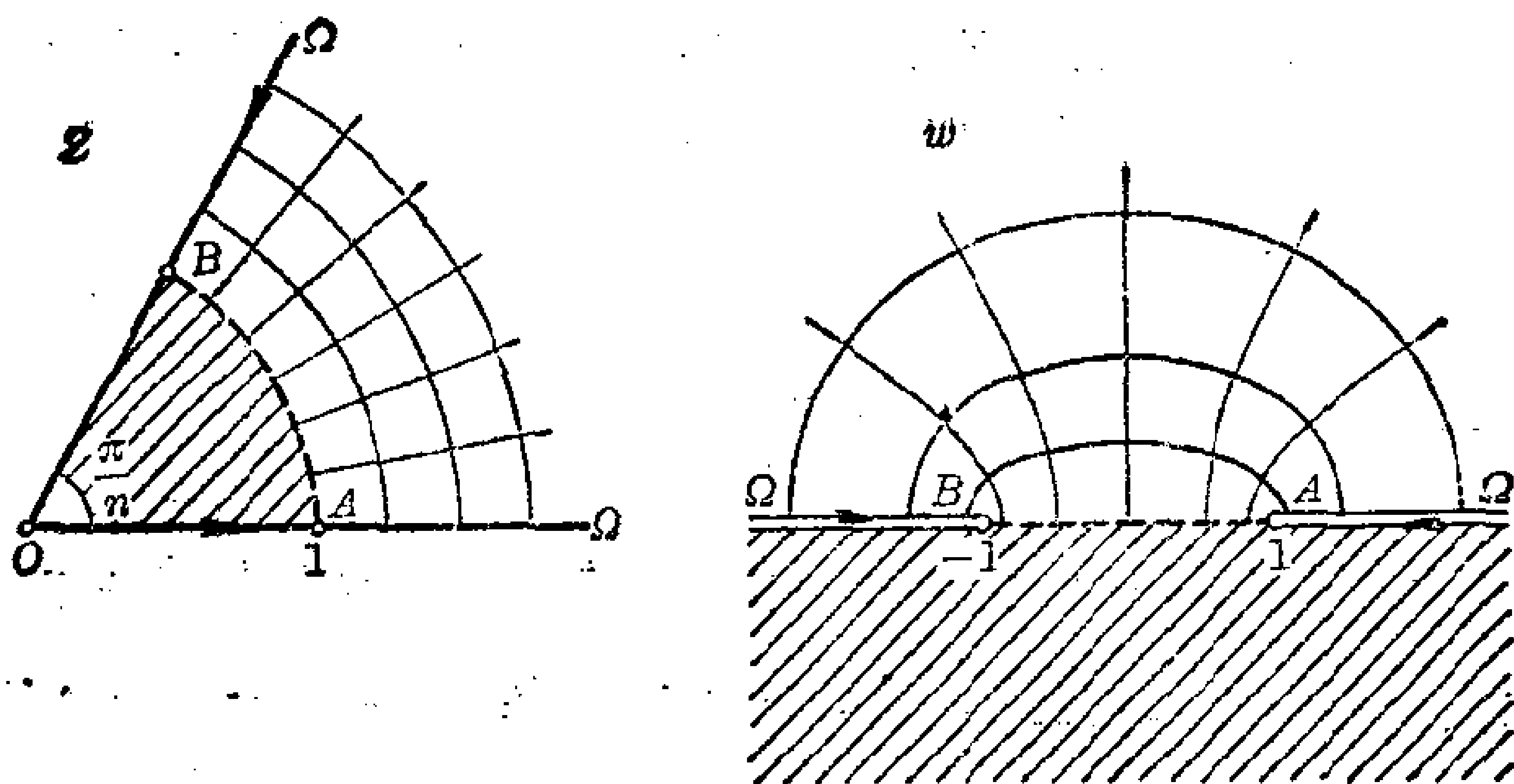


图 73

1135. $z(w)$ 的黎曼面是$2n$叶的，在对应于$z=\infty$的$w=0$上有一个$(2n-1)$阶枝点，另外还有$2n$个一阶枝点，其中n个位于$w=\infty$之上，且对应于点$z_k=e^{\frac{\pi i}{n}}\omega^k(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}, k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$，另$n$个位于点$w_k'=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 z_k'$之上，且对应于点$z_k'=\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}\,\omega^k$. 主要的变换如图74所示. 其余的则由对称原理进行延拓而得到. **1136**. $z(w)$的黎

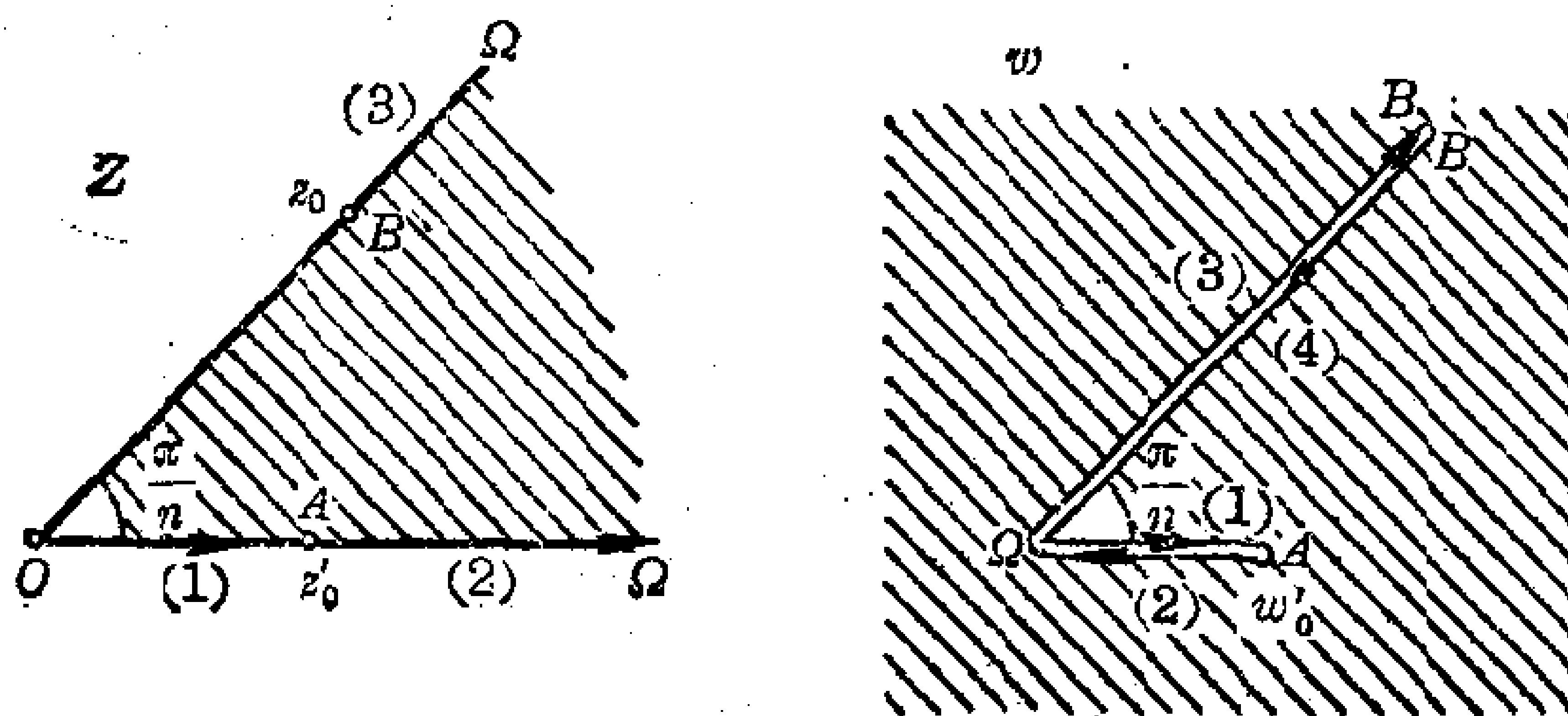


图 74

曼面为n叶的，在对应于$z=\infty$的$w=\infty$上有一个$(n-1)$阶枝点，而在对应于$z_k=\omega^k(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n-1}}, k=0, 1, \cdots, n-2)$的$w_k=z_k\left(1-\frac{1}{n}\right)$之上有$(n-1)$个一阶枝点. 欲构造黎曼面，取它的零叶（带有$(n-1)$条从$w_k$出发的径向截口的$w$-平面），并沿着每条截口每次交叉地联接一叶（带有一条径向截口的w-平面）. 主要的映射如图75所示. 圆$|z|<1$对

应圆外旋轮线的内部($n=2$ 时为心脏线). **1137**. $z(w)$ 的黎曼面为$(n+1)$叶的,在对应于 $z=\infty$ 的 $w=\infty$ 上有一个$(n-1)$所枝点,而在对应于 $z_k=\omega^k(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n+1}}, k=0, 1, \cdots, n)$ 的 $w_k=\bar{z}_k\left(1+\frac{1}{n}\right)$上有$(n+1)$个一阶枝点. 主要的映射如图 76 所示. 区域 $|z|<1$ 对应圆内旋轮线的外部($n=1$ 时为一条线段).

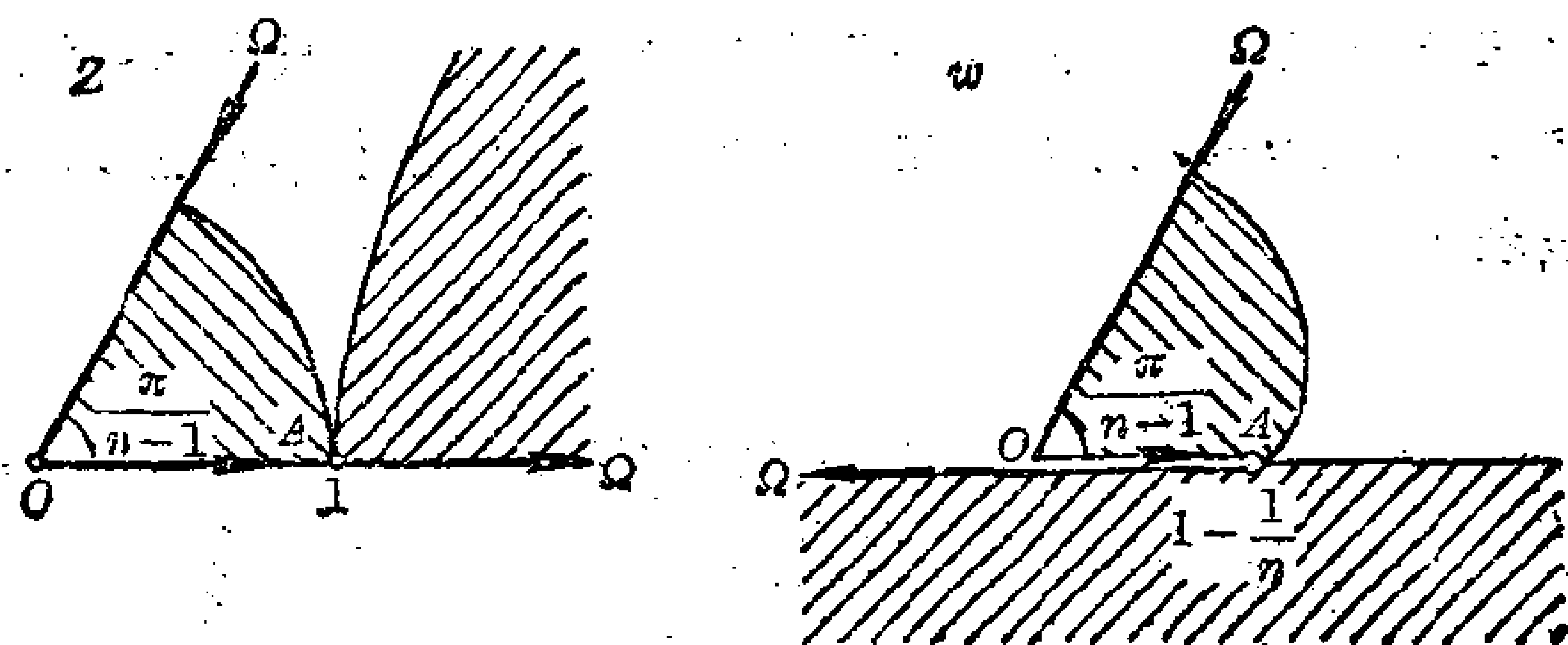


图 75

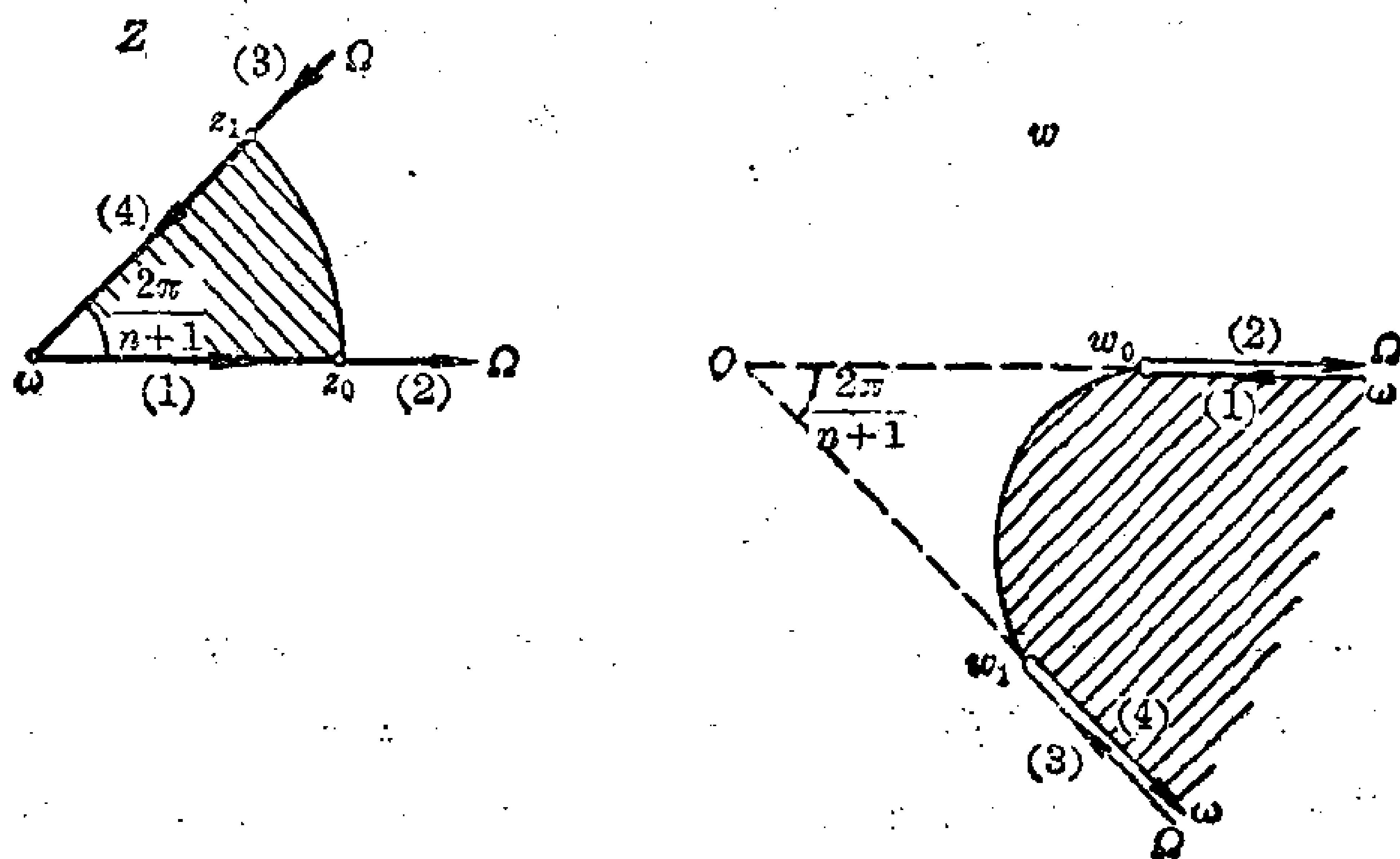


图 76

1138. $z(w)$ 的黎曼面为 n 叶的, 在对应于 $z=\infty$ 的 $w=\infty$ 上有一个$(n-1)$阶枝点, 而在对应于 $z_k=\cos\frac{k\pi}{n}(k=1, 2, \cdots, n-1)$ 的 $w_k=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$ 上有$(n-1)$个一阶枝点. 欲构造黎曼面,逐次地将带有两条截

口 $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant |u| < \infty$, $v=0$ 的 $(n-2)$ 叶联接到它的零叶(带有截口 $-\infty < u \leqslant -\frac{1}{2^{n-1}}$, $v=0$ 的 w-平面)上去,然后,若 n 为偶数,则其中最后一叶联接上带有截口 $-\infty < u \leqslant -\frac{1}{2^{n-1}}$, $v=0$ 的一叶,若 n 为奇数,则这一叶联接上带有截口 $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant u < \infty$, $v=0$ 的一叶. 在映射 $w(z)$ 下,焦点为 ± 1 的椭圆与双曲线变成焦点为 $\pm\frac{1}{2^{n-1}}$ 的椭圆与双曲线. 半轴的变化由关系式 $z=$常数, $w=$常数而得到. 图 77 表示 $n=5$ 时对应于半平面 $v>0$ 与 $v<0$ 的 z-平面的区域划分(对应于半平面 $v>0$ 的区域以影线表示).

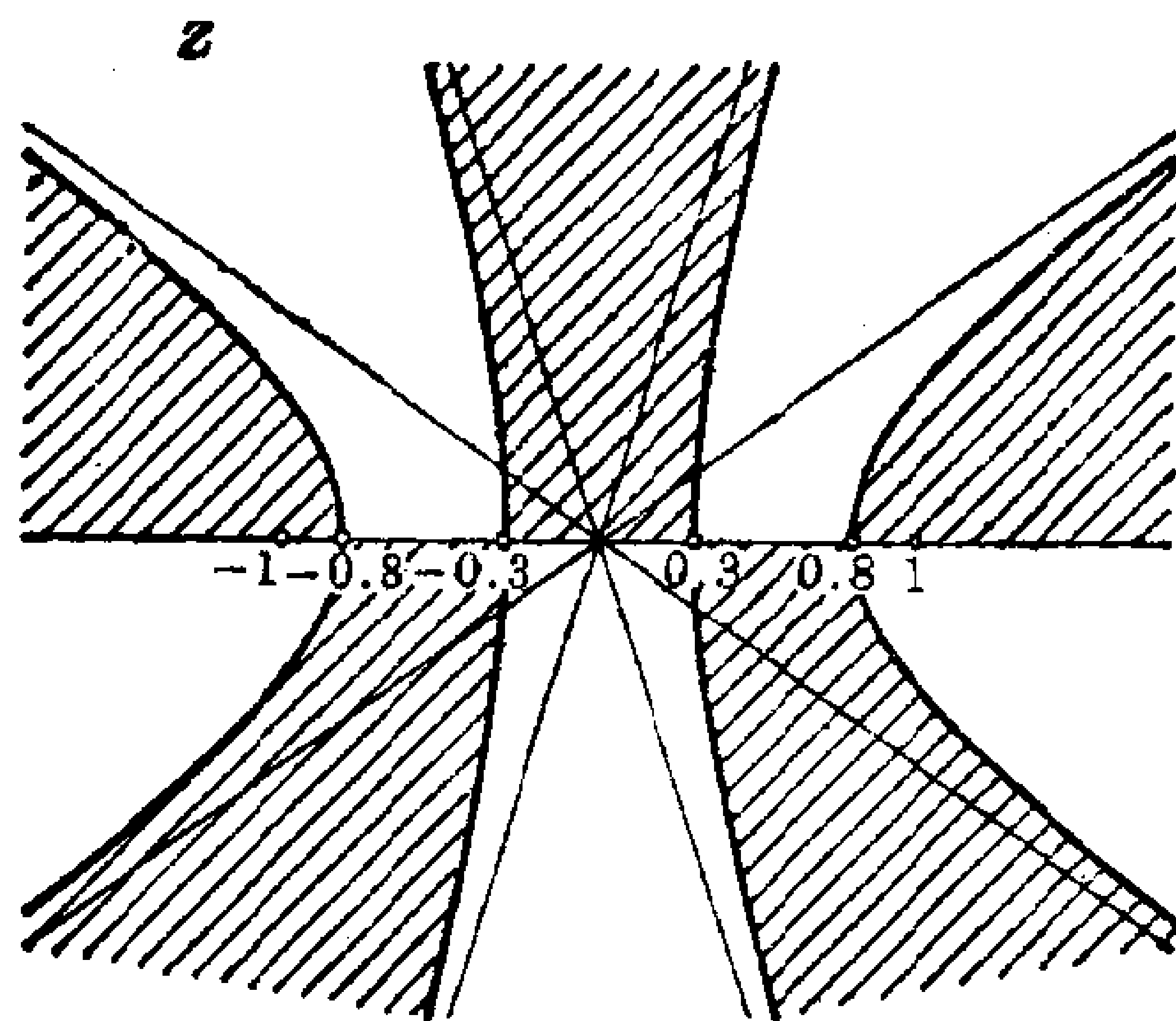


图 77

1139. $w=0$, $w=\infty$ 为对数枝点, $w=1$ 为函数 $z(w)$ 的其中一个分枝的一阶极点. **1140**. 函数 $z(w)$ 在点 $w=e^{\pm 2\pi i}$ 上各有一个一阶代数枝点,在点 $w=0$ 与 $w=\infty$ 上各有两个对数枝点. 其黎曼面由如下方法得到:在 w-平面内联接点 $w=e^{\pm 2i}$ 的弧上作截口,沿着所作的截口将函数 $\mathrm{Ln}\,w$ 的黎曼面的两叶联接起来. **1141**. 函数 $z(w)$ 在 $w=\pm\sqrt{2}$ 上有无穷多个一阶代数枝点,在 $w=\infty$ 上有两个对数枝点. **1142**. 函数 $z(w)$ 在点 $w_k=\frac{\sin z_k}{z_k}$(z_k 为方程 $\mathrm{tg}\,z=z$ 的根; 都为实数)上各有一个一阶代数枝点,在 $w=\infty$ 上有两个对数枝点,而在 $w=0$ 上有一个间接临界奇

点，它是上述代数枝点的极限点. **1143**. $z=\operatorname{Arc}\cos w=\frac{1}{i}\operatorname{Ln}(w+\sqrt{w^2-1})$. $z(w)$的黎曼面有无穷多叶，在 $w=\infty$ 上有两个对数枝点，而在对应于 $z=k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$的 $w=\pm 1$ 上有一个一阶代数枝点；联接无穷多叶带有截口 $1\leqslant|u|<\infty$, $v=0$ 的 w-平面即得到该黎曼面. 这些 w-平面分别对应铅垂带形 $k\pi<x<(k+1)\pi$(图 78). **1144**. $z=\operatorname{Arc}\sin w=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\cos w$. $z(w)$ 的黎曼面与 $\operatorname{Arc}\cos w$ 的黎曼面相同. **1145**. $z=\operatorname{Arc}\operatorname{tg} w=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{i-w}{i+w}$. $z(w)$的黎曼面有无穷多叶，在 $w=\pm i$ 上有两个对数枝点；联接无穷多叶带有截口 $u=0$, $|v|\leqslant 1$ 的 w-平面即得到该黎曼面. 这些 w-平面分别对应铅垂带形 $k\pi<x<(k+1)\pi$(图 79). **1146**. $z=\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} w=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\operatorname{tg} w$. $z(w)$ 的黎曼面与 $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} w$ 的黎曼面相同. **1147**. $z=\operatorname{Ar}\operatorname{ch} w=\operatorname{Ln}(w+\sqrt{w^2-1})$; $\operatorname{ch} z=\cos iz$. $z(w)$ 的黎曼面与 $\operatorname{Arc}\cos w$ 的黎曼面相同. **1148**. $z=\operatorname{Ar}\operatorname{sh} w=\operatorname{Ln}(w+\sqrt{w^2+1})$; $\operatorname{sh} z=-i\sin iz$. 将上一题的黎曼面绕原点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即得到 $z(w)$ 的黎曼面. **1149**. $z=\operatorname{Ar}\operatorname{th} w=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+w}{1-w}$; $\operatorname{th} z=-i\operatorname{tg} iz$. 将 $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} w$ 的黎曼面绕原点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即得到 $z(w)$的黎曼面. **1150**. $z=\operatorname{Ar}\operatorname{cth} w=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{w+1}{w-1}$; $\operatorname{cth} z=i\operatorname{ctg} iz$. $z(w)$ 的黎曼面与 $\operatorname{Ar}\operatorname{th} w$ 的黎曼面相同.

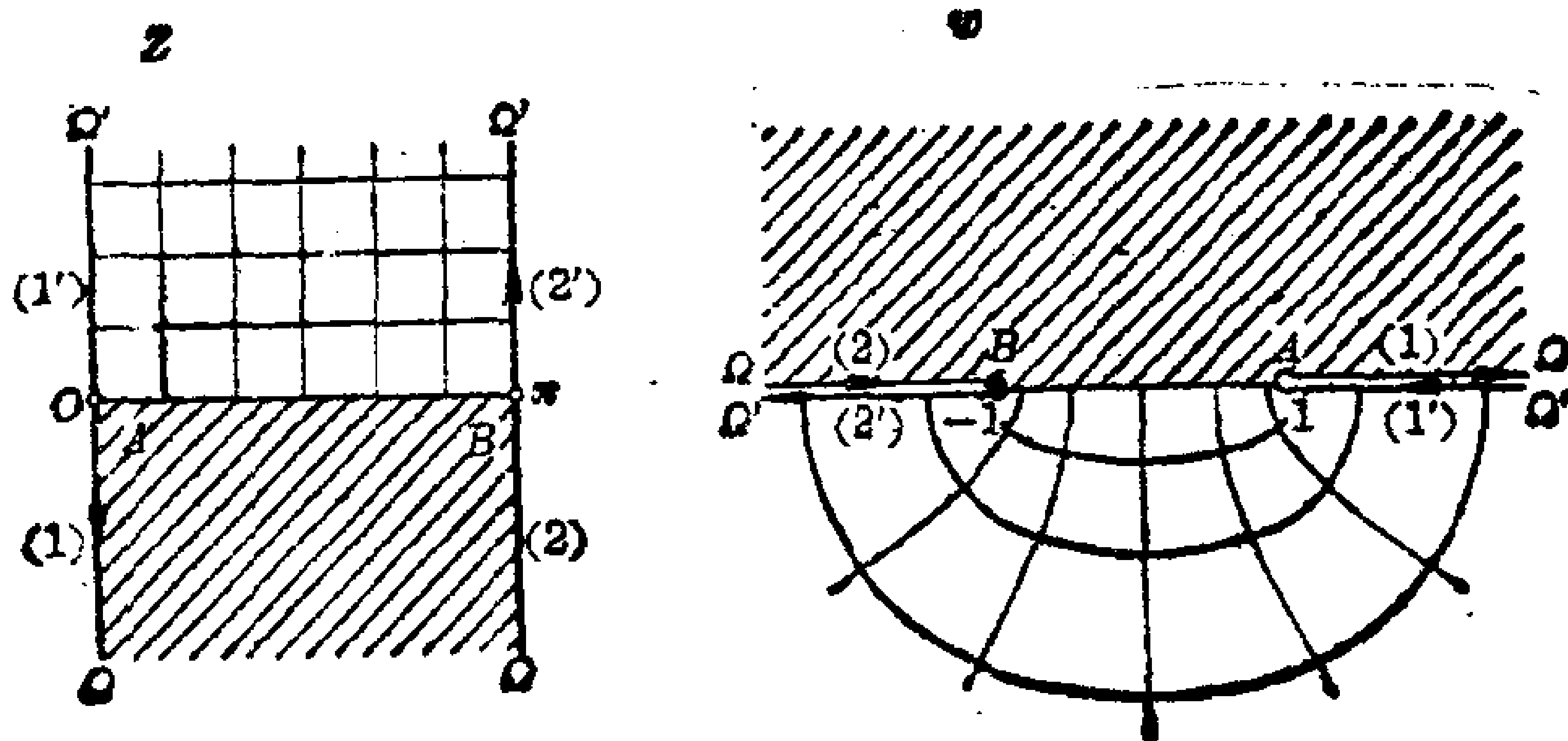


图 78

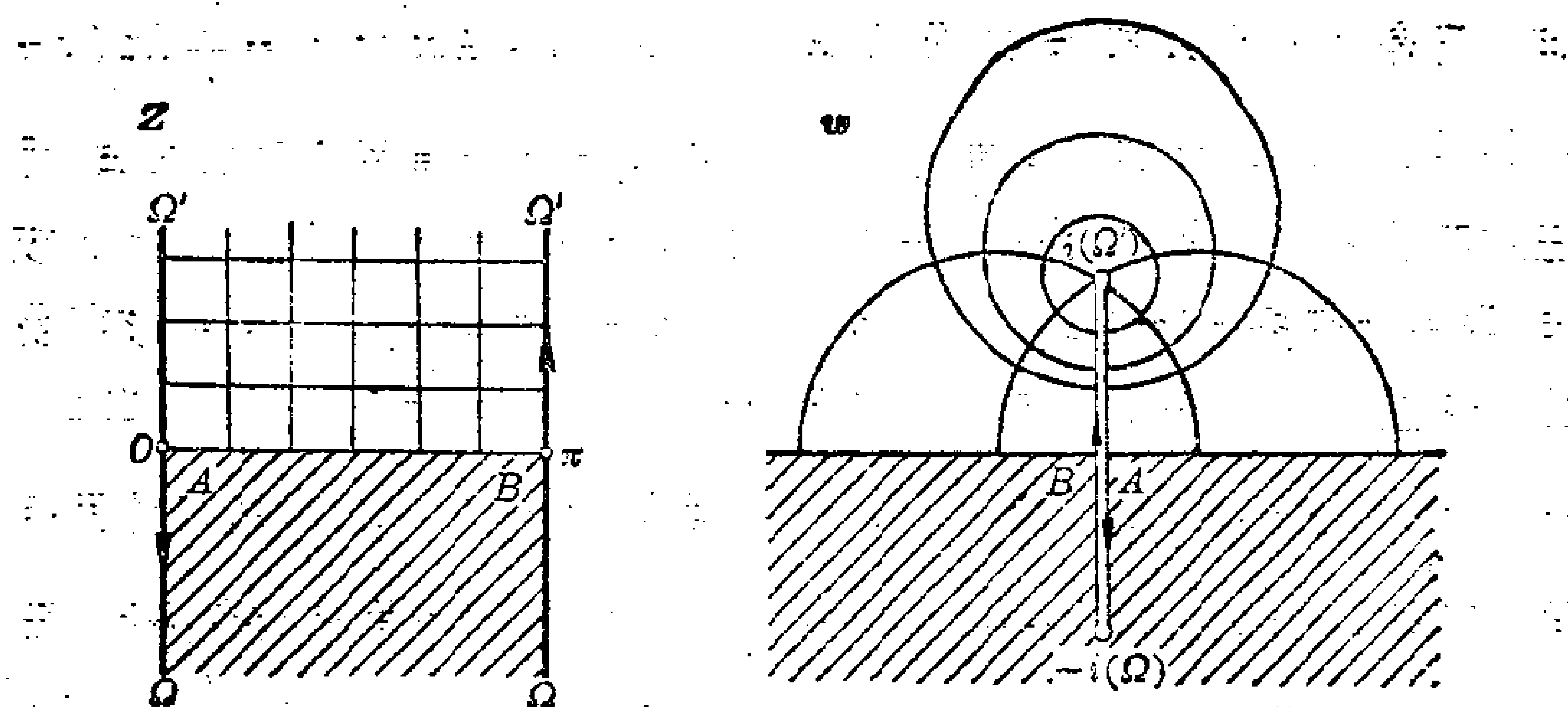


图 79

1151. $z(w)$的黎曼面构造如下：在 w–平面内作水平截口 $-\infty<u\leqslant-1$, $v=(2k+1)\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，并沿着其中每一条截口联接带有同一截口的 w–平面的一叶(该叶仅有这一条截口)．$z(w)$ 的黎曼面的构造基于如下事实：$w(z)$ 将每条带形 $2k\pi<y<(2k+2)\pi$ 映射到沿截口 $-1\leqslant u<\infty$, $v=(2k+1)\pi$ 联接着 w–平面的带形 $2k\pi<v<(2k+2)\pi$ (参见图 80；符号＋表示区域必须联接起来)．

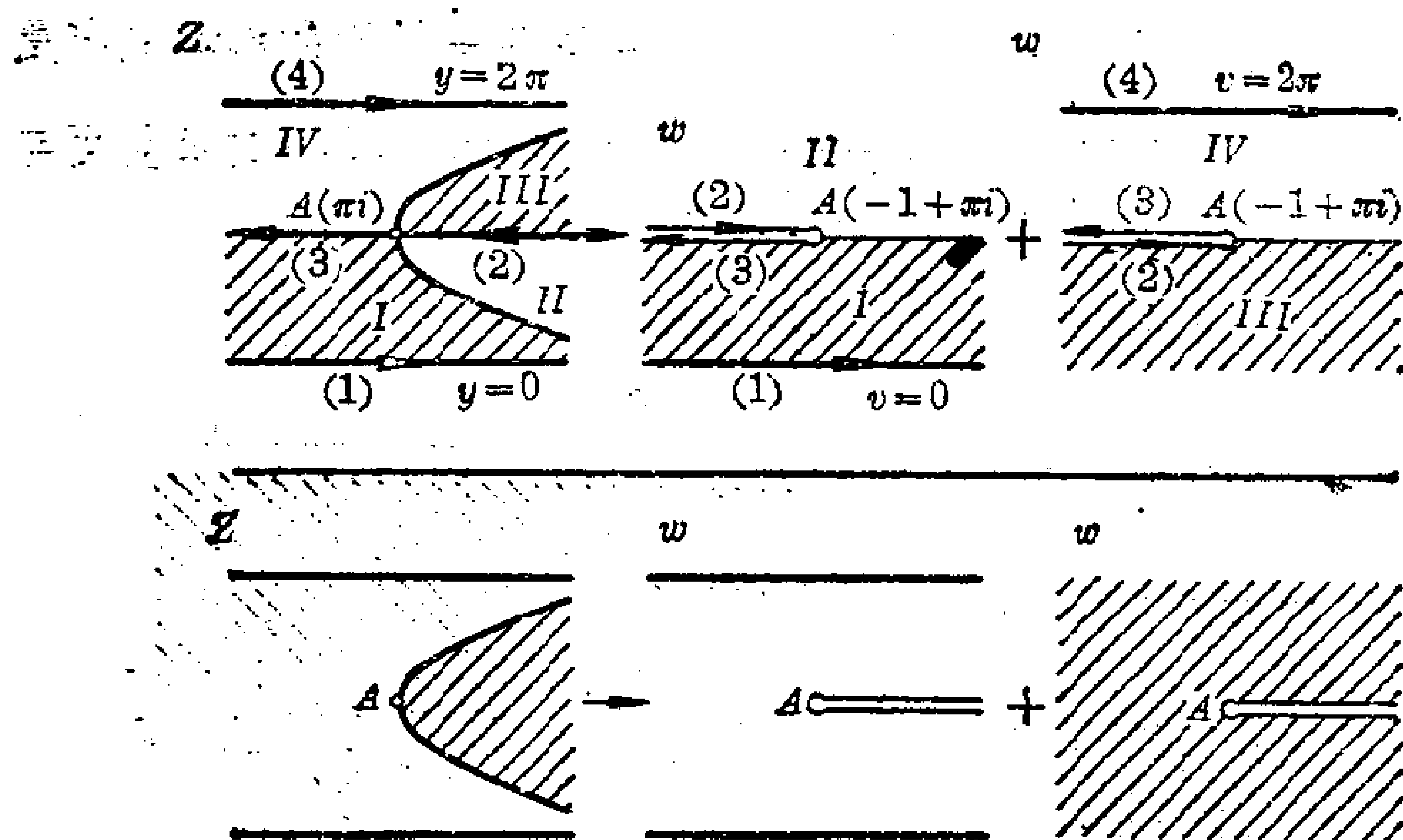


图 80

1152. 1) 设 F 是黎曼面，函数 $w=R(\zeta)$ 将 ζ–平面映射到 F 上．欲构造函数 $z(w)$ 的黎曼面，沿着黎曼面 F 上连接点 $w(0)$ 与 $w(\infty)$ 的弧将

F 截开，然后将带有这种截口的无穷多叶黎曼面 F 联接起来（类似于函数 $\mathrm{Ln}\, w$ 的黎曼面的构造）。这样得到的黎曼面在联接弧的端点处有两个对数枝点与无穷多个属于黎曼面 F 的代数枝点； 2）欲构造函数 $z(w)$ 的黎曼面，从点 $w(\pm 1)$ 到点 $w(\infty)$ 截开黎曼面 F，然后交替地沿着从点 $w(\pm 1)$ 到点 $w(\infty)$ 的截口将无穷多叶黎曼面 F 联接起来（类似于函数 $\mathrm{Arc}\sin w$ 的黎曼面的构造）。这样得到的黎曼面在 $w(\infty)$ 之上有两个对数枝点，而且除了第(1)小题中叙述的代数枝点之外，它还在点 $w(\pm 1)$ 处有无穷多个一阶代数枝点（若 $w(+1)$ 或 $w(-1)$ 为黎曼面 F 的 k 阶代数枝点，则对于 $z(w)$，它将为 $(2k+1)$ 阶代数枝点）。通过置换 $z_1=iz$，函数 $z(w)$ 的讨论可以归结为上一小题的情形. **1153**. 所有 $w(z)$ 的黎曼面都是双叶的，而且在下列点之上有一阶代数枝点：1) $z=a$; $z=b$; 2) $z=a$, $z=b$, $z=c$, $z=\infty$; 3) $z=a_k$ 与 $z=\infty$，若 n 为奇数. 欲构造黎曼面，沿着上述点到 ∞ 将 z-平面截开，取截开后的两叶 z-平面，沿着相同的截口将它们联接起来. **1154**. 所有 $w(z)$ 的黎曼面都是三叶的，而且在下列点之上有二阶代数枝点：1) $z=a$, $z=\infty$; 2) $z=a$, $z=b$, $z=\infty$; 3) $z=a$, $z=b$, $z=c$; 4) $z=a_k$ 与 $z=\infty$，若 n 非 3 的倍数. 欲构造黎曼面，沿着指定的点到 ∞ 将 z-平面截开，取截开后的三叶 z-平面，在这三叶上，我们定义三个单值分枝 w, ωw, $\omega^2 w\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$. 绕枝点转圈时，$w(z)$ 从根的因子中获得一个因子 ω；这就是沿着所有截口联接各叶的次序都相同（即为循环）的原因（参见图 81 中的解释）.

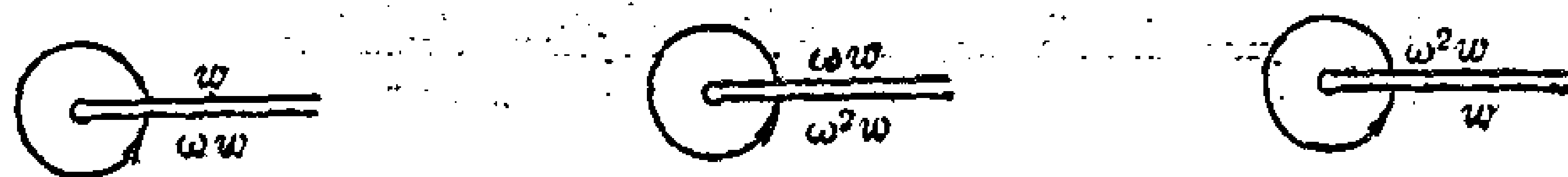


图 81

1155. $w(z)$ 的黎曼面为 n 叶的，在 $z=a$, $z=b$, $z=c$, $z=\infty$ 之上有 $(n-1)$ 阶代数枝点. 黎曼面由如下方法得到：从点 $z=a$, $z=b$, $z=c$ 到 ∞ 将 z-平面截开，然后将 n 叶截开后的 z-平面沿所有的截口循环地联接起来. 各叶分别对应函数 $\omega^k w\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}, k=0, 1, 2, \cdots, n-1\right)$ 的各单值分枝. **1156**. $w(z)$ 的黎曼面为六叶的，在 $z=\infty$ 之上有五阶代数

枝点，在点 $z=a$, $z=b$ 上各有两个二阶代数枝点，在 $z=c$ 上有三个一阶代数枝点．沿着一条从 a 到 b，从 b 到 c，从 c 到 ∞ 的曲线截开 z-平面，联接六叶截开后的 z-平面就可得到黎曼面．联接方法如下：这六叶分别对应单值分枝：w_1+w_2, ωw_1+w_2, $\omega^2 w_1+w_2$, w_1-w_2, ωw_1-w_2, $\omega^2 w_1-w_2$，其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$，而 w_1, w_2 为单值枝 $\sqrt[3]{\frac{z-a}{(z-b)^2}}$ 与 $\sqrt{z-c}$．绕 a 回转时循环地联接第 1、2、3 叶与第 4、5、6 叶；绕 b 回转时循环地联接第 1、3、2 叶与第 4、6、5 叶(沿着半叶联接两次)；绕 c 回转时循环地联接下列各叶的半叶：第 1、2、4、5 叶(如图 82 所示)；第 2、3、5、6 叶；第 3、1、6、4 叶；绕 ∞ 回转时循环地联接第 1、6、2 叶；第 4、3、5 叶(参见图 82)．

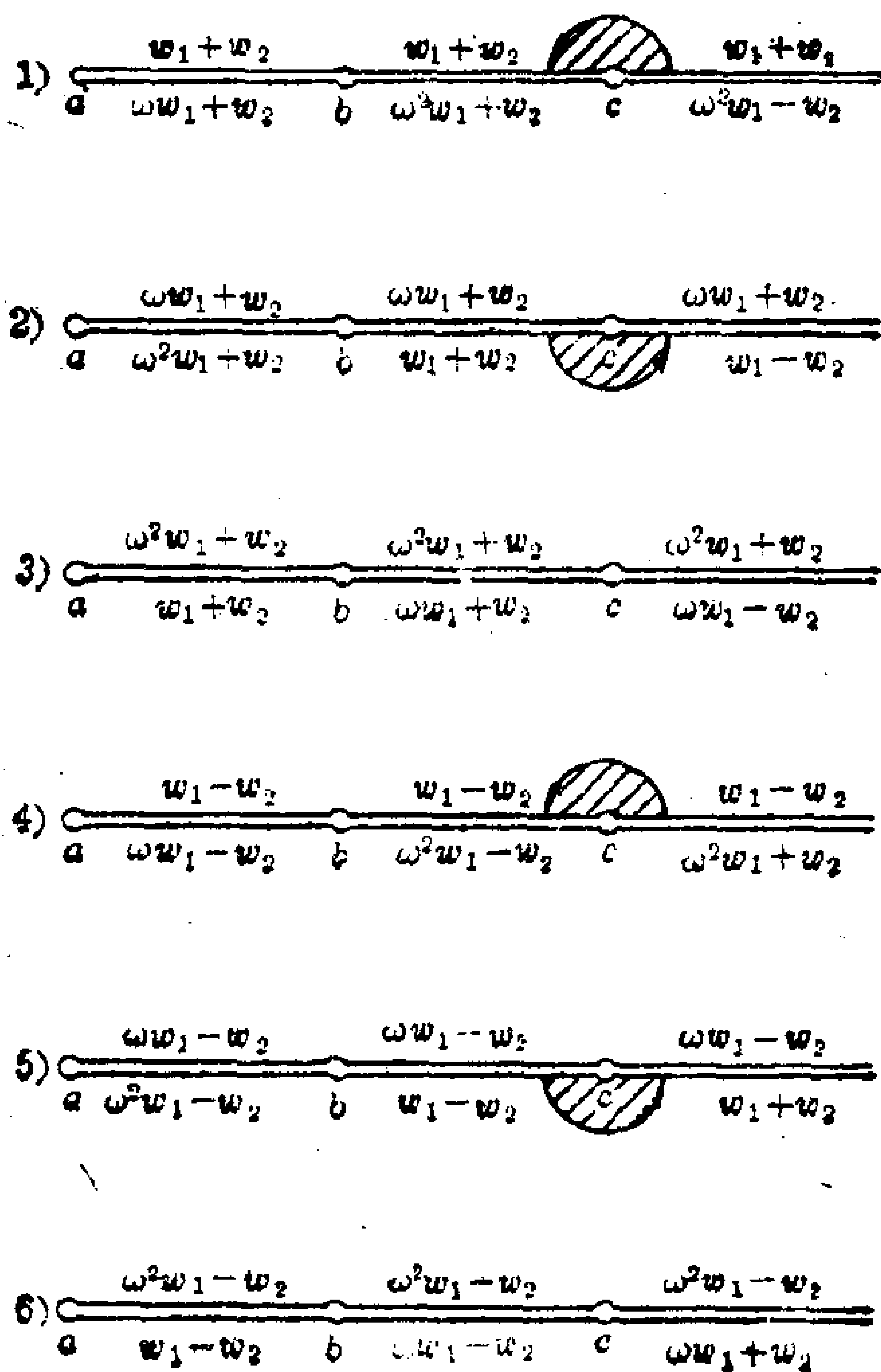


图 82

1157. $w(z)$的黎曼面为六叶的，在 $z=0$ 上有两个二阶代数枝点，在 $z=1$ 上有一个一阶代数枝点，而在 $z=\infty$ 上有一个五阶代数枝点。欲构造此黎曼面，将函数 $\sqrt[3]{z}$ 的黎曼面的两叶互相联接起来，每个函数 $\sqrt[3]{z}$ 的黎曼面的各叶上都有一条沿射线 $y=0$, $1\leqslant x<\infty$ 的截口。 **1158**. $w(z)$ 的黎曼面为两叶的，在点 $z=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 之上有一阶代数枝点；在 $z=\infty$ 之上，黎曼面有超越奇点，即代数枝点的极限点。欲构造此黎曼面，取两叶带有从代数枝点到∞（即沿平行于虚轴的射线）的截口的 z-平面，沿着同一截口联接这两叶。 **1159**.[1] 各自联接两个带有截口$[-1, 1]$的平面得到 F_z 与 F_w（图 83）。

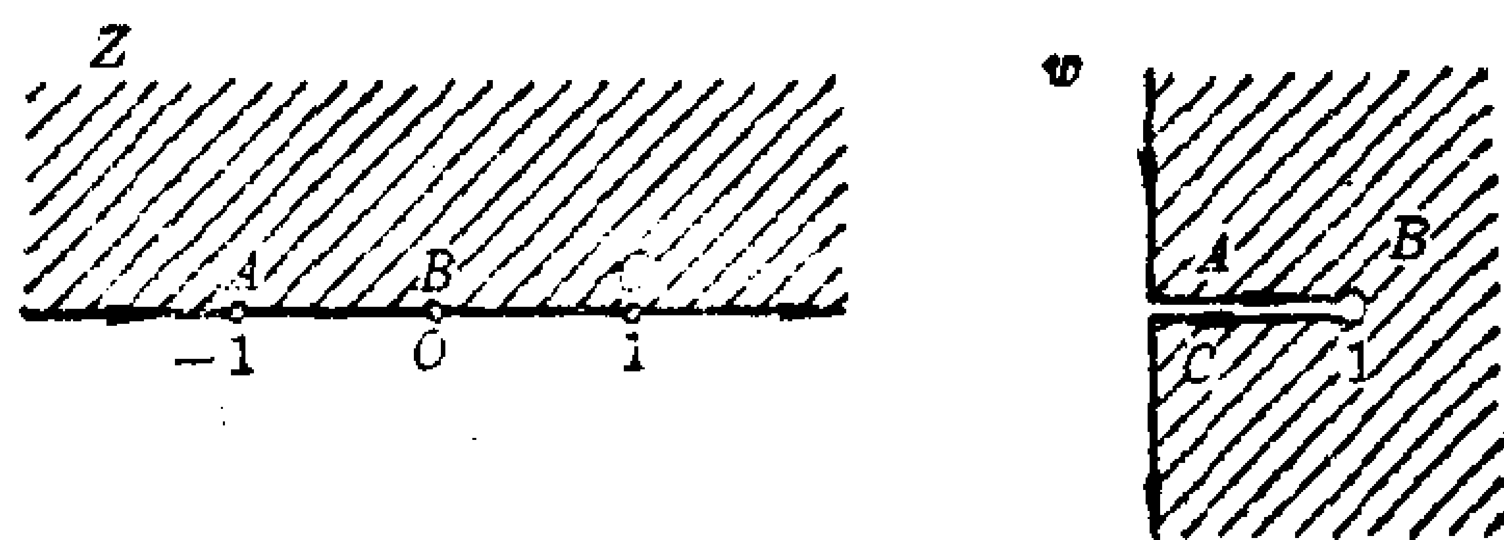


图 83

1160 联接两个带有截口$(-\infty<x\leqslant 0, y=0)$的 z-平面得到 F_z。联接两个带有截口 $\left[-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\right]$ 的 w-平面得到 F_w（图 84）。 **1161**. 各自联接三个平面得到 F_z 与 F_w，这三个平面（依循环次序）沿直线段$[0, \sqrt[3]{4}]$, $[0, \omega\sqrt[3]{4}]$, $[0, \omega^2\sqrt[3]{4}]$中的两条截开，其中 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$（图 85）。
1162. 联接两个带有截口 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ 的 z-平面得到 F_z。将带有截口 γ_1:

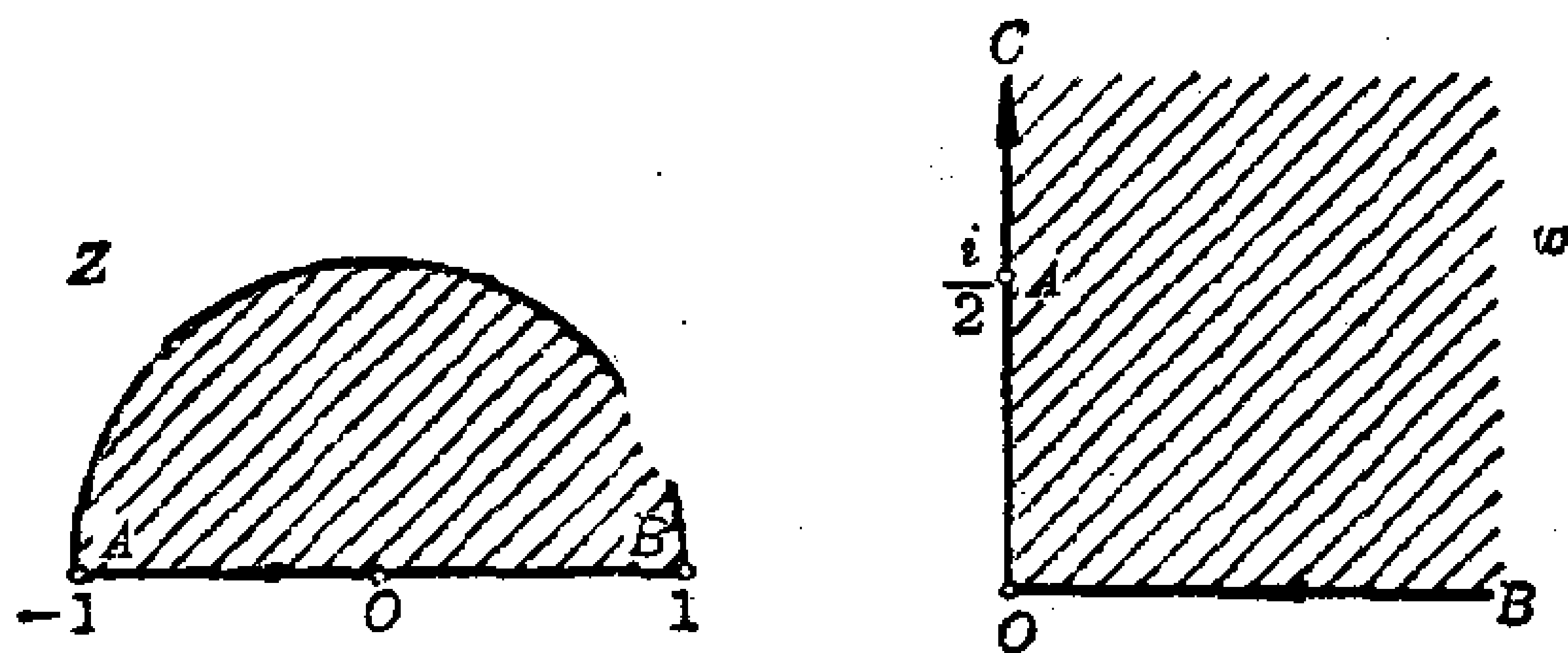


图 84

1) 在题 1159～1164 的答案中，F_w 表示 $z(w)$ 的黎曼面，即 w-平面之上的那些面，而 F_z 表示在 z-平面之上的函数 $w(z)$ 的黎曼面。

$\left[i\frac{3\sqrt{3}}{2}, +i\infty\right]$, γ_2: $\left[-i\frac{3\sqrt{3}}{2}, -i\infty\right]$ 的 w-平面与另外两个分别带有截口 γ_1 与 γ_2 的 w-平面联接起来得到 F_w(图 86).

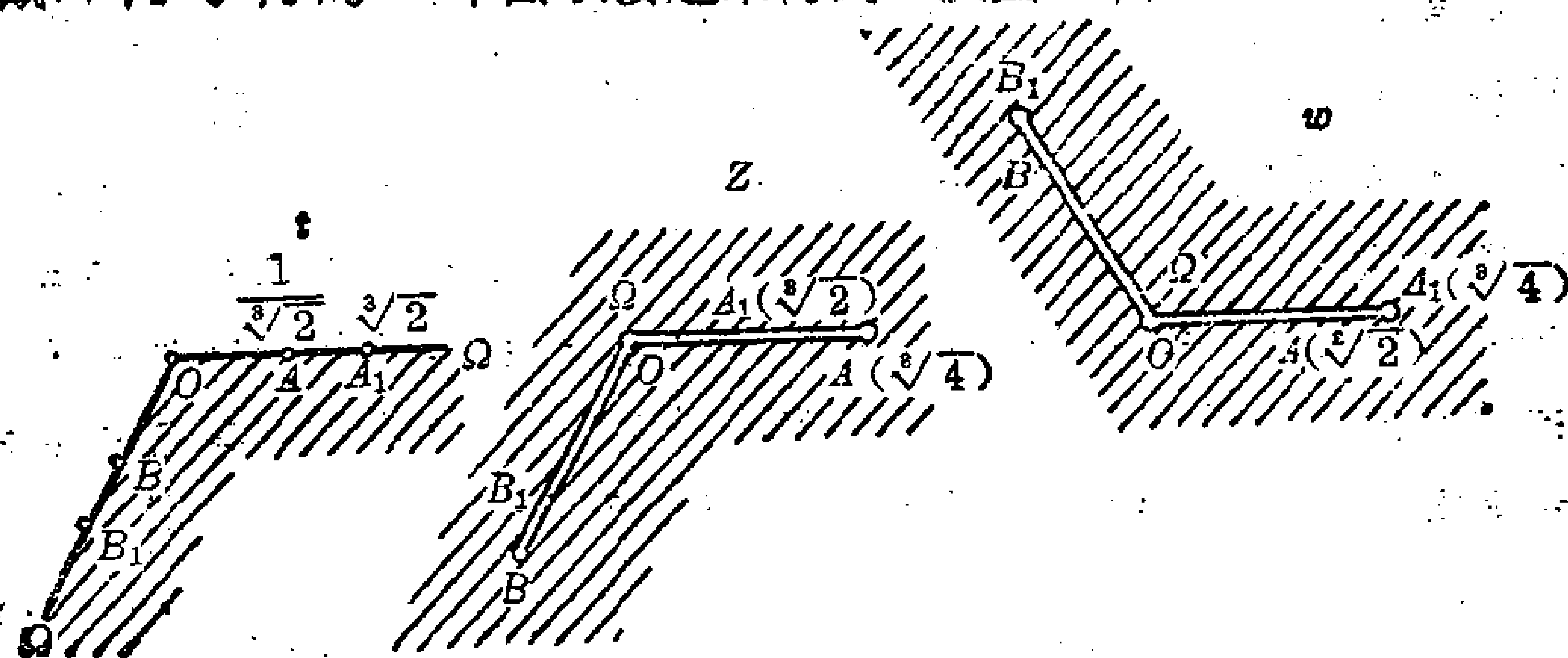


图 85

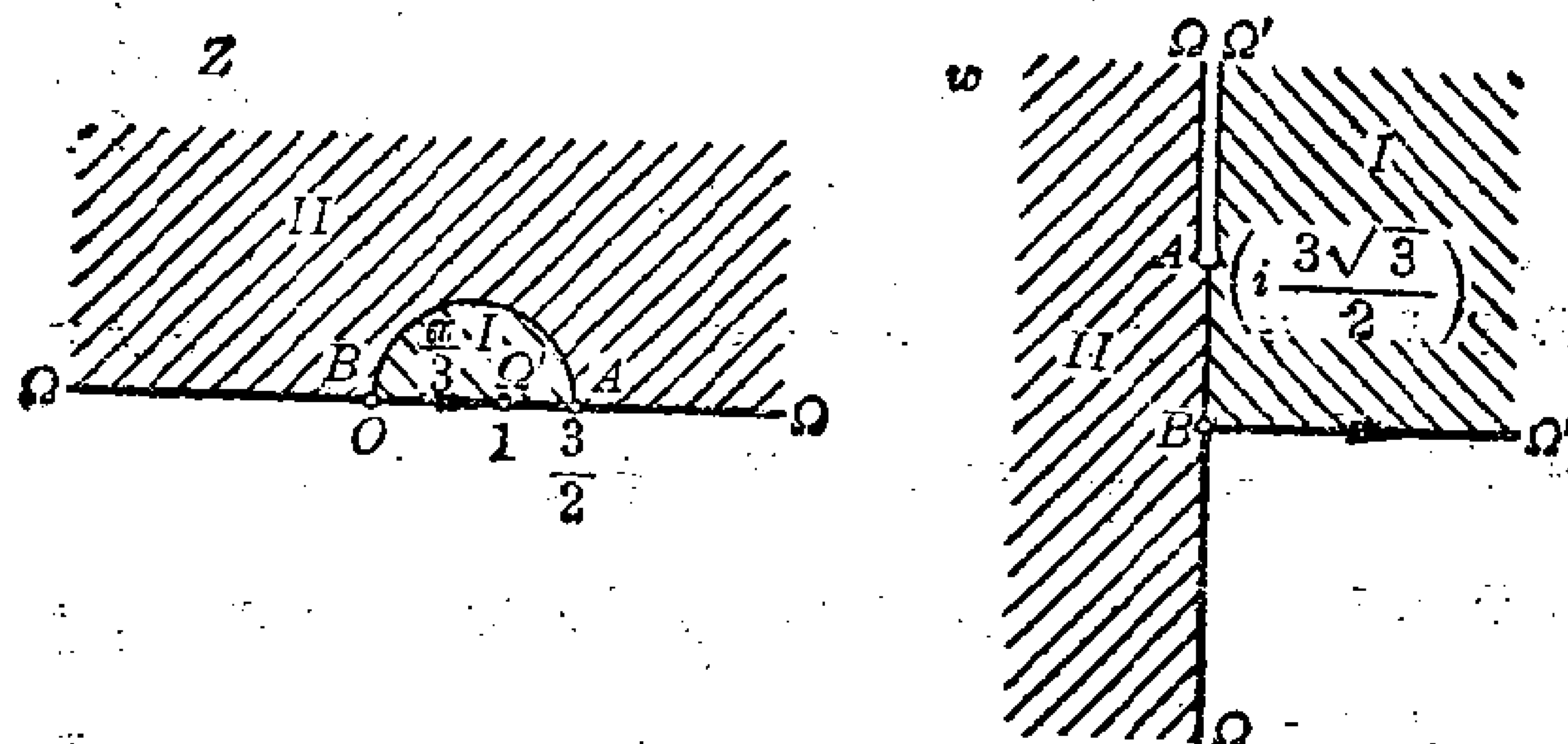


图 86

1163. 联接两个带有截口$[-1, 1]$的 z-平面得到 F_z. 联接分别带有一条截口 $[-ib, ib]$, 两条截口 $[-a, a]$, $[0, ib]$ 与两条截口 $[-a, a]$, $[0, -ib]$ 的三个 w-平面得到 F_w, 其中 $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}$, $b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+2}$. 映射与三个带有截口的 w-平面如图 87 所示(未按比例). **1164**. a) n 为奇数: F_z 为 n 叶, 在点 $z=\omega^k(\omega=e^{\frac{\pi i}{n}}, k=1, 2, \cdots, n)$上有 n 个 $(n-1)$ 阶代数枝点; F_w 为 $2n$ 叶, 有 n^2 个一阶代数枝点; 在每一个点 $w=\eta^\nu\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ $(\eta=e^{\frac{2\pi i}{n}}, \nu=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 上有 n 个这种枝点, 对应 $z=\eta^\nu$ 之上的 F_z 的点, 在 $w=\infty$ 之上有 n 个一阶代数枝点, 对应 $z=\omega^k$ 之上的 F_z 的代数枝点. 映射如图 88 所示(讨论中

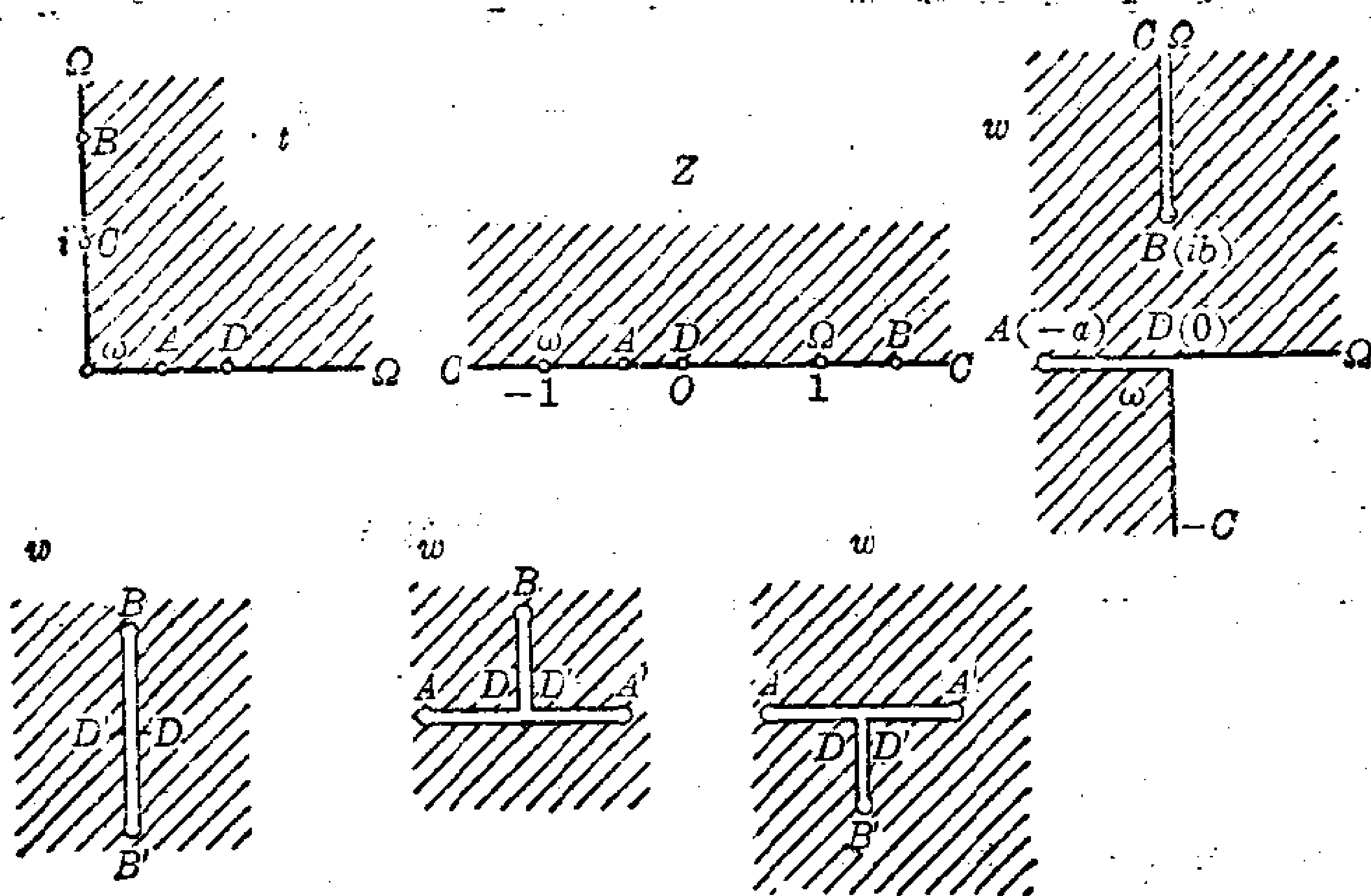


图 87

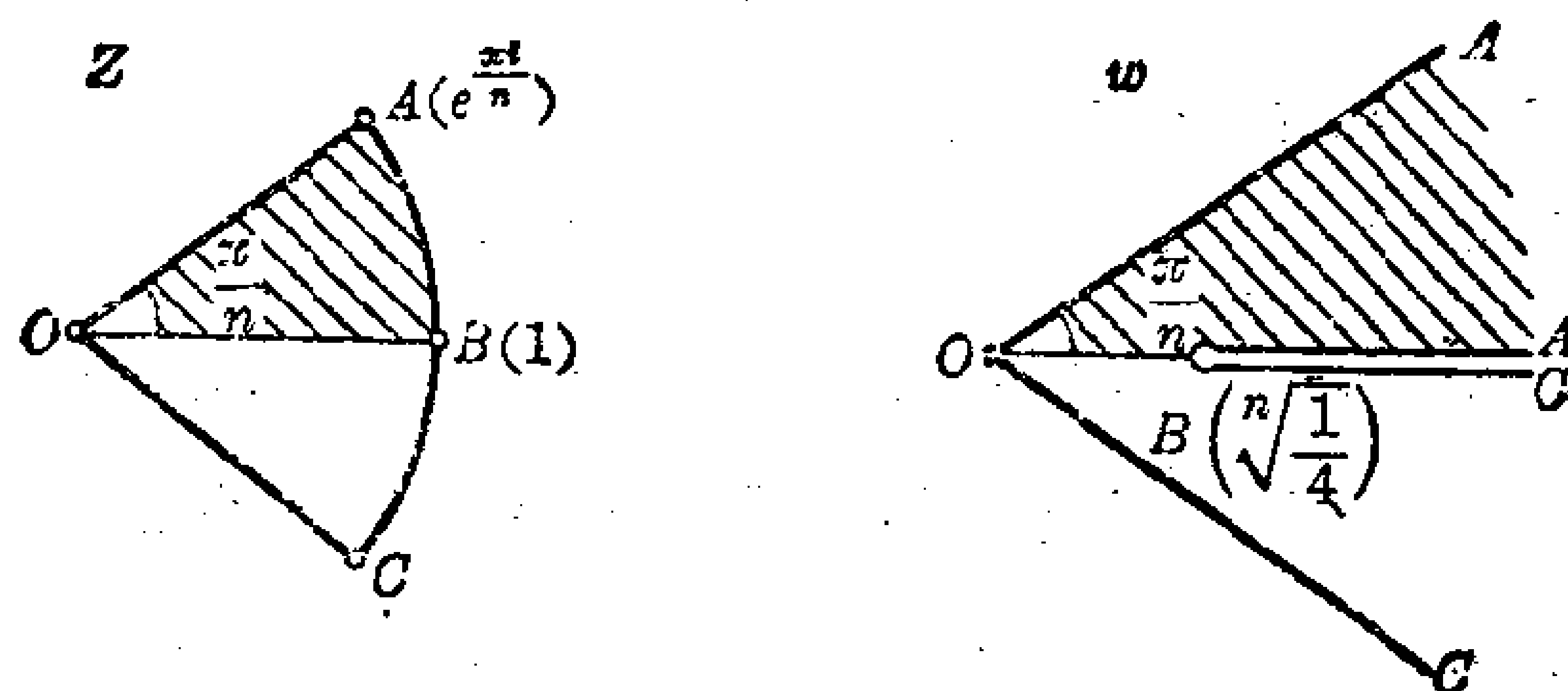


图 88

使用了置换 $\zeta=z^n$, $W=w^n$). 函数 $w(z)$ 将圆 $|z|<1$ 映射到带有 n 条从点 $\eta^\nu\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ 发出的径向截口的 w-平面之上; b) n 为偶数. 若 $n=2m$, 则 $w(z)$ 分解为两个函数: $w_{1,2}^m=\pm\frac{z^m}{1+z^{2m}}$. 欲构造 F_z, 取 n 个"半叶" $|z|<1$ 与 n 个"半叶" $|z|>1$, 分别用 H_k^0 与 H_k^+ 表示之, 并用 γ_k 表示由点 ω^k 确定的边界弧. 然后, 将半叶 H_1^0 沿 γ_k, 将半叶 H_2^0 沿 γ_{k+1}, 半叶 H_3^0 沿 γ_{k+2}, 等等循环地与 H_k^+ 联接起来. 这也确定了利用每叶都带有上述 n 条径向截口的 $2n$ 叶 w-平面来构造 F_w 的次序. **1165**. $w=z^{\frac{2}{3}}$. $z=0$ 与 $z=\infty$ 为二阶代数枝点. **1166**. $w=z^{\frac{n_1}{m_1}}\left(\frac{n_1}{m_1}\right.$ 为等于 $\frac{n}{m}$ 的既约

分数$\Big)$. $z=0$ 与 $z=\infty$ 为(m_1-1)阶代数枝点. **1167**. $z=0$ 与 $z=\infty$ 为一阶代数枝点; $z=1$ 为函数的两枝中一枝的本性奇点. **1168**. $w=1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots$为一整函数; $z=\infty$ 为本性奇点. **1169**. $z=0$ 与$z=\infty$ 为一阶代数枝点; $z=1$ 为函数的两枝中一枝的本性奇点, 亦为在点 $z_k=\left(\frac{1-a_k}{1+a_k}\right)^2$处的一阶极点的极限点, 其中$a_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$. 按照题 **618**, 点 $z=1$ 处的不定区域与整个平面重合. **1170**. 若 $n=0$, 则 $z=0$ 与 $z=\infty$ 为可去奇点, $w\equiv1$; 若 $n<0$, 则 $z=0$ 与 $z=\infty$ 为对数枝点, 有 $\lim\limits_{z\to0} w=\lim\limits_{z\to\infty} w=1$, $z=1$ 为函数诸分枝中一枝的本性奇点; 若 $n=1$, 则 $w=z$; 若 $n>0$, 则 $z=0$ 与 $z=\infty$ 为对数枝点; 在这些点处, $w(z)$ 的不定区域与整个扩充的 w-平面重合. **1171** 与 **1172**. $z=0$ 与 $z=\infty$ 为对数枝点; $w(z)$ 在这些点处的不定区域与整个扩充的 w-平面重合. **1173**. $z=1$ 与 $z=\infty$ 为对数枝点, 有 $\lim\limits_{z\to1} w=\lim\limits_{z\to\infty} w=\infty$, 而 $z=0$ 为除一枝之外 $w(z)$ 的所有各枝的一阶极点. **1174**. $z=0$ 与 $z=\infty$ 为对数枝点, 有 $\lim\limits_{z\to0} w=\lim\limits_{z\to\infty} w=\infty$. **1175**. 与 $\operatorname{Arc}\sin z$ 的枝点情形相同(即在 $z=\pm1$ 之上有无穷多个一阶代数枝点, 而在 $z=\infty$ 之上有两个对数枝点, $\lim\limits_{z\to\infty} w=0$; $z=0$ 为除一枝之外所有各枝的一阶极点). **1176**. $z=\pm i$ 为对数枝点, $\lim\limits_{z\to\pm i} w=\infty$; $z=0$ 为函数所有分枝的二阶极点. **1177**. $w(z)$ 与 $z(w)$ 的黎曼面与对数函数的黎曼面相同(在 0 与∞之上有对数枝点). 借助于参数表示 $z=e^{\zeta}$, $w=e^{\tau\zeta}$ 容易得到映射. **1178**. $w(z)$的黎曼面有无穷多叶, 在点 $z=a$, $z=b$ 之上各有一个对数枝点, 而在 $z=\infty$ 之上有两个对数枝点. 联接无穷多叶从点 $z=a$, $z=b$ 到 ∞ 截开的 z-平面得到黎曼面. 这些叶对应函数 $w+2\pi in$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$的单值枝. 在绕 $z=a$ 与 $z=b$ 转圈时, 这些分枝依次相互转换, 这就确定了联接各叶的方式. **1179**. $w(z)$ 的黎曼面有无穷多叶, 在点 $z=a$, $z=b$, $z=c$ 之上, 各有一个对数枝点, 而在 $z=\infty$ 之上, 有三个对数枝点. 黎曼面的构造与上题相类似. **1180**. $w(z)$ 的黎曼面有无穷多叶, 在点 $z=k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 之上各有一个对数枝点. 我们可取从点 $z=k\pi$ 到∞截开(例如沿铅垂的半直线)的 z-平面作为叶. 两叶同

时沿所有截口的一缘联接起来，就如在构造对数函数的黎曼面时一样．在∞，有一个超越奇点，它是对数枝点的极限点． **1181**．1) 在函数$\zeta=\varphi(z)$的位于z-平面之上的黎曼面的每一个连通部分内，$w(z)$为唯一的解析函数，该连通部分对应G_ζ上的逆函数$z=\varphi^{-1}(\zeta)$的黎曼面的一个连通部分；2) 在函数$\zeta=\varphi(z)$的位于G_z之上的黎曼面的每一个连通部分内(即被转移到z-平面的区域G_ζ内)，$w(z)$为唯一的解析函数；3)同第(2)小题，在本题正文中指出的特殊情形中，$w(z)$常为一解析函数． **1182**．$w(z)$由两个解析函数$\pm z$所组成． **1183**．$w(z)$由两个解析函数$\pm z^{\frac{2}{3}}$所组成． **1184**．$w(z)$由p个解析函数$\omega^k z^{\frac{m_1}{n_1}}$所组成$\left(\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}};\ p\right.$为$m$、$n$的最大公约数；$k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1;\ m_1=\dfrac{m}{p},\ n_1=\left.\dfrac{n}{p}\right)$． **1185**．$w(z)$由$n$个整函数$\omega^k e^{\frac{z}{n}}$所组成($\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $k=0,\ 1\cdots,n-1$)． **1186**．$w(z)$为n值函数，在$z=k\pi(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$之上有$(n-1)$阶代数枝点．在$\infty$，它有一个非孤立奇点，该奇点为代数枝点的极限点． **1187**．$w=n\operatorname{Ln}z+2\pi ik\ (k=0,\ 1,\cdots,\ n-1)$为$n$个不同的解析函数． **1188**．$w(z)$由函数$z+2\pi ik(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$所组成． **1189**．一个无穷值的函数，在点$z=0,\ \pm1,\ \infty$之上各有一个对数枝点． **1190**．$w(z)$为无穷多值解析函数，在$z_k=2\pi ik(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$之上有一个对数枝点．在$\infty$处，有一个非孤立奇点，该奇点为对数枝点的极限点．函数$w(z)$的黎曼面是单连通的，它由如下方法得到：联接无穷多叶从z_k到∞截开(截口两两之间无公共点)的z-平面(在所有的截口处同时联接两叶，但仅沿一确定的边缘来联接)． **1191**．黎曼面与题**1190**中的相同，但在$z=k\pi(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$之上有对数枝点． **1192**．黎曼面与题**1190**中的相同，但在$z=\dfrac{\pi k}{2}(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$之上有对数枝点． **1193**．$w(z)$由函数$\pm z+2k\pi(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$所组成． **1194**．$w(z)$由函数$z+k\pi(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$所组成． **1195**．1) 设$r_1=\dfrac{m_1}{n_1}$，$r_2=\dfrac{m_2}{n_2}$，$r=r_1r_2=\dfrac{m}{n}$为既约分数，$p$为$m_1$，$n_2$的最大公约数，$q$为$m_2$，$m_1$的最大公约数．则$(z^{r_1})^{r_2}$由$p$个不同的$n$值解析函数所组成，即为$\omega^k z^r$，$\omega=e^{\frac{2\pi i}{np}}$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$．$(z^{r_2})^{r_1}$由$q$个函数$\omega_1^{k_1}z^r$所组成，$\omega_1=e^{\frac{2\pi i}{nq}}$，$k_1=0,\ 1,\cdots,\ q-1$．其中之一，即$z^r$总是同属两种情形．特别，$(z^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=\pm z$，$(z^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{1}\,z$；

2) 设 $r_1=\frac{m_1}{n_1}$, $r_2=\frac{m_2}{n_2}$, $r=r_1+r_2=\frac{m}{n}$ 为既约分数, p 为 n_1, n_2 的最大公约数，则 $z^{r_1}z^{r_2}$ 由 p_1 个不同的 n 值解析函数所组成，即为 $\omega^k z^r$, $\omega=e^{\frac{2\pi i}{np_1}}$, p_1 为 $m_1n_2'+m_2n_1'$, p 的最大公约数, $n_1'=\frac{n_1}{p}$, $n_2'=\frac{n_2}{p}$, $k=0, 1, \cdots, p_1-1$; 3) 设 p 为 n_1, n_2 的最大公约数, N 为 n_1, n_2 的最小公倍数 $=\frac{n_1n_2}{p}$. 则 $w(z)$ 由 p 个不同的 N 值解析函数所组成. **1196**. 设 N 为 m, n 的最小公倍数, p 为 m, n 的最大公约数; q 为 $\frac{m+n}{p}$, $\frac{mn}{p}$ 的最大公约数, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{\mu}{\nu}$. 则 $w(z)$ 为唯一的 N 值解析函数，在 $z=0$ 之上有 $\frac{N}{n}$ 个 $(n-1)$ 阶代数枝点；在 $z=1$ 之上有 $\frac{N}{m}$ 个 $(m-1)$ 阶代数枝点；在 $z=\infty$ 之上有 $\frac{N}{q}$ 个 $(\nu-1)$ 阶代数枝点. **1197**. 一个 nm 值解析函数，在 $z=1$ 之上有一个 $(n-1)$ 阶代数枝点，在 $z=0$ 之上有 n 个 $(m-1)$ 阶代数枝点，在 $z=\infty$ 之上有一个 $(mn-1)$ 阶代数枝点. **1198**. 两个不同的 4 值函数，符号相反，黎曼面与函数 $\sqrt[4]{z}$ 相同. 这两个函数各有一枝，使点 $z=1$ 为其一阶极点. **1199**. 一个无穷多值函数，在 $z=1$ 之上有一个 $(n-1)$ 阶代数枝点，在点 $z=0$, $z=\infty$ 之上各有 n 个对数枝点. 欲构造黎曼面，联接 n 个 $\mathrm{Ln}\, z$ 的黎曼面，其中每个黎曼面都有一叶带有一条截口 $[1, \infty)$. 曲线 $\rho^n \sin n\theta=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 将 w-平面分为对应于半平面 $y\geqslant 0$ 的区域（图 89, 当 $n=2$ 时, $\zeta=w^2$ 为一辅助平面）. **1200**. 一个无穷多值函数，在 $z=1$ 之上有一个对数枝点，仅在 $z=0$ 与 $z=\infty$ 之上有无穷多个对数枝点. 黎曼面由如下方法得

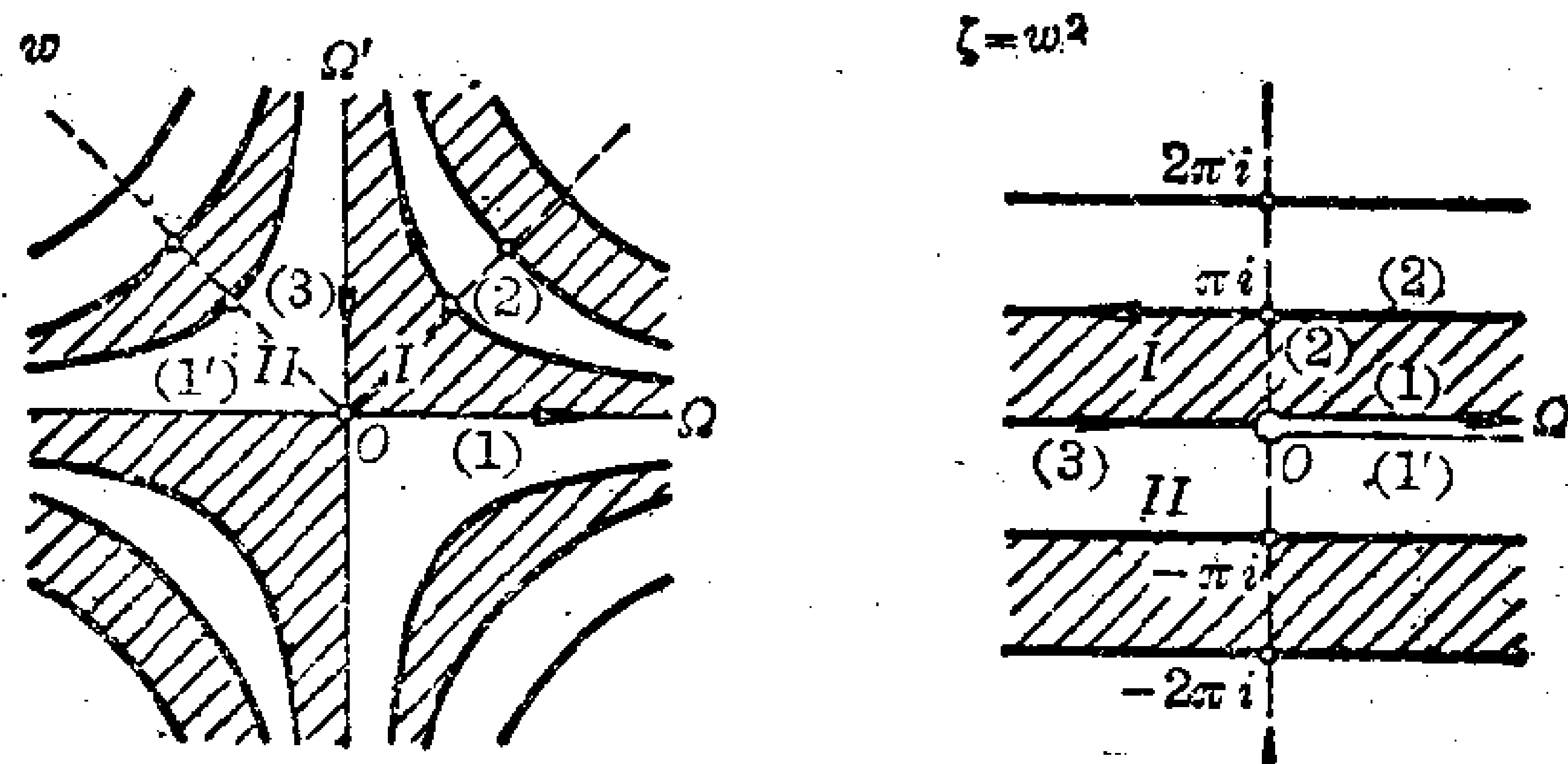


图 89

到. 联接无穷多个 $\operatorname{Ln} z$ 的黎曼面，其中每个 $\operatorname{Ln} z$ 的黎曼面都有一叶带有截口 $[1, \infty)$. 该黎曼面仅在 $z=0$ 与 $z=\infty$ 之上有无穷多个对数枝点，在 $z=1$ 之上有无穷多个正则点与一个对数枝点. 曲线 $e^u \sin v=(2k+1)\pi$ 与 $v=2k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 将 w-平面划分为无穷多个区域，每个区域对应带有截口 $-\infty<x\leqslant0, y=0$ 的 z-平面，对于边界包含直线 $v=2k\pi$ 之一的区域，对应的 z-平面还带有截口 $1\leqslant x<\infty, y=0$(图 90, $\zeta=e^w$ 为辅助平面).

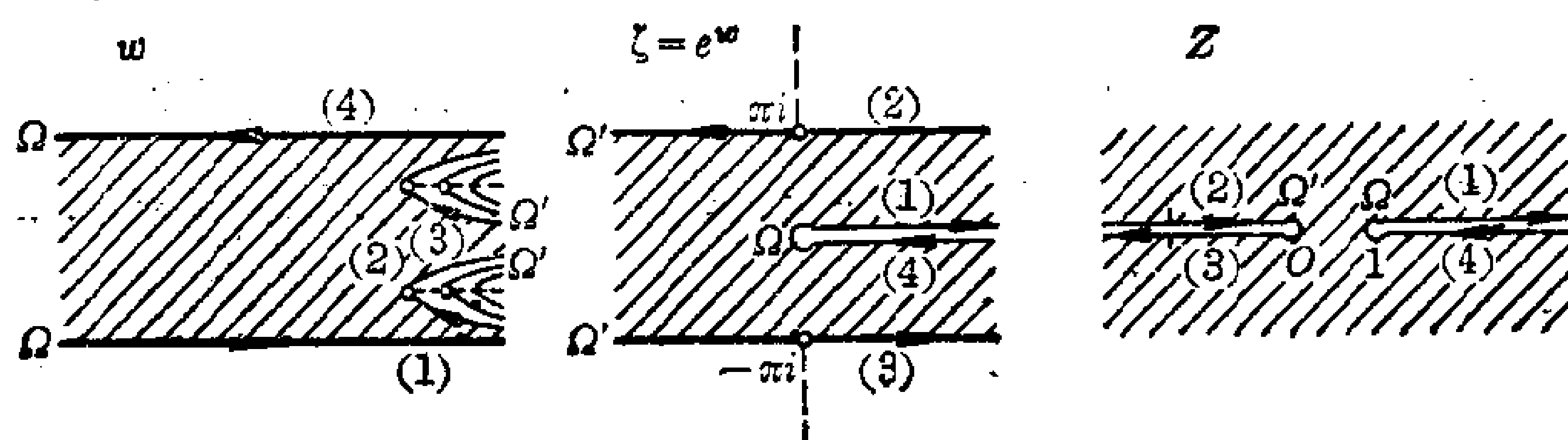


图 90

1201. 一个无穷多值函数，其黎曼面与 $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$ 相同. **1202**. 黎曼面有无穷多叶，在 $z=0$ 之上有一个$(n-1)$阶代数枝点，仅在 $z=\pm1$ 之上有一阶代数枝点，而在 $z=\infty$ 之上有 $2n$ 个对数枝点. 欲构造黎曼面，联接 n 个 $\operatorname{Arc}\sin z$ 的黎曼面，每个黎曼面都有一叶带有截口 $[0, 1]$. 曲线 $n\theta=\frac{k\pi}{n}$ 与 $\rho^n\cos n\theta=k\pi(k=0, \pm1, \cdots)$ 将 w-平面划分为对应 z-平面内 $y\gtrless0$ 的区域(图 91, 其中 $n=2$, $\zeta=w^2$ 为辅助曲面). **1203**. 黎

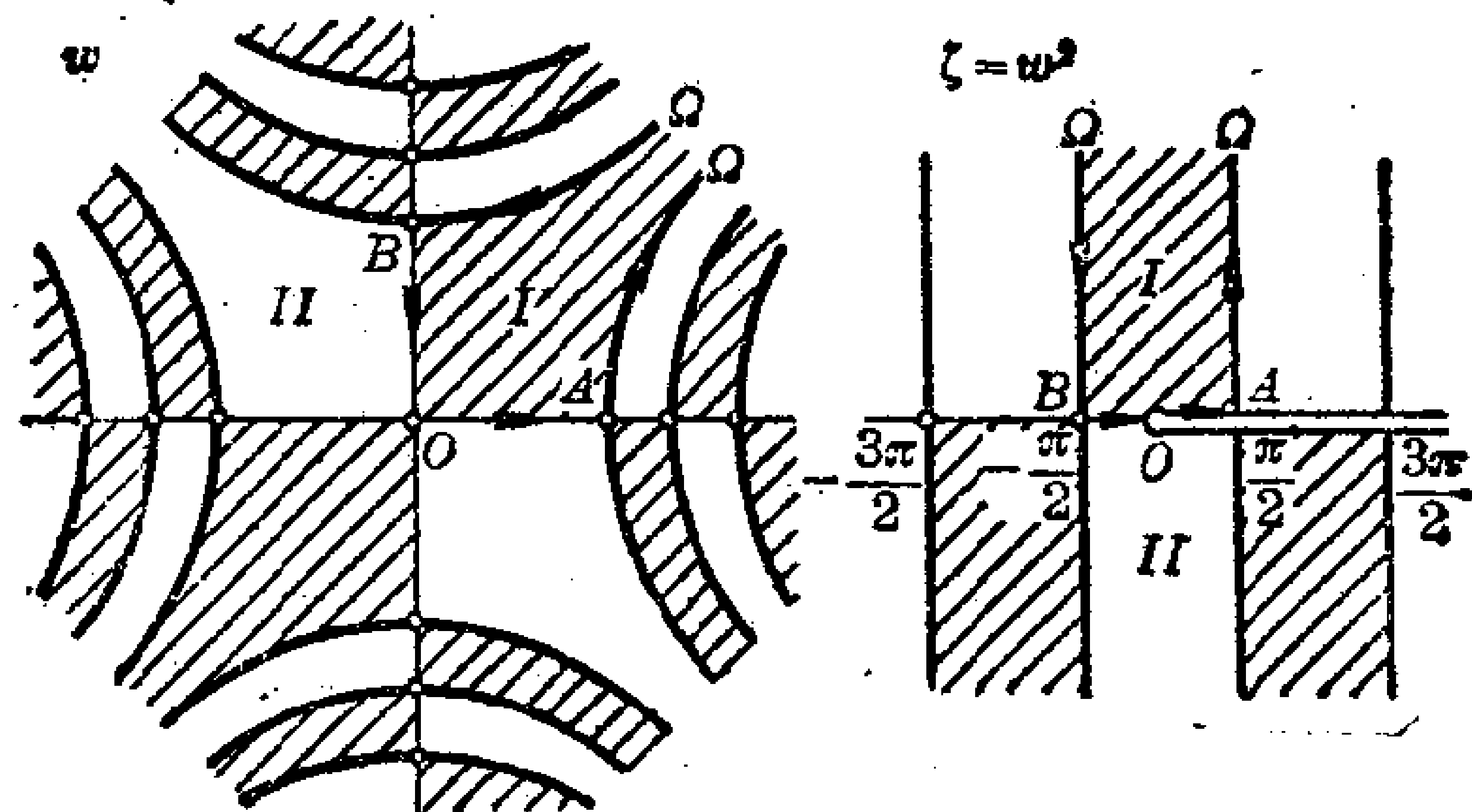


图 91

曼面由如下方法得到：联接无穷多个 $\operatorname{Ln} z$ 的黎曼面，每个黎曼面都有一叶带有两条截口 $\left[0, \frac{1}{e}\right]$, $[e, \infty)$ ($\operatorname{Ln} z$ 的黎曼面成对交替地沿一条截口，然后又沿另一条截口联接起来)．黎曼面在 $z=0, z=\infty$ 之上有无穷多个对数枝点，在 $z=\frac{1}{e}$, $z=e$ 之上有正则点与无穷多个一阶代数枝点．曲线 $\operatorname{Im}\sin w=\cos u \operatorname{sh} v=(2k+1)\pi$ 与 $u=\frac{\pi}{2}+k\pi(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 将 w-平面划分为对应于带有截口 $-\infty<x<0$, $y=0$ 的 z-平面的区域，对于边界包含直线 $u=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 之一的区域，对应的 z-平面还带有两条截口 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{e}$, $y=0$ 与 $e\leqslant x<\infty$, $y=0$(图 92, $\zeta=\sin w$ 为辅助平面)．

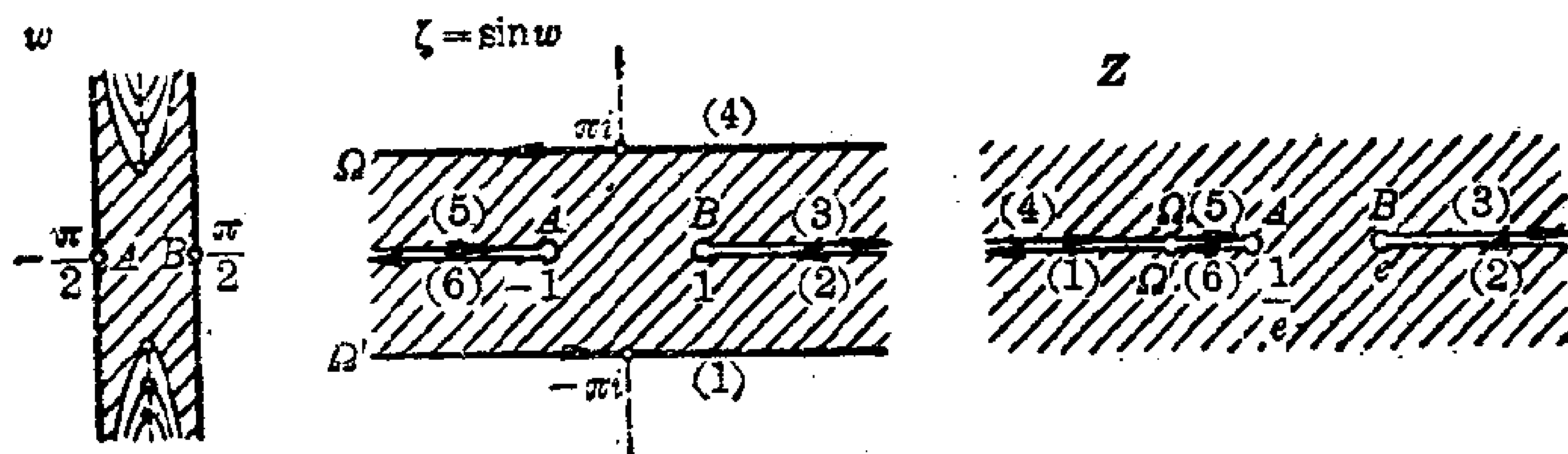


图 92

1204．一个无穷多值函数．其黎曼面由如下方法得到：联接无穷多叶函数 $\sqrt[n]{z}-1$ 的黎曼面，每个 $\sqrt[n]{z}-1$ 的黎曼面上都有一叶带有沿着射线 $1\leqslant x<\infty$, $y=0$ 的截口．联接方法同对数函数的黎曼面的构造．**1205**．一个无穷多值函数．仅在 $z=0$ 与 $z=\infty$ 之上有一阶代数枝点，在 $z=1$ 之上有两个对数枝点．**1206**．一个无穷多值函数．在 $z=-1$ 之上有两个对数枝点，仅在 $z=0$ 与 $z=\infty$ 之上有无穷多个一阶代数枝点．**1207**．若 $\alpha=\frac{m}{n}$，则 $w=\frac{m}{n}\operatorname{Ln} z+\frac{2\pi i}{n}k(k=0, 1, \cdots, m-1)$ 为 m 个不同的解析函数；若 α 为无理数，则 $w=\alpha\operatorname{Ln} z+2\pi ik(k=0, \pm 1, \cdots)$ 为无穷多个不同的函数．**1208**．两个不同的无穷多值解析函数，其黎曼面与 $\operatorname{Ln} z$ 相同．**1209**．两个不同的解析函数，分别为 $2\operatorname{Ln} z$ 与 $2\operatorname{Ln}(-z)$．**1210**．$w=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k=0, \pm 1, \cdots$; $w=\frac{\pi}{2}+2\operatorname{Arc}\cos z$;

$w=-\frac{3\pi}{2}+2\operatorname{Arc}\cos z$. **1211**. $w=\frac{\pi}{2}+\pi k(k=0, \pm 1, \cdots)$. **1212**. $w=i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)(k=0, \pm 1, \cdots)$. **1213**. w 为一无穷多值函数，黎曼面与 $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} z$ 相同（参见题 **1200**）. 若 $\zeta=\rho e^{i\theta}=\operatorname{Ln} z=\ln r+i\varphi$ ($\varphi=\operatorname{Arg} z$)，则 $w=e^{i\operatorname{Ln}\zeta}=e^{i(\ln\rho+i\theta+2\pi ik)}$. 对于 $f_0(z)=e^{-\theta+i\ln\rho}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，题中指出的极限值的集合分别为：1) 与 2) 圆 $|w|=e^{-\pi}$; 3) 当 $\varphi\to+\infty$ 时，圆 $|w|=e^{-\frac{\pi}{2}}$，当 $\varphi\to-\infty$ 时，圆 $|w|=e^{-\frac{3\pi}{2}}$; 4) 圆环 $e^{-\frac{3\pi}{2}}\leqslant|w|\leqslant e^{-\frac{\pi}{2}}$. 对于其它分枝，则添上因子 $e^{-2\pi k}(k=\pm 1, \pm 2, \cdots)$. **1214**. 若 $|a|<1$，则在所有情形中，$w(z)$ 都为一个解析函数；若 $|a|\geqslant 1$，则在情形(1)与(3)中，函数分解为 n 个不同的解析函数，而在情形(2)与(4)中，分解为无穷多个不同的解析函数. **1215**. 若 $|a|<1$，则在两种情形中，$w(z)$ 都为一个解析函数；若 $|a|\geqslant 1$，则在情形(1)中，有 n 个不同的解析函数，在情形(2)中，有无穷多个不同的解析函数. **1216**. 1) 设 $z=re^{i\varphi}$ 与 $\zeta=\rho e^{i\theta}=\operatorname{Ln} z$，则 $w(z)$ 由分别为 $\chi(z)e^{i\ln\rho-\theta+2\pi k}$ ($|z|<1$; $\rho=\sqrt{\ln^2 r+\varphi^2}$, $\theta=\arg(\ln r+i\varphi)$; 其中 $-\infty<\varphi<\infty$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$; $k=0, \pm 1, \cdots$)的多值解析函数所组成. 每一个函数在 $z=0$ 之上都有一个对数枝点，在该点邻域内，不定区域为一圆环(特别，对于 $k=0$，圆环为 $\chi(0)e^{-\frac{3\pi}{2}}\leqslant|w|\leqslant\chi(0)e^{-\frac{\pi}{2}}$); 2) 设 $z-1=re^{i\varphi}$, $\zeta=\rho e^{i\theta}=\operatorname{Ln}(z-1)$，则 $w(z)$ 由分别为 $\chi(z)e^{i\ln\rho-\theta+2\pi k}$ ($|z|<1$, $\rho=\sqrt{\ln^2 r+(\varphi+2\pi n)^2}$, $\theta=\arg[\ln r+i(\varphi+2\pi n)]$; 其中 $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$, $0<\theta<2\pi$; $k, n=0, \pm 1, \cdots$)的单值解析函数所组成. 对于不同的 k, n，有不同的解析函数. 若 $\chi(1)=\lim\limits_{z\to 1}\chi(z)$ 成立，则当 $z\to 1$ 时，不定区域为圆(特别，当 $k=n=0$ 时，圆为 $|w|=\chi(1)e^{-\pi}$). **1217**. 1) 若 $f(z)$ 无奇数阶零点，则 $\sqrt{f(z)}$ 分解为两个整函数. 若 $a_1, a_2, \cdots$ 为函数 $f(z)$ 的奇数阶零点，则 $\sqrt{f(z)}$ 的黎曼面为双叶的，在 $a_1, a_2, \cdots$ 上有代数枝点，若 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 的奇数阶极点，则在 $z=\infty$ 之上也有代数枝点. 若 $f(z)$ 为超越函数，则在 $z=\infty$ 之上有两个具有单值特征的本性奇点（若 $f(z)$ 有偶数个奇阶零点）或一个具有双值特征的本性奇点(若 $f(z)$ 的奇阶零点为奇数个或无穷多个); 2)若 $f(z)$ 有零点 $a_1, a_2, \cdots$，则 $\operatorname{Ln} f(z)$ 的黎曼面在点 $a_1, a_2, \cdots$

上各有一个对数枝点而无其它类型的点. 若$f(z)$无零点,则$\operatorname{Ln} f(z)$分解为无穷多个整函数,彼此间相差一个形如$2\pi ki$的被加数($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$); 3) 若$f(z)$有零点,则$[f(z)]^\alpha$的黎曼面与$\operatorname{Ln} f(z)$的黎曼面相同[参见第(2)小题]. 若$f(z)$无零点,则$[f(z)]^\alpha$分解为无穷多个整函数,彼此之间相差一个形如$e^{2\pi k\alpha i}$的因子($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$). **1218**. 一个双叶的圆$|z|<1$,在函数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$的零点,特别在点$z=0$,有代数枝点. **1219**. 1) 一个双叶的圆$|z|<1$,在$z=0$(函数$\sqrt{z}$的黎曼面位于圆$|z|<1$之上的部分)有一个唯一的枝点; 2) 函数$\operatorname{Ln} z$的黎曼面位于圆$|z|<1$之上的部分; 3) 函数$\operatorname{Ln} z$的黎曼面位于圆环$\frac{1}{2}<|z|<2$之上的部分.

第 九 章

1222. 1) 在顶点A_2, $\alpha_2=0$; 2) 在顶点A_1与A_2, $\alpha_1=\alpha_2=0$; 3)在顶点A_3, $\alpha_3=0$; 4) 在顶点A_2与A_4, $\alpha_2=\alpha_4=-1$; 5) 在顶点A_2, $\alpha_2=-2$; 在顶点A_4, $\alpha_4=0$; 6) 在顶点A_2, A_3与A_4, $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$; 7) 在顶点$A_2$, $\alpha_2=-2$; 在顶点A_4与A_6, $\alpha_4=\alpha_6=0$; 8) 在顶点A_2, $\alpha_2=-2$; 在顶点A_4, $\alpha_4=\alpha-2$. **1224**. $\alpha_k=\frac{1}{n_k}$(n_k为自然数或∞)与$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n_k}\right)=2$是充分与必要的,这一点仅对于$n=4$且$n_1=n_2=n_3=n_4=2$(即对于矩形)以及对于$n=3$且$n_1$, n_2, n_3为如下情形时才可能:

n_1	n_2	n_3	P
1	∞	∞	带形
2	2	∞	半带形
2	3	6	直角三角形
2	4	4	等腰直角三角形
3	3	3	等边三角形

1225. 1) $w=\frac{h}{\pi}\ln z+a$, $z=e^{\frac{\pi(w-a)}{h}}$(a为实参数), $z(w)$是周期为$\omega=2hi$的周期函数;群G由变换$T(w)=w+\omega$生成;它的基本域B由加倍

的带形及其一条边界直线组成；2) $w=\frac{h}{\pi}\ln\frac{1+z}{1-z}+a$, $z=\text{th}\,\frac{\pi(w-a)}{2h}$ (a 为实参数)；$z(w)$ 是周期为 $\omega=2hi$ 的周期函数；群 G 及其基本域 B 都与第 (1) 小题相同. **1226**. $w=\arcsin z$, $z=\sin w$; $z(w)$ 是周期为 $\omega=2\pi$ 的周期函数；群 G 由变换 $T(w)=w+\omega$, $S(w)=-w$ 生成；它的基本域 B 由带形 $0<u<\pi$ 及其边界半直线 $u=0$, $u=\pi$, $v\leqslant 0$ 组成. **1227**[1] 1) $w=C\int_0^z z^{-\frac{5}{6}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$, 其中 $C=\frac{\omega}{B\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)}$ ($B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 为第一类欧拉积分)；$z(w)$ 是周期为 2ω 与 $2\omega e^{\frac{2\pi i}{6}}$ 的双周期函数；群 G 由变换 $T(w)=w+2\omega$, $S(w)=we^{\frac{2\pi i}{6}}$ 生成；它的基本域 B 由加倍的三角形与两条不相似的边界边组成；2) $w=C\int_0^z z^{-\frac{3}{4}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz$, 其中 $C=\frac{\omega}{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}$; $z(w)$是周期为 2ω 与 $2\omega i$ 的双周期函数；群 G 由变换 $T(w)=w+2\omega$, $S(w)=iw$ 生成；它的基本域 B 由以 ω 为边的正方形以及组成此正方形的一个三角形的两条边界边①组成；3) $w=C\int_0^z z^{-\frac{2}{3}}(1-z)^{-\frac{2}{3}}dz$, 其中 $C=\frac{\omega}{B\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}$; $z(w)$ 是周期为 $2hi$ 与 $2he^{\frac{\pi i}{6}}$ 的双周期函数，其中 $h=\frac{\omega\sqrt{3}}{2}$；群 G 由变换 $T(w)=w+2hi$, $S(w)=we^{\frac{2\pi i}{3}}$ 生成；它的基本域 B 由加倍的三角形及其两条不同类的边界边②组成. **1228**. 1)一个“三角形”，其两个顶点在点 $w=0$ 与 $w=d=B(\alpha,\beta)$，且在这两个顶点处，角的大小为 $\pi\alpha$ 与 $\pi\beta$. 若 $\alpha+\beta<1$，则第三个顶点为有限；若 $\alpha+\beta\geqslant 1$，则第三个顶点位于无穷远，若 $\alpha+\beta=1$，则 $d=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$，且当 $\alpha\neq\beta$ 时“三角形”形状为一斜半带形；若 $\alpha+\beta=2$，“三角形”从底边两个顶点处射出的边平行但反向，且 $d=\frac{\pi(\alpha-1)}{\sin\pi(\alpha-1)}$；若 $\alpha=\beta=\frac{3}{2}$，则“三角形”为直角半带形的外部(图 93)；

1) 基本域的图示在图 62 中给出.

① 此处“边界边”是指“直角边”.——译者注

② “两条不同类的边界边”是指“一直角边与一斜边”.——译者注

2) 一个"三角形"，其一个有限的顶点在点 $w=0$，角的大小为 $\pi\alpha$，另两个顶点在无穷远处．"三角形"的两边为从原点发出的射线，第三边为与原点相距 $h=\frac{\sin\pi\beta}{\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ 的直线．若 $\alpha=1$，则为宽度为 π 的带形；若 $\alpha+\beta=1$，则两边平行，且 $h=\pi$；若 $\alpha=2$，则为沿正实轴截开的半平面，且 $h=\frac{\sin\pi\beta}{\beta(\beta+1)}$，特别，若 $\beta=-\frac{1}{2}$，则 $h=4$，若 $\beta=-1$，则 $h=\pi$（参见图 93）．

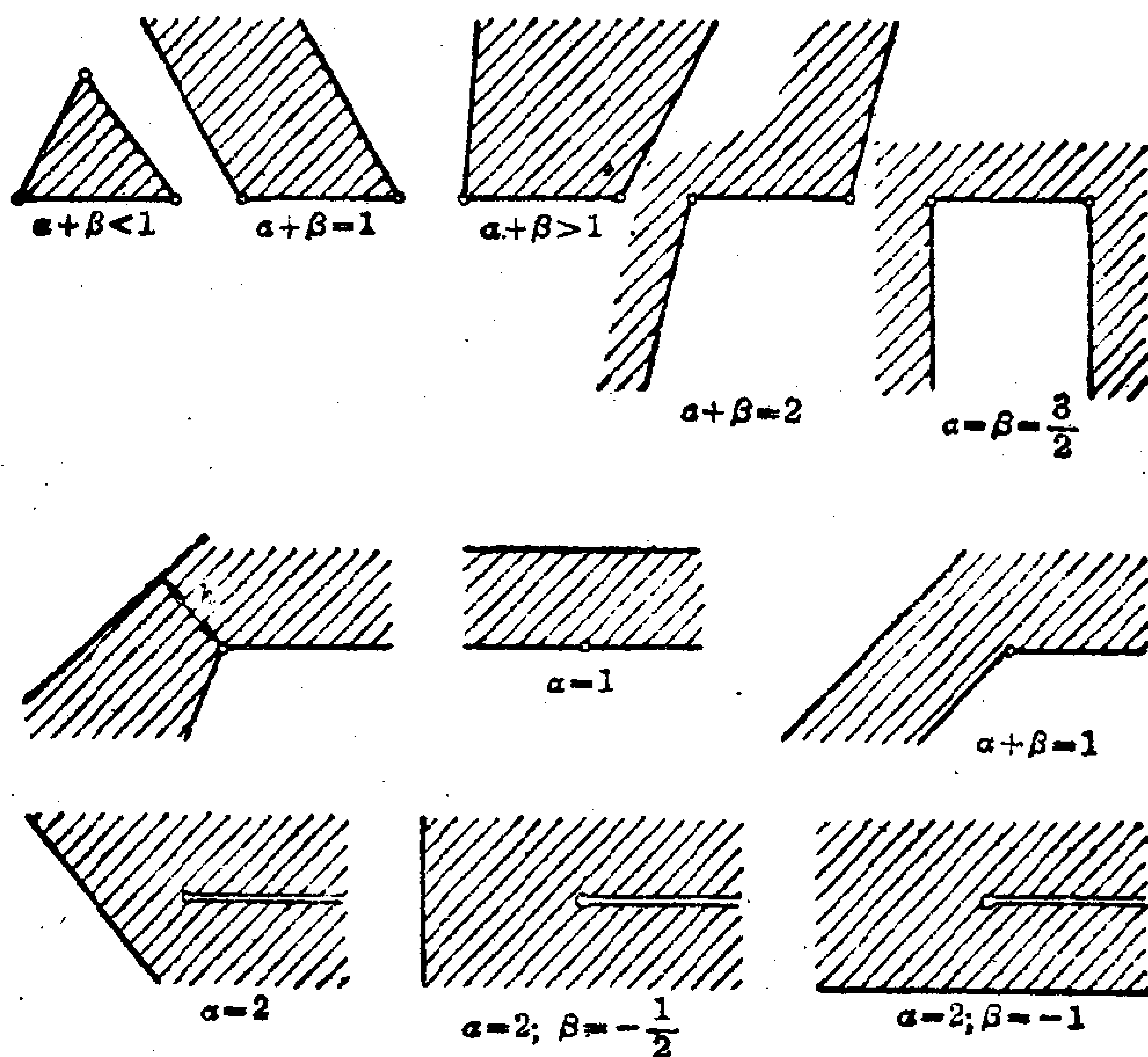


图 93

1229. 1) 参见图 94, 1; $w_1\equiv w(1)=-i\pi\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)$; $w_\lambda\equiv w(\lambda)$; 2) 参见图 94, 2; $w_\lambda\equiv w(\lambda)$. **1230**. 1) $w=\frac{2}{\pi}[\arcsin\sqrt{z}-(1-2z)\cdot\sqrt{z-z^2}]$; 2) $w=\frac{2}{\pi}[\arcsin\sqrt{z}-\sqrt{z-z^2}]$; 3) $w=\frac{h}{\pi}\left(\ln\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}-\right.$

$\sqrt{z}\Big) = \frac{2h}{\pi}(\operatorname{arth}\sqrt{z} - \sqrt{z})$; 4) $w = \frac{2h}{\pi}(\operatorname{arctg}\sqrt[4]{z} + \operatorname{arth}\sqrt[4]{z} - 2\sqrt[4]{z})$; 5) $w = ia\Big(-\sqrt{z}\,\frac{z-3}{2} - 1\Big)$.

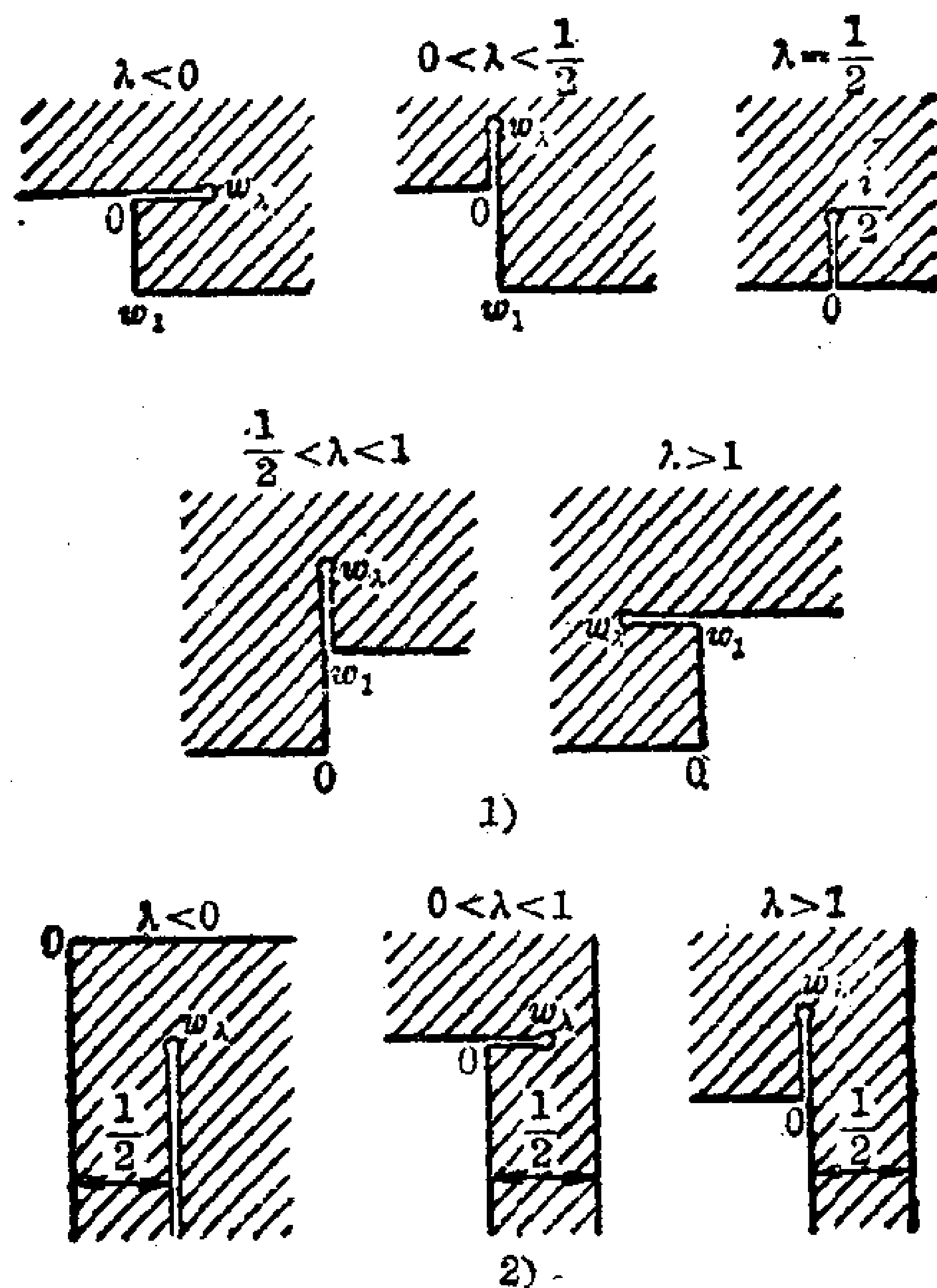


图 94

1231 1) $w = -\frac{a}{\pi}\int_1^z \frac{dz}{z^{1-\theta}(z-1)^{\theta}}$. 若 $\theta = \frac{p}{q}$, 则 $w = \frac{a}{\pi}\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{1}{t_\nu^p}\ln\Big(1 - \frac{t}{t_\nu}\Big)$, 其中 $t = \Big(\frac{z-1}{z}\Big)^{\frac{1}{q}}$ 而 $t_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, q-1)$; 2) $w = \frac{a}{\pi\theta}\int_1^z \Big(\frac{z-1}{z}\Big)^{\theta} dz$. 若 $\theta = \frac{p}{q}$, 则 $w = \frac{a}{\pi}\Big[-\frac{t^p}{\theta(t^q-1)} + \sum_{\nu=0}^{q-1} t_\nu^p \ln\Big(1 - \frac{t}{t_\nu}\Big)\Big]$, 其中 t 与 t_ν 跟第(1)小题相同. **1232** $w = \frac{a}{\zeta}$, 其中 $\zeta = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{2t}{1-t^2} + \ln\frac{1-t}{1+t}\Big)$, $t = \sqrt{\frac{z-1}{z}}$. **1233**. $w = \frac{2h}{\pi}\Big(\sqrt{z^2-1} + \arcsin\frac{1}{z}\Big)$. **1234**

$w=\frac{2d}{B\left(\frac{\alpha}{2},1-\alpha\right)}\int_0^z t^{\alpha-1}(1-t^2)^{-\alpha}dt$. **1235**. 1) $w=\frac{2}{\pi}\left(H\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z}{a-z}}\right.$ $\left.+h\operatorname{arth}\frac{h}{H}\sqrt{\frac{z}{a-z}}\right)$，其中 $a=1+\frac{h^2}{H^2}$; 2) $w=\frac{2}{\pi}\left(H\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}+\right.$ $\left.h\operatorname{arth}\frac{h}{H}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$，其中 $a^2=1+\frac{h^2}{H^2}$; 3) $w=C\int_0^z\frac{\sqrt{t}\,dt}{(t-1)(t-a)(t+b)}$，其中 C, a, b 都由方程式 $\frac{C\pi}{(a-1)(a+b)}=h_1$, $\frac{C\pi\sqrt{a}}{(a-1)(a+b)}=h_2$, $\frac{C\pi\sqrt{b}}{(b+1)(a+b)}=h_3$ 确定. **1236**. 1) $w=\frac{n}{B\left(\frac{1}{n},1-\frac{2}{n}\right)}\int_0^z(1-t^n)^{-\frac{2}{n}}dt$;

2) $w=C\int_z^1\frac{(1-t^n)^{\frac{2}{n}}}{t^2}dt+1$, $c_{-1}=C=\frac{2^{-\frac{2}{n}}n\sin\frac{\pi}{n}}{B\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$.

1237. 1) $w=\frac{5\times 2^{\frac{2}{5}}}{B\left(\frac{1}{10},\frac{1}{5}\right)}\int_0^z(1-t^5)^{-\frac{4}{5}}(1+t^5)^{\frac{2}{5}}dt$;

2) $w=C\int_z^1\frac{(1-t^5)^{\frac{4}{5}}(1+t^5)^{-\frac{2}{5}}}{t^2}dt+1$, $c_{-1}=C=\frac{2^{-\frac{2}{5}}\Gamma\left(\frac{7}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}$.

1238. 映射到多角星形，其角交替地为 $\pi-\frac{2\pi}{n}-\lambda\pi$ 与 $\pi+\lambda\pi$，中心在原点，有第一种角的顶点之一位于点

$$w(1)=\frac{2^{-\frac{2}{n}}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\sin\frac{\pi(1+\lambda)}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

1239. 若 $n=2m$，则 $w=CC_0\int_i^z\left\{z\prod_{k=1}^{m-1}\left(z^2-\operatorname{tg}^2\frac{\pi k}{n}\right)\right\}^{-\frac{2}{n}}dz$; 若 $n=2m+1$，则 $w=CC_1\int_i^z\left\{z\prod_{k=1}^{m}\left(z^2-\operatorname{tg}^2\frac{\pi k}{n}\right)\right\}^{-\frac{2}{n}}dz$，其中 $C=\frac{n}{B\left(\frac{1}{n},1-\frac{2}{n}\right)}$, $C_0=-2i(2n)^{-\frac{2}{n}}e^{-i\frac{\pi}{n}}$ 以及 $C_1=-2i\times 2^{-\frac{2}{n}}$. **1240**. 借助于关于 b_k 的方

程(3)，由等式 $|f(b_k)|=l_k(k=1, 2, \cdots, n)$，以及由星形诸边之一的方向，可确定参数. a_k 中的一个值可任意选择.

1241. $w=\frac{C(z-1)^{2\alpha}(z+1)^{2\alpha-2}}{z}$, $C=\frac{h}{4}\alpha^{-2\alpha}(1-\alpha)^{2\alpha-2}$. **1243**. 参数由 $|f(b_i)|$, $|f(d_s)|$ 的值以及 P 的一条边的方向来确定（$|f(b_i)|$ 与 $|f(d_s)|$ 的值由 P 的规定即可取得）. 诸参数 (a_k, b_i, c_j, d_s) 中三个值可任选. 若参数 a_k 或 c_j 之一等于 ∞，则去掉关于这个参数的因子或被加式后，(4)与(5)仍然成立. 若参数 b_i 或 d_s 之一等于 ∞，则(4)与(5)不改变而仍然成立. **1245**. $w=C(z+1)^{\alpha_1}(z-1)^{\alpha_2}$, $C=h(b+1)^{-\alpha_1}(1-b)^{-\alpha_2}$, $b=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$. **1246**. $w=C\sqrt{\frac{z^2-a^2}{1-a^2z^2}}$, $C=\sqrt{hH}$, $a=\sqrt{\frac{h}{H}}$. **1247**. $w=Cz^{1-2\alpha}(z^2-1)^{\alpha}$, $C=hb^{2\alpha-1}(1-b^2)^{-\alpha}$, $b=\sqrt{1-2\alpha}$. **1248**. $w=\sqrt{hH}\left(\frac{z+a}{1+az}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{z-b}{1-bz}\right)^{\alpha_2}$，其中 a 与 b 由方程组 $a^{\alpha_1}b^{\alpha_2}=\sqrt{\frac{h}{H}}$, $\alpha_1\left(\frac{1}{a}-a\right)=\alpha_2\left(\frac{1}{b}-b\right)$ 确定. **1249**. 1) $w=[T_n(z)]^{\frac{1}{n}}$，其中 $T_n(z)=\frac{1}{2}[(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n]$ 为切比雪夫多项式; 2) $w=\left[\frac{T_n'(z)\sqrt{z^2-1}}{n}\right]^{\frac{1}{n}}$. **1250**. 参数由 $\operatorname{Re} f(b_i)$ 与 $\operatorname{Re} f(d_s)$ 以及 P 的一条边的位置来确定（$\operatorname{Re} f(b_i)$ 与 $\operatorname{Re} f(d_s)$ 的值由 P 的规定即可取得）. 诸参数 (a_k, b_i, c_j, d_s) 中三个值可任选. 若参数 a_k 或 c_j 之一等于 ∞，则去掉适当的被加式后，(6)与(7)仍然成立. 若参数 b_i 或 d_s 之一等于 ∞，则(6)与(7)不改变而仍然成立（参见题 **1243** 的答案）. **1251**. 由 $\operatorname{Re} f(b_i)$, $\operatorname{Re} f(d_s)$ 的值便可确定参数. 诸参数 a_k, b_i, c_j, d_s 中三个值可任选. 在公式(10)中，诸参数 a_k, b_i, c_j, d_s 中两个值可任选. **1252**. 由 $\operatorname{Re} f(b_i)$ 的值与 P 的其中一条边的位置便可确定参数. 两个参数可任选. **1253**. 由 $\operatorname{Re} f(b_i)$ 与 $\operatorname{Re} f(d_s)$ 的值以及 P 的其中一条边的位置便可确定参数. 三个参数可任选. 在公式 (11) 中，两个对应顶点的参数可任选. **1254**. 1) $w=\frac{h_1}{\pi}\ln(z+1)+\frac{h_2}{\pi}\ln(z-1)+C$, $C=-\frac{h_1}{\pi}\ln(b+1)-\frac{h_2}{\pi}\ln(1-b)$, $b=\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}$; 2) $w=\frac{h_1}{\pi}\ln(z^2-1)+$

$\frac{h_2}{\pi}\ln z+C$, $C=-\frac{h_1}{\pi}\ln(1-b^2)-\frac{h_2}{\pi}\ln b$, $b=\sqrt{\frac{h_2}{2h_1+h_2}}$; 3) $w=\frac{h_1}{\pi}\ln\frac{z+a_1}{1+a_1z}+\frac{h_2}{\pi}\ln\frac{z-a_2}{1-a_2z}$. 参数 a_1, a_2 由方程组 $a_1^{h_1}a_2^{h_2}=e^{-\pi}$, $h_1\left(\frac{1}{a_1}-a_1\right)=h_2\left(\frac{1}{a_2}-a_2\right)$确定; 4) $w=f\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$, 其中$f(z)$为第(3)小题中的映射; 5) $w=\frac{h}{\pi}\ln T_n(z)$, 其中$T_n(z)$为切比雪夫多项式(参见题 **1249** 的答案); 6) $w=\frac{h}{\pi}[\ln(z-1)+z]$; 7) $w=\ln\frac{z+1}{1-z}+Az$, $A=\frac{2}{b^2-1}$, 其中 b 由方程 $\ln\frac{b+1}{b-1}+\frac{2b}{b^2-1}=d$ 确定; 8) $w=\ln(z+1)-Az^2-z+$常数, 其中 $A=\frac{1}{2a}$, 而 a 由方程 $\ln a+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)+d=0$ 确定. 特别, 若 $d=0$, 则 $a=1$; 9) $w=\frac{h}{\pi}\ln(z-a)+\frac{C}{z-a}+Az+$常数, 其中 $A=\frac{h}{2\pi a}$, $C=\frac{h}{2\pi a}(1-a^2)$, 而 a 由方程 $\ln\frac{1-a}{1+a}+\frac{2}{a}=\frac{\pi d}{h}$ 确定. 特别, 若 $h=0$, 则 $a=0$, $A=C=\frac{d}{4}$. **1255**. 平面 u, z 与 φ 之间的对应如图 95 所示. φ-平面内点 C 与 C' 的附标为 $\pm\frac{\pi}{2}+i\ln\frac{1+k'}{k}$. u-平面中的虚线对应 z-平面中半径为 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 的虚线半圆. **1256**. $w=\lambda\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, $z=\operatorname{sn}\left(\frac{w}{\lambda},k\right)$, 其中 λ 与 k 由关系式 $\frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}=\frac{b}{a}$ 与 $a=\lambda\mathbf{K}$ 确定. **1257**. 参见图 96. **1258**. 参见图 97. **1259**. z-平面到 u-平面上的映射如图 98 所示(同一图中的 v-平面系指题 **1260** 的答案). **1260**. z-平面与 v-平面之间的对应如图 98 所示. l 与 h 的表达式在表 1 中给出. **1261**. 解法: 有三个方程用以确定参数 C_1, k 与 b:

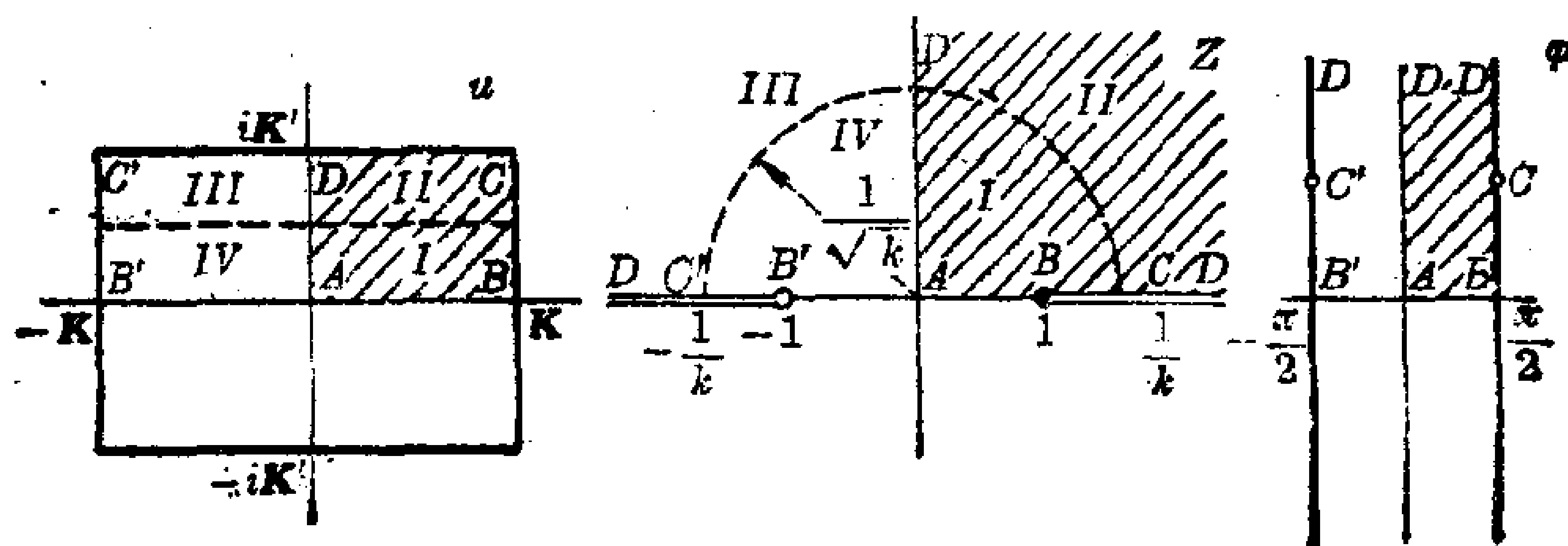


图 95

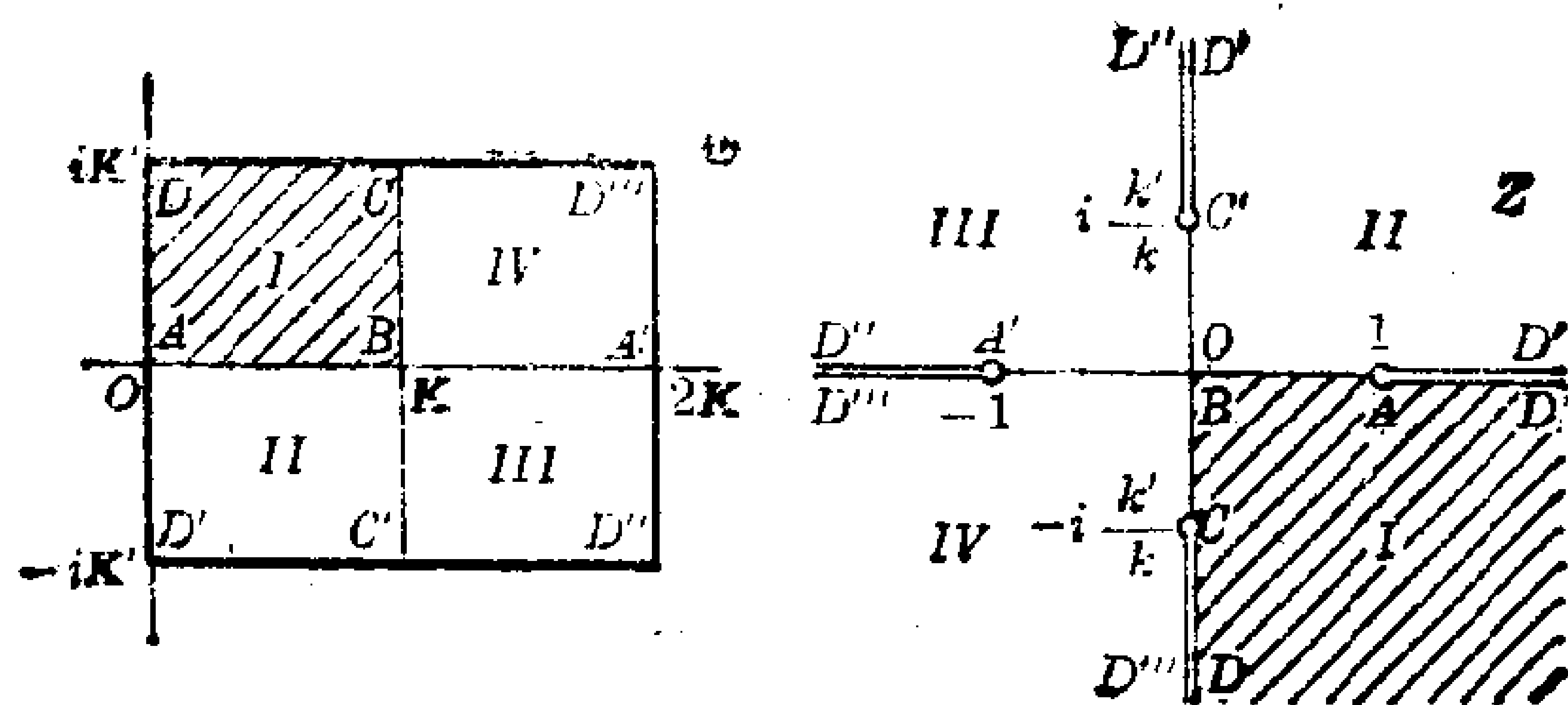


图 96

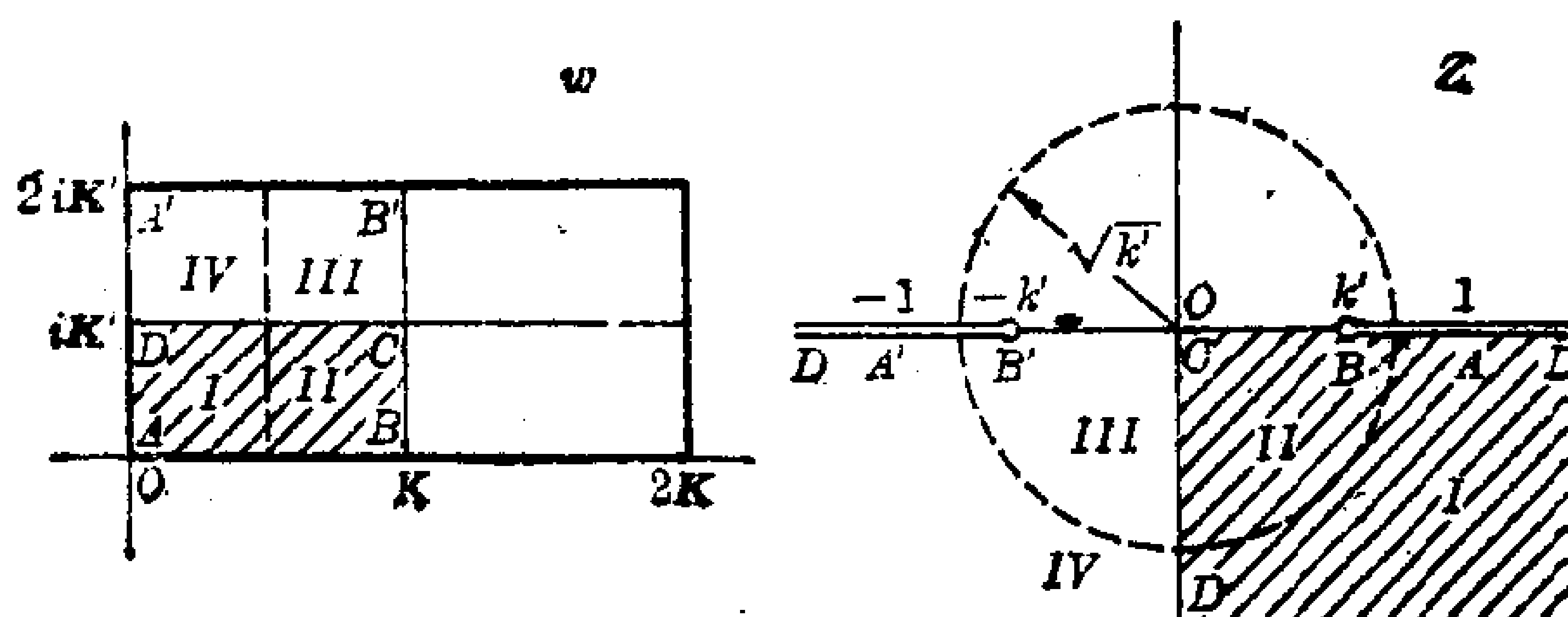


图 97

表 1

k_1	l	h
k	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{E}'$
$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}(\boldsymbol{E}-k'^2\boldsymbol{K})$	$\frac{1}{k}(\boldsymbol{E}'-k^2\boldsymbol{K}')$
k'	$\boldsymbol{E}'$	$\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E}$
$\frac{1}{k'}$	$\frac{1}{k'}(\boldsymbol{E}'-k^2\boldsymbol{K}')$	$\frac{1}{k'}(\boldsymbol{E}-k'^2\boldsymbol{K})$
$\frac{ik}{k'}$	$\frac{1}{k'}\boldsymbol{E}$	$\frac{1}{k'}(\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{E}')$
$\frac{ik'}{k}$	$\frac{1}{k}\boldsymbol{E}'$	$\frac{1}{k}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{E})$

1） $w(1)=a$ 或 $C_1[(k^2b^2-1)\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E}]=a$;

2） $w(1)=w\left(\frac{1}{k}\right)$ 或 $(k^2b^2-1)\boldsymbol{K}+\boldsymbol{E}=(k^2b^2-1)(\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}')+\boldsymbol{E}+i(\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{E}')$（参见题 **1260** 的提示）;

3) $w(b)-w(1)=ih$.

从方程2)，得 $b=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\boldsymbol{E}'}{\boldsymbol{K}'}}$. 代入方程1)，得 $C_1\left[\frac{\boldsymbol{E}'\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}'+\boldsymbol{E}\boldsymbol{K}'}{\boldsymbol{K}'}\right]=a$，即 $C_1=\frac{2a\boldsymbol{K}'}{\pi}$（参见题 **1260** 前的公式(10)）.

然后，欲确定 k，从 3) 得到超越方程 $(\boldsymbol{E}'-\boldsymbol{K}')u\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\boldsymbol{E}'}{\boldsymbol{K}'}},k\right)+$

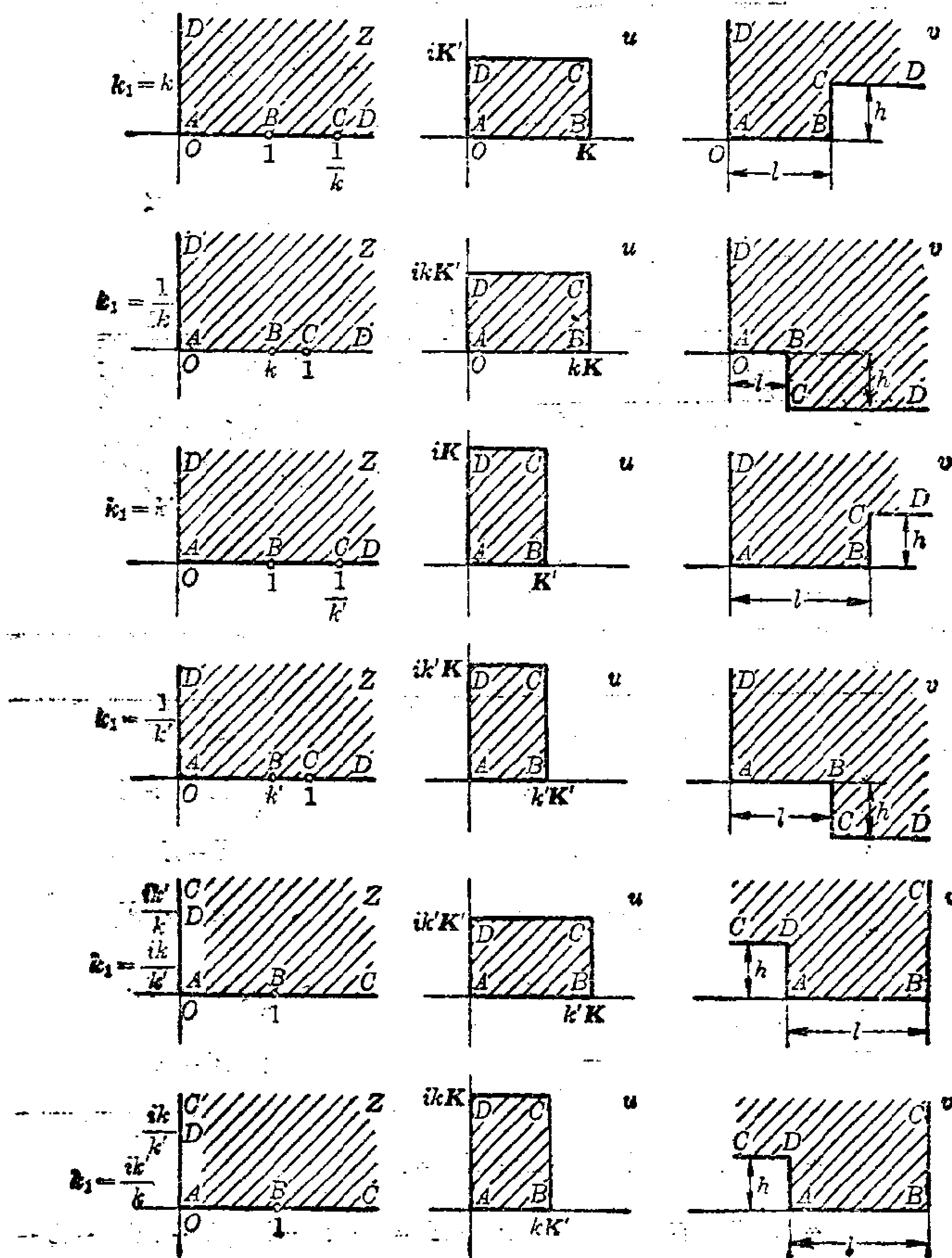


图 98

$\boldsymbol{K}'v\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\boldsymbol{E}'}{\boldsymbol{K}'}},\ k\right)=\frac{\pi}{2}(a+ih)$. 关于更详细的内容，参阅阿·贝茨(A. Betz)著"保形映射"，柏林，1948.

1263. 情形1)与2)，情形3)与4)分别在图99与100中加以说明。为了便于比较，在所有情形中，都借助第一类标准椭圆积分给出了到u-平面上的映射。按照对称原理，z-平面中第一象限(I)的映射的延拓在w-平面内导致一个带有矩形状凹陷的带形(参见图99, 1, 2中的区域I+II)，一个有矩形状凸出的带形(参见图100, 1, 2中的区域I+II)，以及其他区域(其中一些如相应各图所示)。在表2中给出主要的量的大小，包括(H, l, h)。注意：用t代替z：$k^2z^2+k'^2t^2=1$，第二种情形可化为第一种情形，第四种情形可化为第三种情形。在第2)与第4)种情形中，替换ν, k即出现值$\nu'=-\frac{\nu}{k^2+\nu}k'^2$, k'，对应的w-图形由情形1)与3)的w-图形通过伸长因子为$\frac{长度_2}{长度_1}=-\frac{k^2+\nu}{k^2}$, $\frac{长度_4}{长度_3}=\frac{k^2+\nu}{k^2}$(下标指相应的情形)的整线性变换而得到。对于$\nu=-1$的情

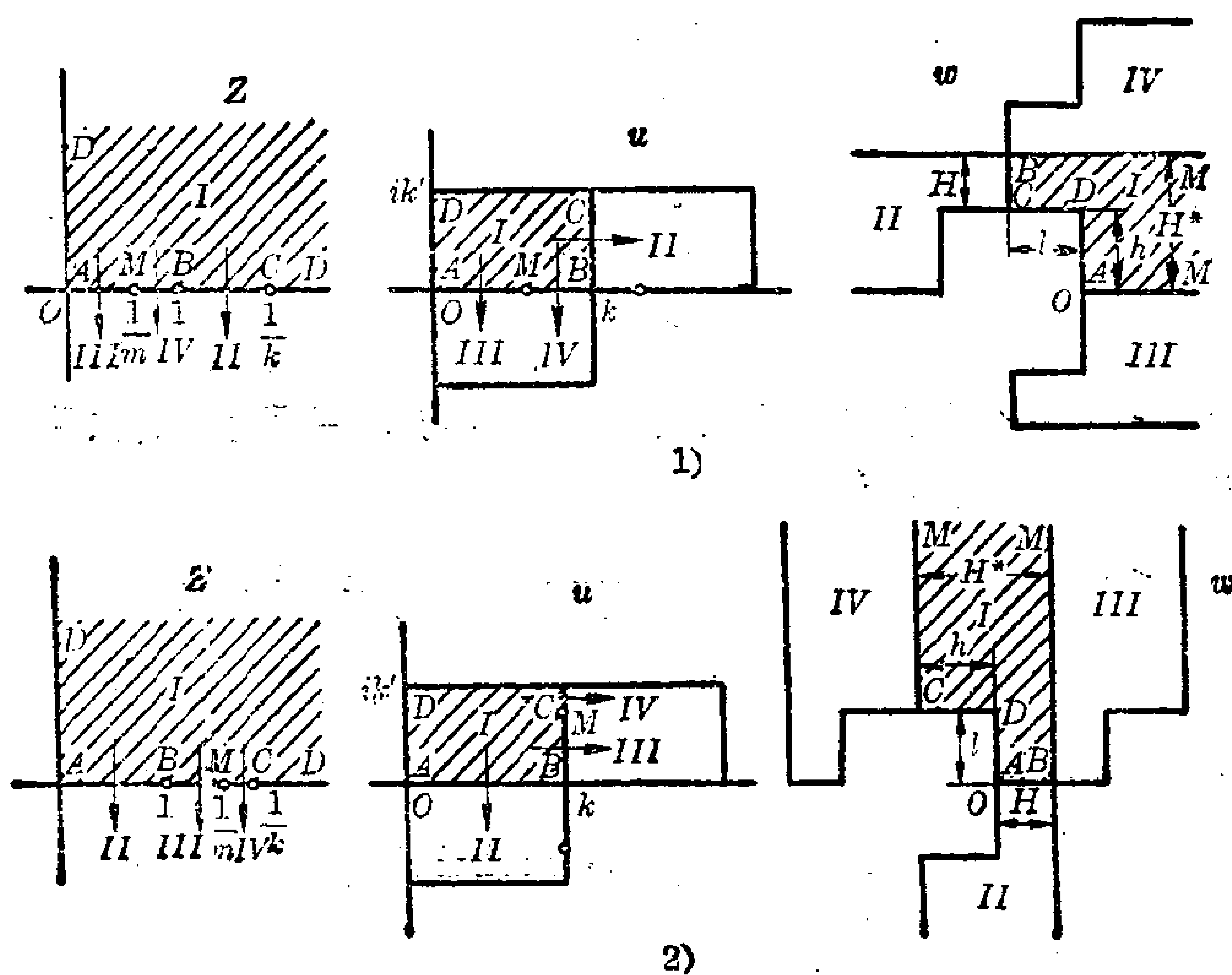
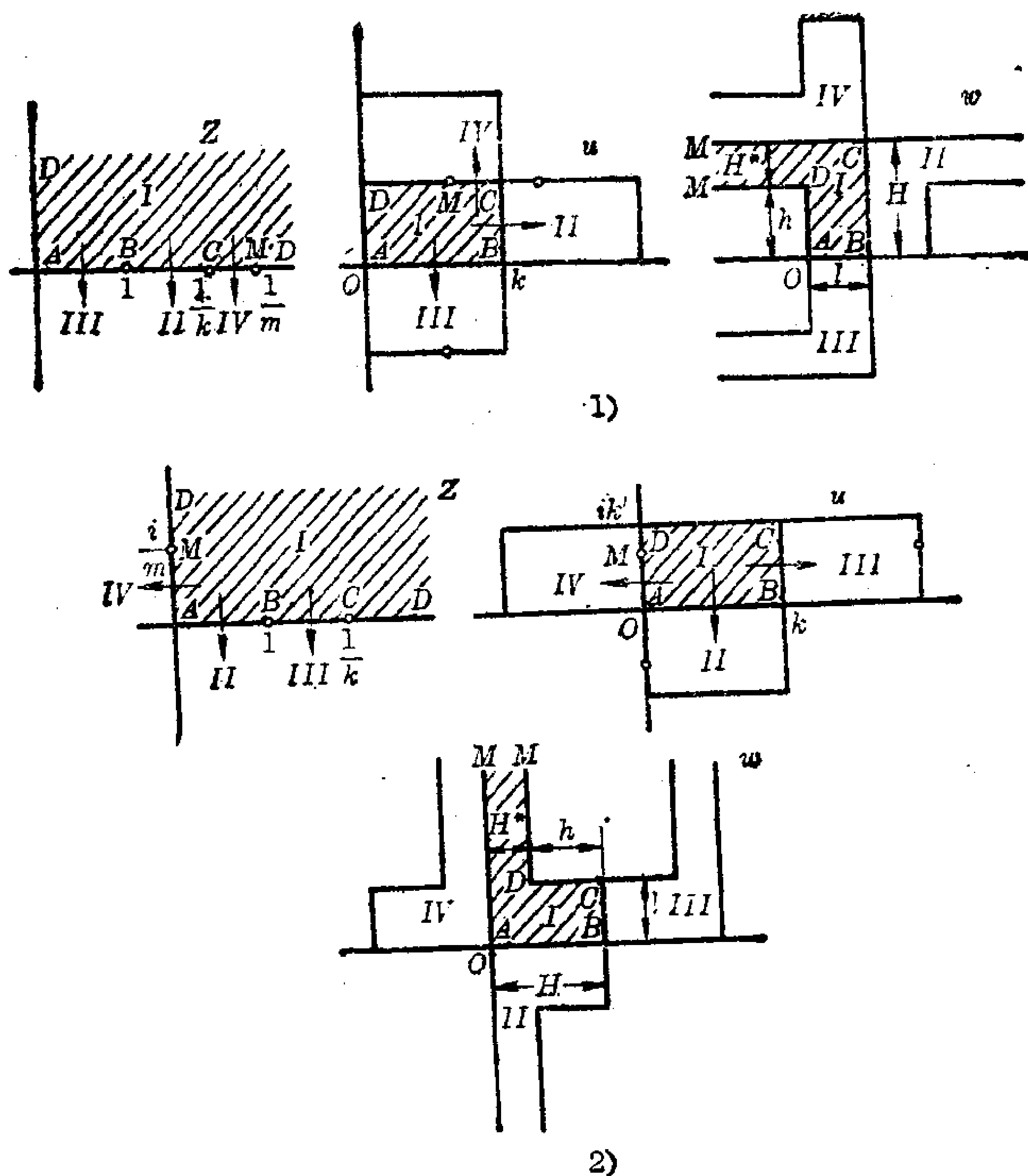


图 99



1)

2)

图 100

形与 $\nu=-k^2$ 的情形,图 101 给出了 u-平面与 w-平面之间的关系. 利用表 2, 对于 $\nu=-1$ 得到:

$$w=\frac{1}{k'^2}\left[k'^2u-E(u)+\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right]=-\frac{i}{k'}E\left(ik'u,\ \frac{1}{k'}\right),$$

$$l=\frac{1}{k'^2}(\boldsymbol{E}-k'^2\boldsymbol{K}),\ h=\frac{1}{k'^2}(\boldsymbol{E}'-k^2\boldsymbol{K}');$$

对于 $\nu=-k^2$ 得到:

$$w=\frac{1}{k'^2}\left[E(u)-k^2\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right],$$

$$l=\frac{1}{k'^2}(\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{E}'),\ H=\frac{1}{k'^2}\boldsymbol{E}.$$

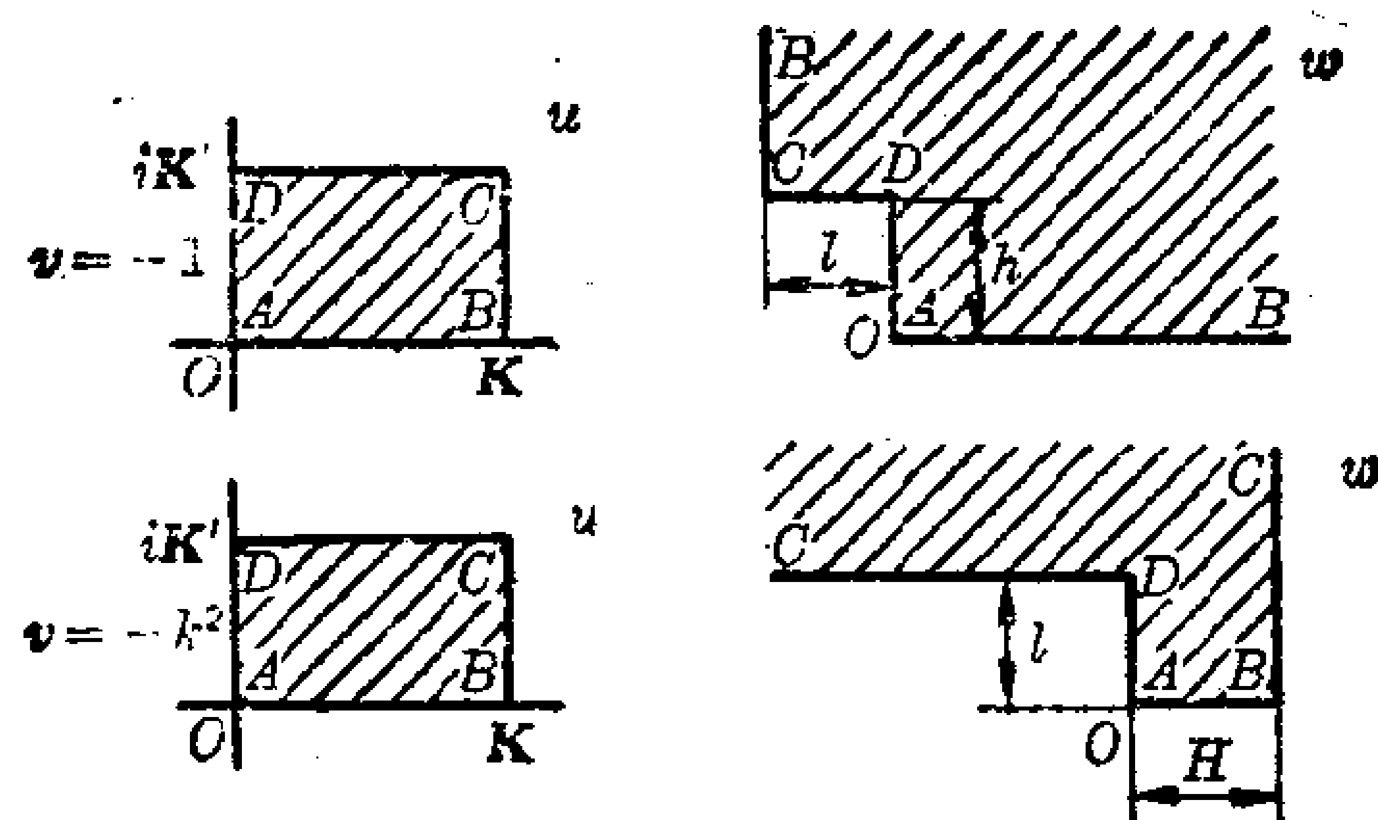


图 101

表 2

ν	H^*	H	l	h
$\nu<-1$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$-\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu',k')$	$-\Pi_1(\nu, k)$	H^*-H
$-1<\nu<-k^2$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$\Pi_1(\nu, k)$	$\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu', k')$	H^*-H
$-k^2<\nu<0$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu', k')$	$\Pi_1(\nu, k)$	$H-H^*$
$\nu>0$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\lvert\nu\rvert}{\lvert\nu+1\rvert\lvert\nu+k^2\rvert}}$	$\Pi_1(\nu, k)$	$\frac{k^2}{k^2+\nu}\Pi_1(\nu', k')$	$H-H^*$
$\nu=-1$	—	—	$\frac{1}{k'^2}(\boldsymbol{E}-k'^2\boldsymbol{K})$	$\frac{1}{k'^2}(\boldsymbol{E}'-k^2\boldsymbol{K}')$
$\nu=-k^2$	—	$\frac{1}{k'^2}\boldsymbol{E}$	$\frac{1}{k'^2}(\boldsymbol{K}'-\boldsymbol{E}')$	—

注. 在"l"栏中，积分取主值. 量 $\nu'=-\frac{\nu}{k^2+\nu}k'^2$.

1264. 解法: 由条件 $\Delta>0$, 即得 e_1, e_2, e_3 为互不相同的实数, 且 $g_2>0$. 设 $e_1>e_2>e_3$. 上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映射到顶点为 $0, \omega, \omega-\omega', -\omega'$ $\left(假设 \operatorname{Im}\frac{\omega'}{\omega}>0\right)$ 的矩形上, 这几个顶点对应 ∞, e_1, e_2, e_3. 矩形的中位线对应两个半圆(图 102): 第一个半圆中心在点 e_3, e_2, 与 e_1 关于该半圆对称(因此, 其半径为 $\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}$), 第二个半圆中心在点 e_1, e_2 与 e_3 关于该半圆对称(其半径为 $\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}$). 按照对称原理延拓 $\wp(w)$ 的映射, 求得该函数的半周期 ω, ω' 为:

$$\omega=\int_{e_1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\omega'=i\int_{-\infty}^{e_3}\frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(e_3-x)}}.$$

考察图 102，求得：

$$\wp(w)=e_3+\frac{e_1-e_3}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{\mathbf{K}}{\omega}w,\ k\right)},\quad k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

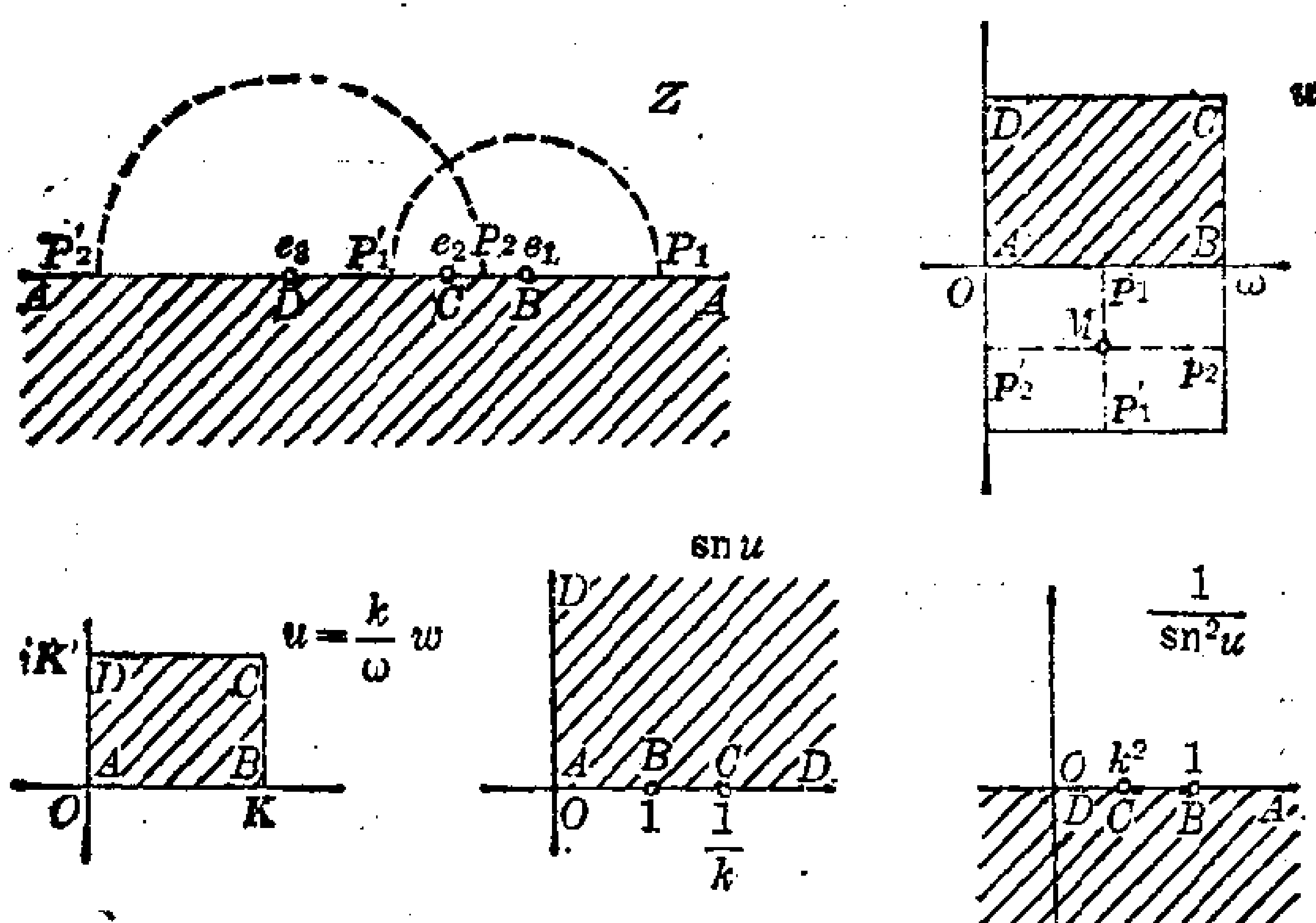


图 102

若 $g_3>0$，则 $e_3<e_2<0<e_1$，而 $\omega<|\omega'|$（由于 $k<k'$，因此 $\mathbf{K}<\mathbf{K}'$）. 若 $g_3<0$，则 $e_3<0<e_2<e_1$，因此 $\omega>|\omega'|$. 若 $g_3=0$，则 $e_2=0$，$e_3=-e_1$，$\omega=|\omega'|$. 这时，映射关于铅垂轴也为对称. 带有截口 $(-\infty, e_3]$，$[e_1,$

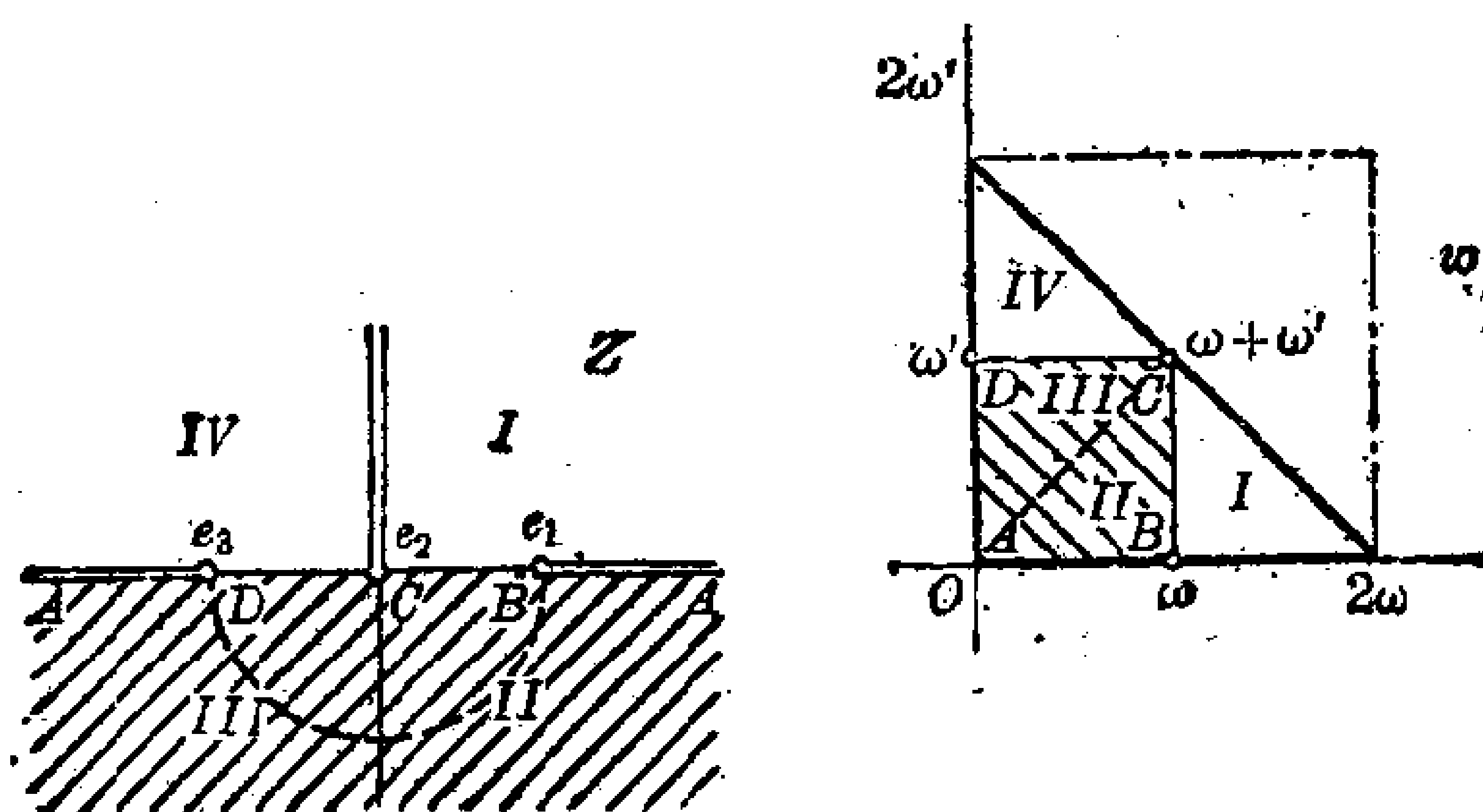


图 103

$\infty)$, $[0, i\infty)$ 的整个 z-平面对应于三角形 $(0, 2\omega, 2\omega')$，该三角形构成周期平行四边形的一半(此时,周期平行四边形为正方形)(图 103). 还须注意,若 e_1, e_2, e_3 任意($e_1+e_2+e_3=0$), 则周期平行四边形的一半对应从 e_1, e_2, e_3 发出到∞截开(一般情形为曲线)的 z-平面(参见图 104 所示的大致情形).

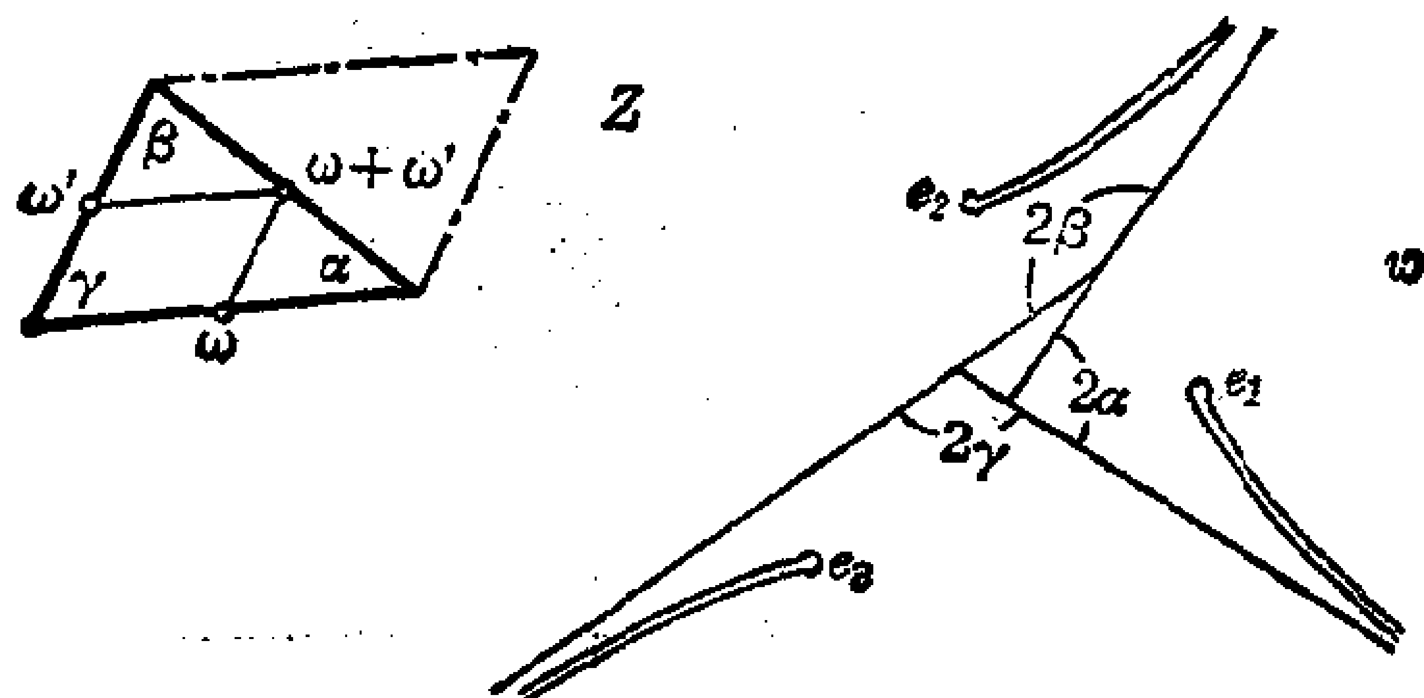


图 104

1265. 解法: 主要的映射如图 105 所示，借助对称原理映射半圆 II, 即得此映射. 注意 $dw=-\dfrac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$ 并置 $\mathrm{Arg}(-1)=\pm\pi$, 得 $\mathrm{Arg}\,dw=\pm\pi+\mathrm{Arg}\,dz-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3}\mathrm{Arg}(z-e_k)$, 由此推出 $\mathrm{Arg}\,dw$ 在“四边形”$PBMC$ 的边上分别取值$-\dfrac{\pi}{2}$, 0, $\dfrac{\pi}{2}$, $-\pi$, 这就导致图 105 中所示的映射. 因此,例如, 在弧 $\widehat{PB}$ 上,有(图 106) $\arg dw=-\pi+\left(\alpha_2+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{2}(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$, 等等. 至于确定函数 $\wp$ 的半周期 ω 与 ω' 的复共轭,则有

$$\omega+\omega'=\int_{e_3}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

$$\omega-\omega'=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{e_2}\frac{dx}{\sqrt{(e_1-x)(e_2-x)(e_3-x)}}.$$

若 $g_2=0$, 则 e_1, e_2, e_3 为等边三角形的顶点,周期平行四边形为菱形. 若 $g_3<0$(于是 $e_2<0$), 则在 O 点其角度为 60°. 若 $g_3>0$ (于是 $e_2>0$), 则在 O 点其角度为 120°. 在两种情形中, 周期平行四边形的一半都对应带有从点 e_1, e_2, e_3 发出的对称的径向截口的 z-平面(参见图 107, 108). **1266**. 1) $w=-\left[\dfrac{\wp(z)}{e_1}\right]^2$, 半周期 ω, $i\omega$; 2) $w=\dfrac{\wp'(z)}{2|e_2|^{\frac{3}{2}}}$, 半周

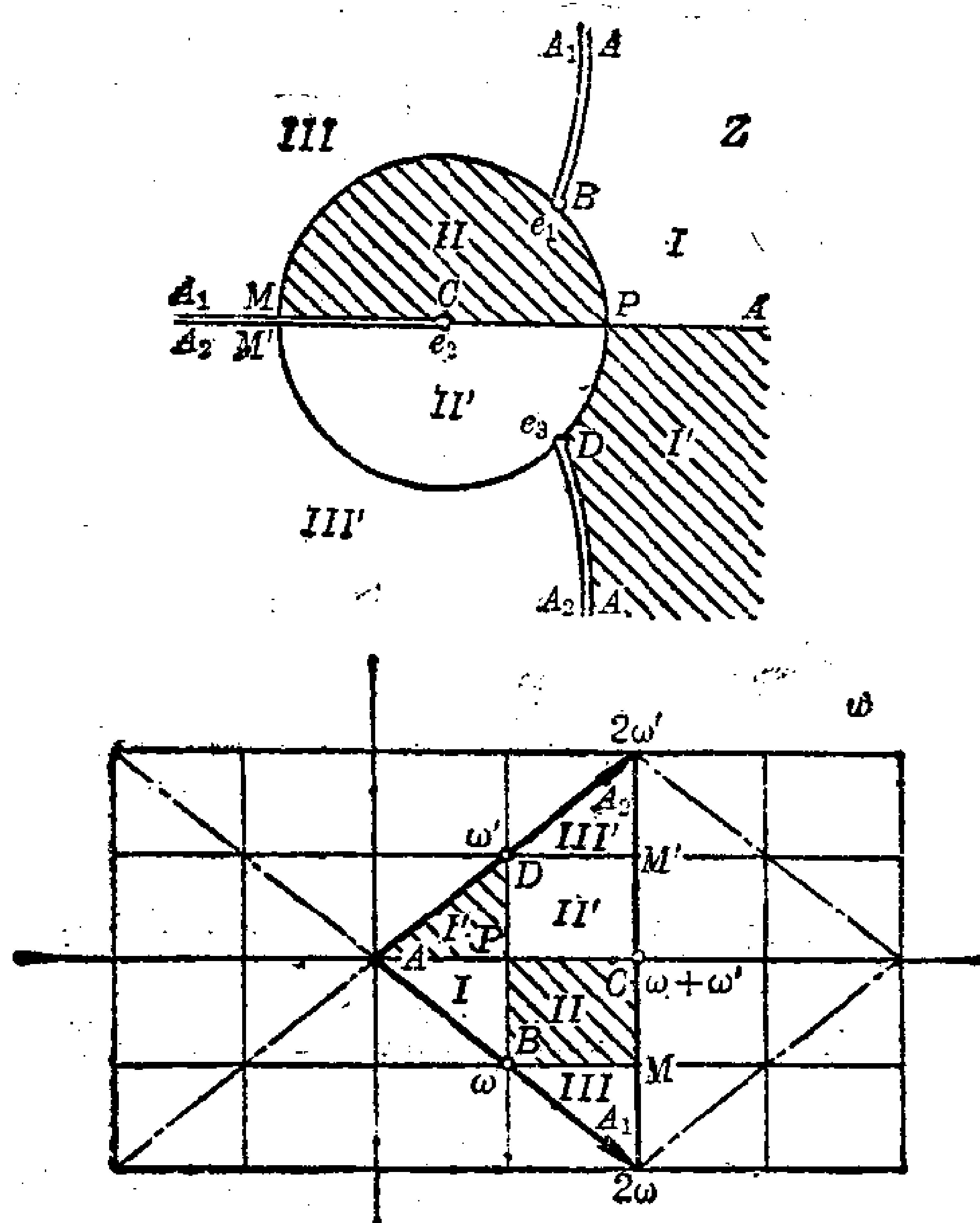


图 105

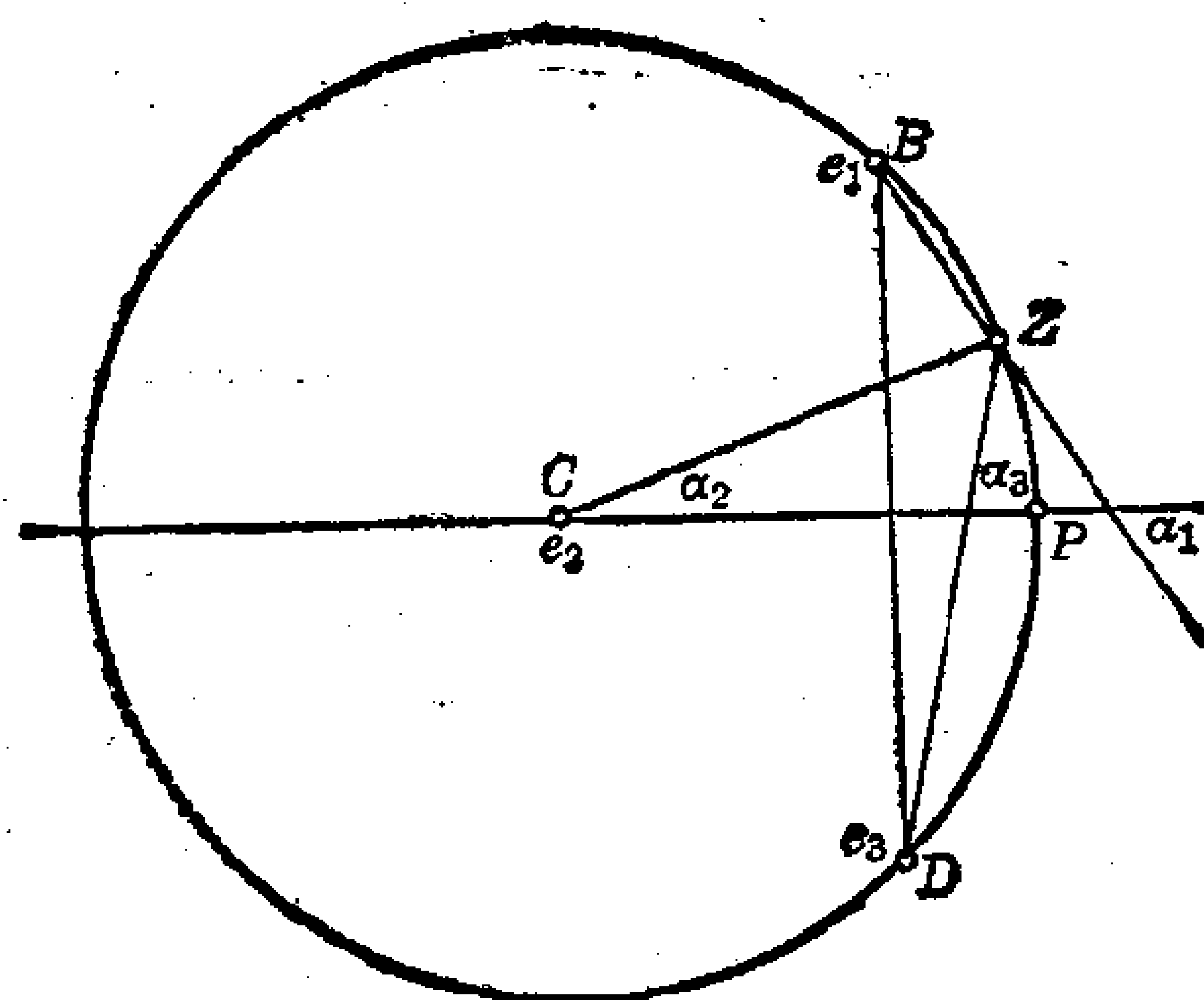


图 106

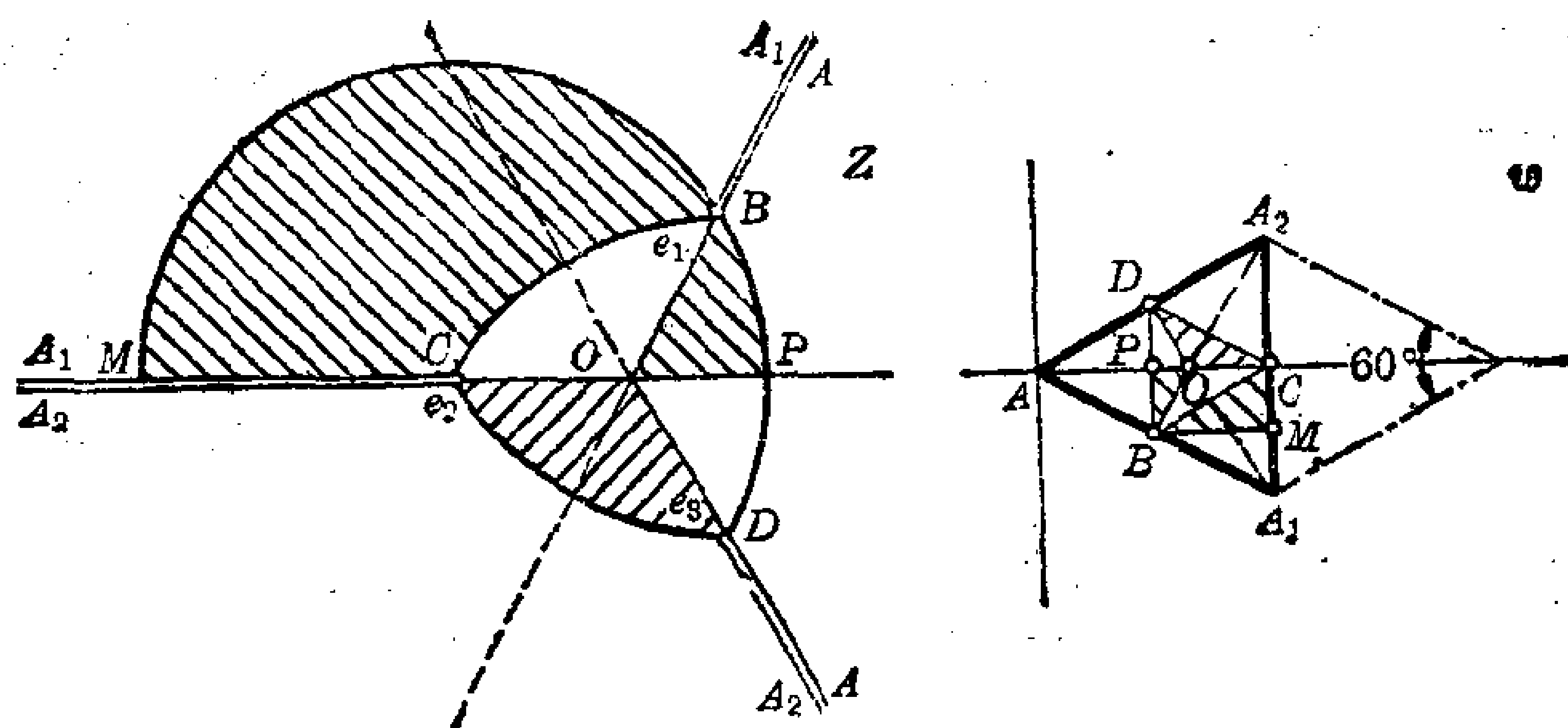


图 107

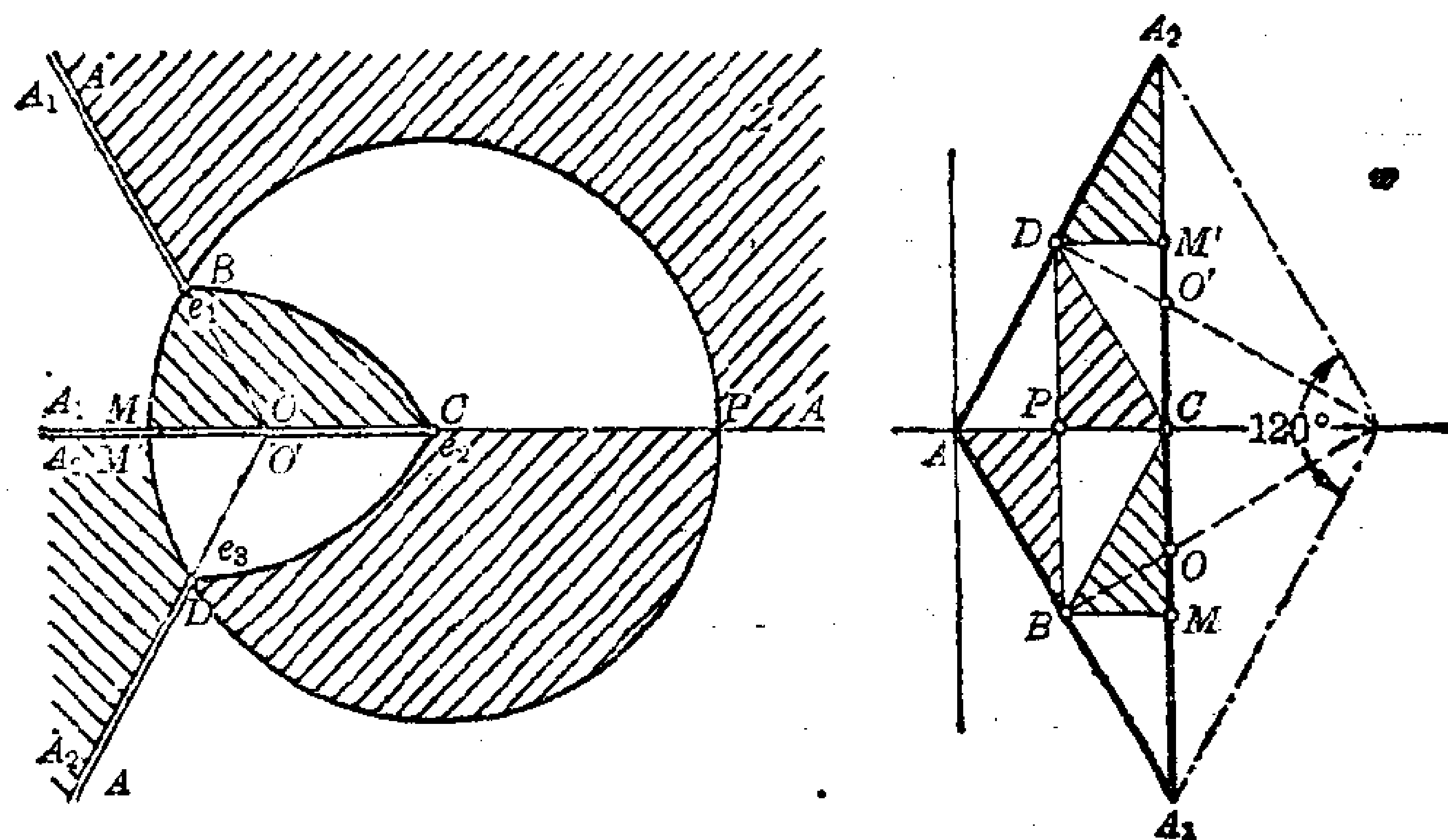


图 108

期 $\omega=he^{-i\frac{\pi}{6}}$, $\omega'=he^{i\frac{\pi}{6}}$, 其中 $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 3) $w=\frac{\wp'^2(z)}{4e_2^3}$, 半周期与第(2)小题相同. **1267**. 1) $z=\mathrm{sn}(u,\ k)$, $w=e^{\frac{\pi u}{K'}}$, $\ln\mu=2\pi\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{K}'}$; $|\mathrm{Re}\,u|<\boldsymbol{K}$, $|\mathrm{Im}\,u|<\boldsymbol{K}'$; 2) 映射函数与第(1)小题相同, 但 $0<\mathrm{Re}\,u<\boldsymbol{K}$, $|\mathrm{Im}\,u|<\boldsymbol{K}'$, $\ln\mu=\pi\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{K}'}$; 3) 借助线性变换, 可化为第(1)小题的情形; 其中 $k=\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}}$, $\lambda=(a,\ b,\ c,\ d)$ 为给定点的交比; 4) 借助映射 $t=\sqrt{z^2+h^2}$, 可化为第(3)小题; 5) $z=\mathrm{sn}(u,\ k)$, $w=ie^{\frac{i\pi u}{2K}}$, $\ln\mu=\frac{\pi}{2}\frac{\boldsymbol{K}'}{\boldsymbol{K}}$; $-3\boldsymbol{K}<\mathrm{Re}\,u<\boldsymbol{K}$, $0<\mathrm{Im}\,u<\boldsymbol{K}'$; 6) 借助映射 $t=\sqrt{1+z^2}$, 可

化为第(5)小题，其中 $k=\cos\alpha$; 7) 映射函数与第(5)小题相同，但其中一次为 $0<\operatorname{Im}u<\frac{1}{2}\boldsymbol{K}'$，另一次为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{K}'<\operatorname{Im}u<\boldsymbol{K}'$; $\ln\mu=\frac{\pi}{4}\frac{\boldsymbol{K}'}{\boldsymbol{K}}$; 8) $z=k\,\mathrm{sn}^2(u,k)$, $w=e^{-i\frac{\pi u}{K}}$, $\ln\mu=\pi\frac{\boldsymbol{K}'}{\boldsymbol{K}}$; $|\operatorname{Re}u|<\boldsymbol{K}$, $0<\operatorname{Im}u<\boldsymbol{K}'$; 9) 映射函数与第(8)小题相同，但其中一次为 $0<\operatorname{Im}u<\frac{1}{2}\boldsymbol{K}'$，另一次为 $\frac{1}{2}\boldsymbol{K}'<\operatorname{Im}u<\boldsymbol{K}'$; $\ln\mu=\frac{\pi}{2}\frac{\boldsymbol{K}'}{\boldsymbol{K}}$; 10) 借助映射 $t=\frac{z+1}{\sqrt{1+\rho}}$，可化为第(8)小题，其中 $k=\frac{1}{\sqrt{1+\rho}}$; 11) 借助映射 $t=\frac{1-z}{1+z}$，可化为第(7)小题，其中 $k=\sin\frac{\alpha}{2}$; 12) 借助映射 $t=-i\sin z$，可化为第(2)小题，其中 $k=\frac{\operatorname{sh}H_1}{\operatorname{sh}H_2}$; 13) 借助映射 $t=\sin z$，可化为第 (7) 小题，其中 $k=\cos\operatorname{th}H$; 14) 借助映射 $t=\sin z$，再进行一次线性变换，可化为第 (5) 小题，其中 $k=\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-1}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda-1}}$, $\lambda=\frac{(1+\sin\beta)(1-\sin\alpha)}{2(\sin\beta-\sin\alpha)}$; 15) $z=C\left[Z(u)+\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right]$, $w=e^{-i\frac{u\pi}{K}}$, $\ln\mu=2\pi\frac{\boldsymbol{K}'}{\boldsymbol{K}}$，其中 k 由方程 $Z(\beta)\operatorname{tg}\alpha=\frac{\pi}{2\boldsymbol{K}}$, $\mathrm{dn}^2\beta=\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{K}}$ 确定. **1268**. $t=\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$. 顶点 $\boldsymbol{K}\pm i\boldsymbol{K}'$, $-\boldsymbol{K}\pm i\boldsymbol{K}'$ 变为点 $e^{\pm i\alpha}$, $-e^{\pm i\alpha}$，其中 $\cos\alpha=k$. **1269**. 借助映射 $u=\frac{2\boldsymbol{K}}{\pi}\arcsin z$，可化为题 **1268**; 其中 k 由方程 $q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}=\frac{1}{(a+b)^2}$ 确定，$b=\sqrt{a^2-1}$. **1270**. $t=\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}$，其中 $u=\frac{2\boldsymbol{K}}{\pi}\arcsin z$, $|\operatorname{Re}u|<\boldsymbol{K}$, $|\operatorname{Im}u|<\boldsymbol{K}'$. 参数 k 取值与题 **1269** 答案相同. 焦点 ±1 变为点 $\pm\frac{k}{1+k'}$. **1271** 1) $z=C\left[Z(u)+\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right]$, $t=\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$; 2) $z=C\left[Z(u)+\frac{\pi u}{2\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}'}\right]$, $t=\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$; 3) $z=\frac{a}{hk}\left[E(u)-i(\boldsymbol{E}'-k^2\boldsymbol{K}')-k'^2u+\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right]$. 关于常数的确定，参阅阿·贝茨著"保形映射"，柏林，1948.

第 十 章

1272. 速度为 $V=\alpha-i\beta$ 的平移运动. 在∞处有矩为 $p=2\pi c$ 的双重源. 流线为 $\beta x+\alpha y=C$; 等势线为 $\alpha x-\beta y=C$. **1273** 在点 $z=0$ 处

有一临界点(枝点);在∞处有一 $2n$ 阶的多重源(亦为枝点); $r^n\cos n\varphi=C$ 为等势线, $r^n\sin n\varphi=C$ 为流线 ($z=re^{i\varphi}$); $V=n\bar{z}^{n-1}$. **1274**. 在点 $z=0$ 与 $z=\infty$ 处有涡旋源: $(0;\ Q,\ \Gamma)$, $(\infty;\ -Q,\ -\Gamma)$; $\ln r=-\frac{\Gamma}{Q}\varphi+C$ 为等势线; $\ln r=\frac{Q}{\Gamma}\varphi+C$ 为流线. 两族曲线都为对数螺线;在 $\Gamma=0$ 或 $Q=0$ 的情形中,一族曲线表示圆 $r=C$,另一族表示射线 $\varphi=C$. 速度 $V=\frac{|\Gamma+iQ|}{2\pi r}e^{i\left(\varphi-\operatorname{arc\,tg}\frac{Q}{\Gamma}+\frac{\pi}{2}\right)}$ ($z=re^{i\varphi}$). **1275**. 在点 a, b 处有涡旋源: $(a;\ Q,\ \Gamma)$, $(b;\ -Q,\ -\Gamma)$;场线为环绕着 a 与 b 的对数螺线(图 109): $\ln\rho=-\frac{\Gamma}{Q}\theta+C$ 为等势线; $\ln\rho=\frac{Q}{\Gamma}\theta+C$ 为流线 $\left(\frac{z-a}{z-b}=\rho e^{i\theta}\right)$. 速度 $V=\frac{\Gamma-iQ}{-2\pi i}\frac{\bar{a}-\bar{b}}{(\bar{z}-\bar{a})(\bar{z}-\bar{b})}$. **1276** 在点 $z=0$ 处, 有一个矩为 $p=2\pi$ 的双重源; $r=C\cos\varphi$ 为等势线; $r=C\sin\varphi$ 为流线. $V=-\frac{e^{2i\varphi}}{r^2}$, $V_\infty=0$. 在点 $2\pm i$ 处,速度为 $-\frac{3\pm 4i}{25}$. **1277**. 1) 与 2) 在点 0 与∞处,有矩为 $\pm 2\pi R^2$ 与 2π (正号属于情形 1), 负号属于情形 2)) 的双重源. 场线为三次曲线: $x\pm\frac{R^2x}{x^2+y^2}=C$ 为等势线, $y\mp\frac{Ry}{x^2+y^2}=C$ 为流线. $V=1\mp\frac{R^2}{r^2}e^{2i\varphi}$, $V_\infty=1$. 点 $z=\pm R$ 为情形 1) 中的临界点,点 $z=\pm Ri$ 为情形 2) 中的临界点(参见图 110 与 111). **1278**. 在点 $z=0$ 处,有一个四重源, $r^2=C\cos 2\varphi$ 为等势线; $r^2=C\sin 2\varphi$ 为流线. $V=-\frac{2}{r^3}e^{3i\varphi}$,

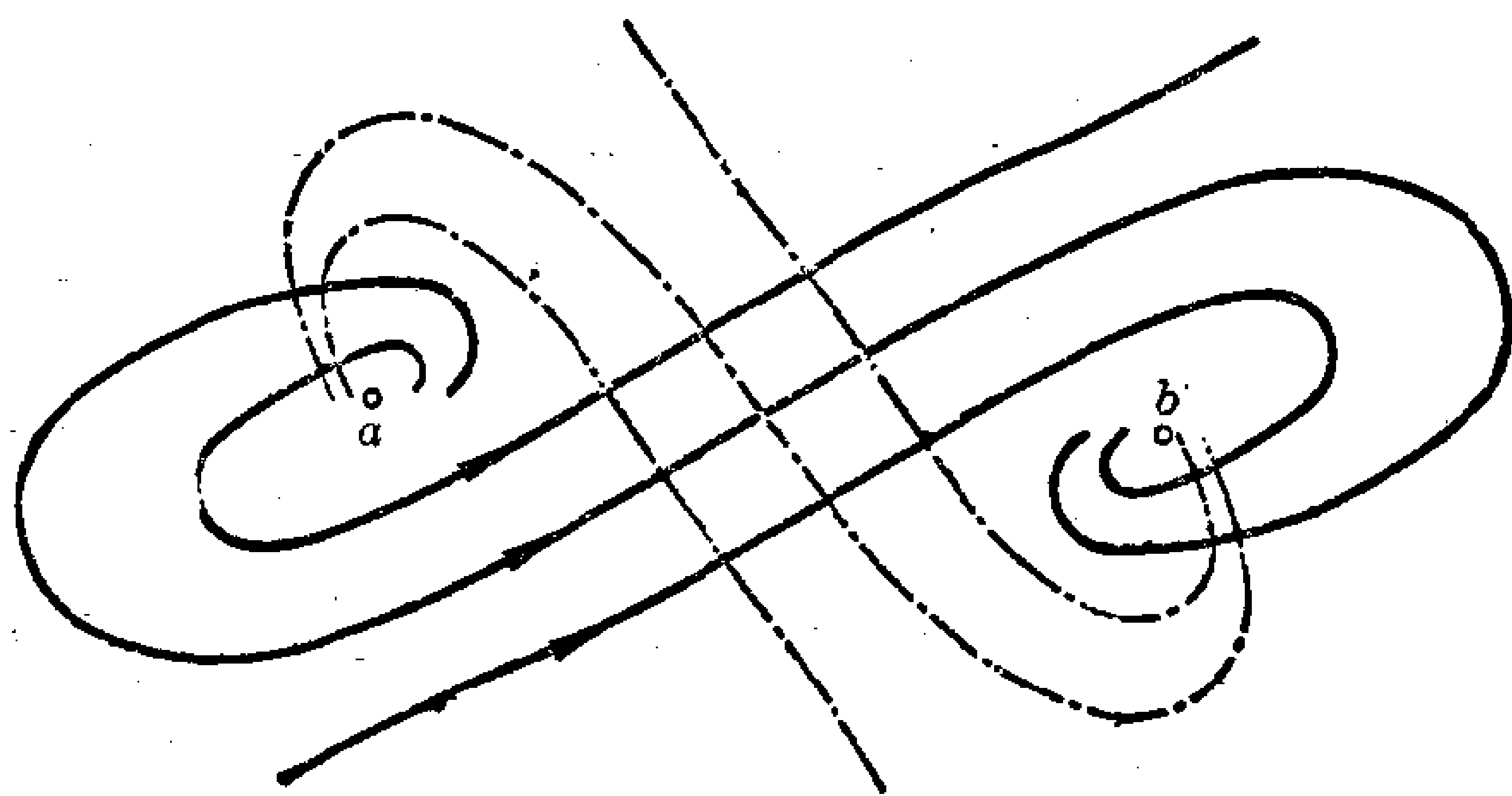


图 109

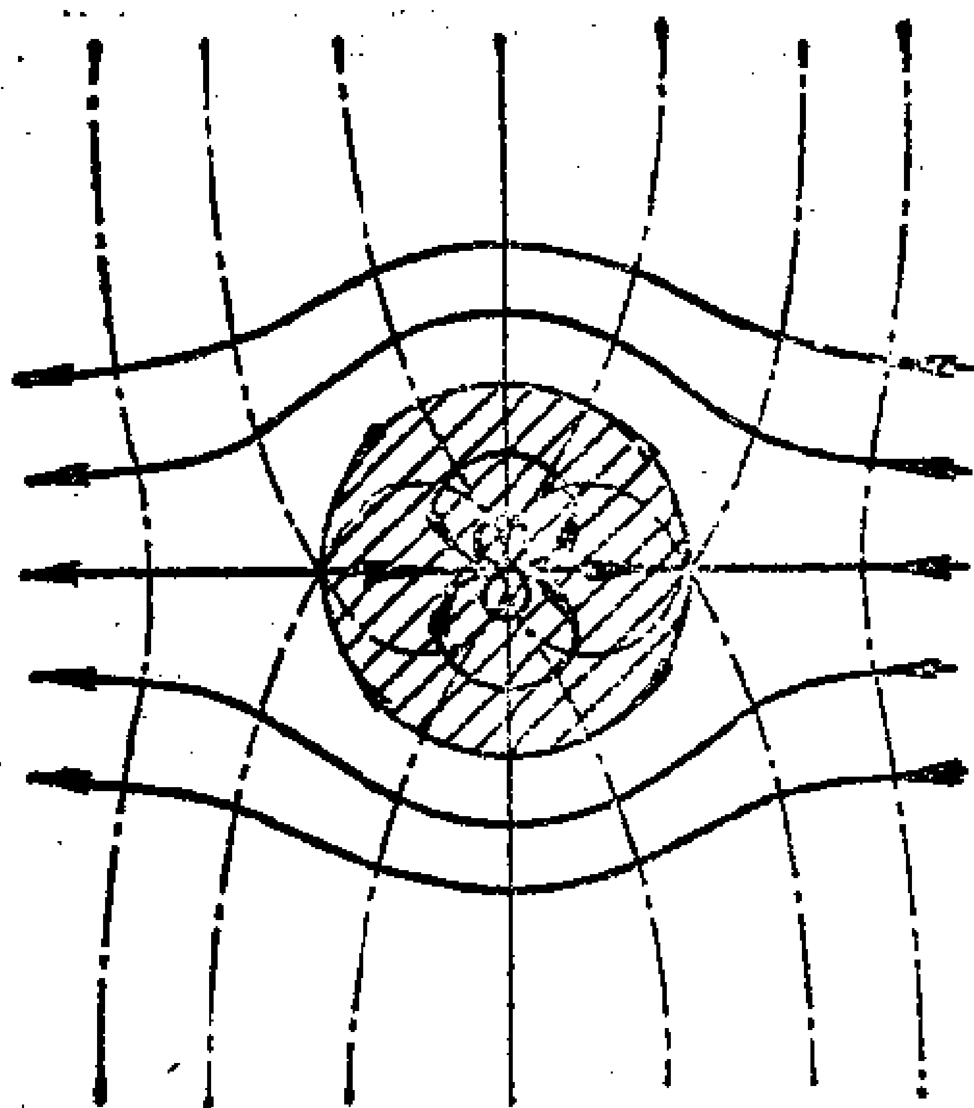


图 110

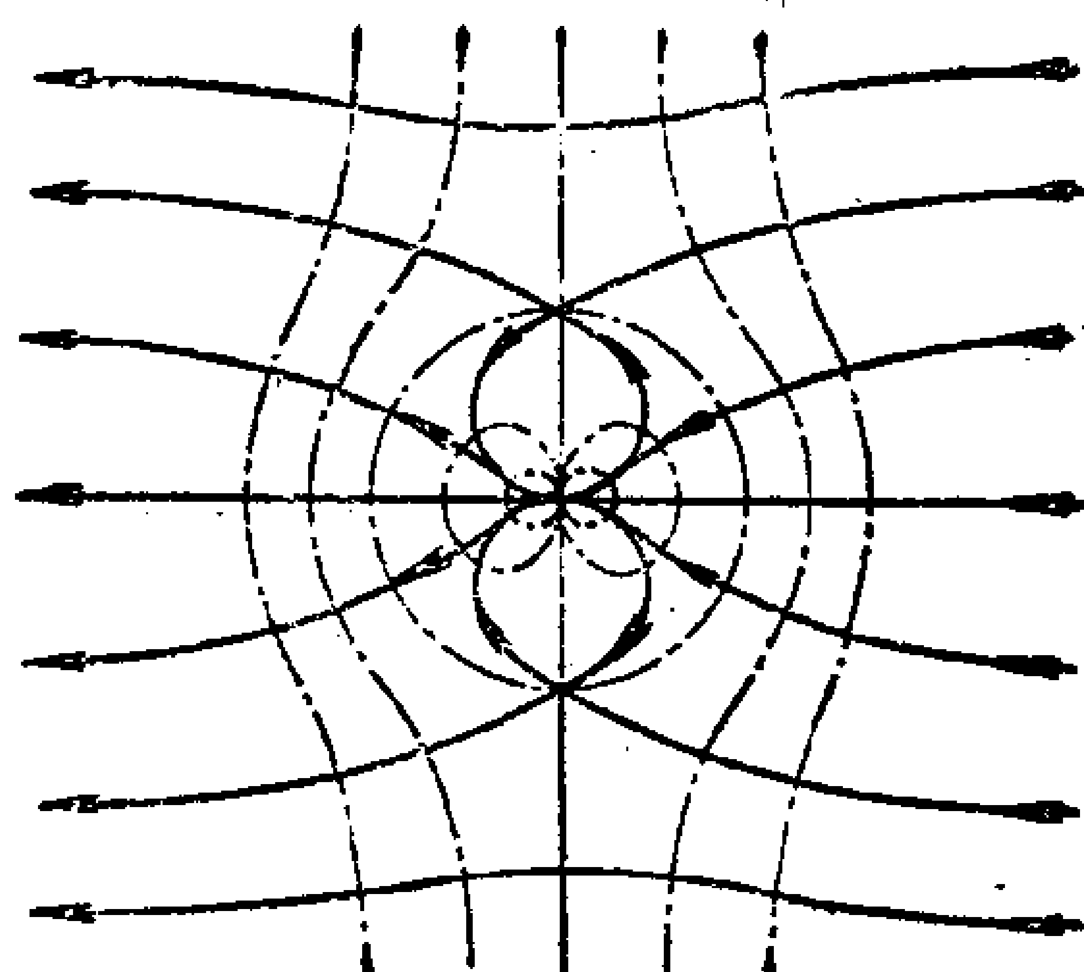


图 111

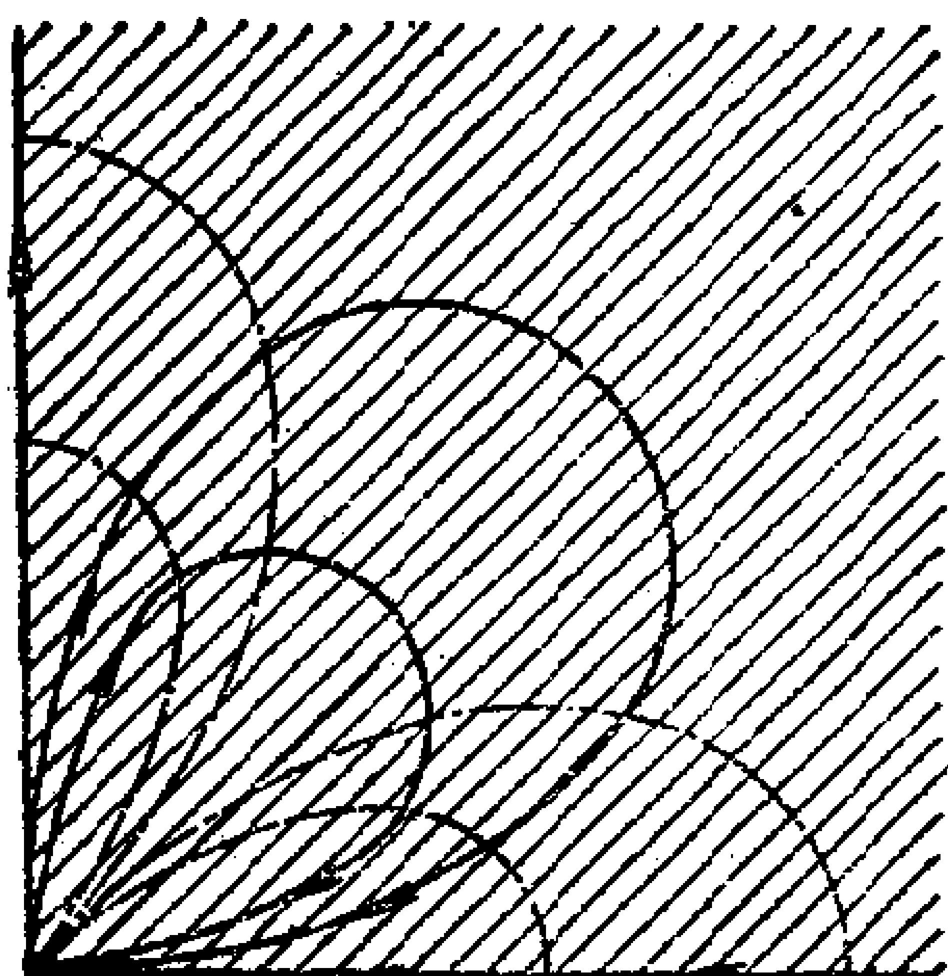


图 112

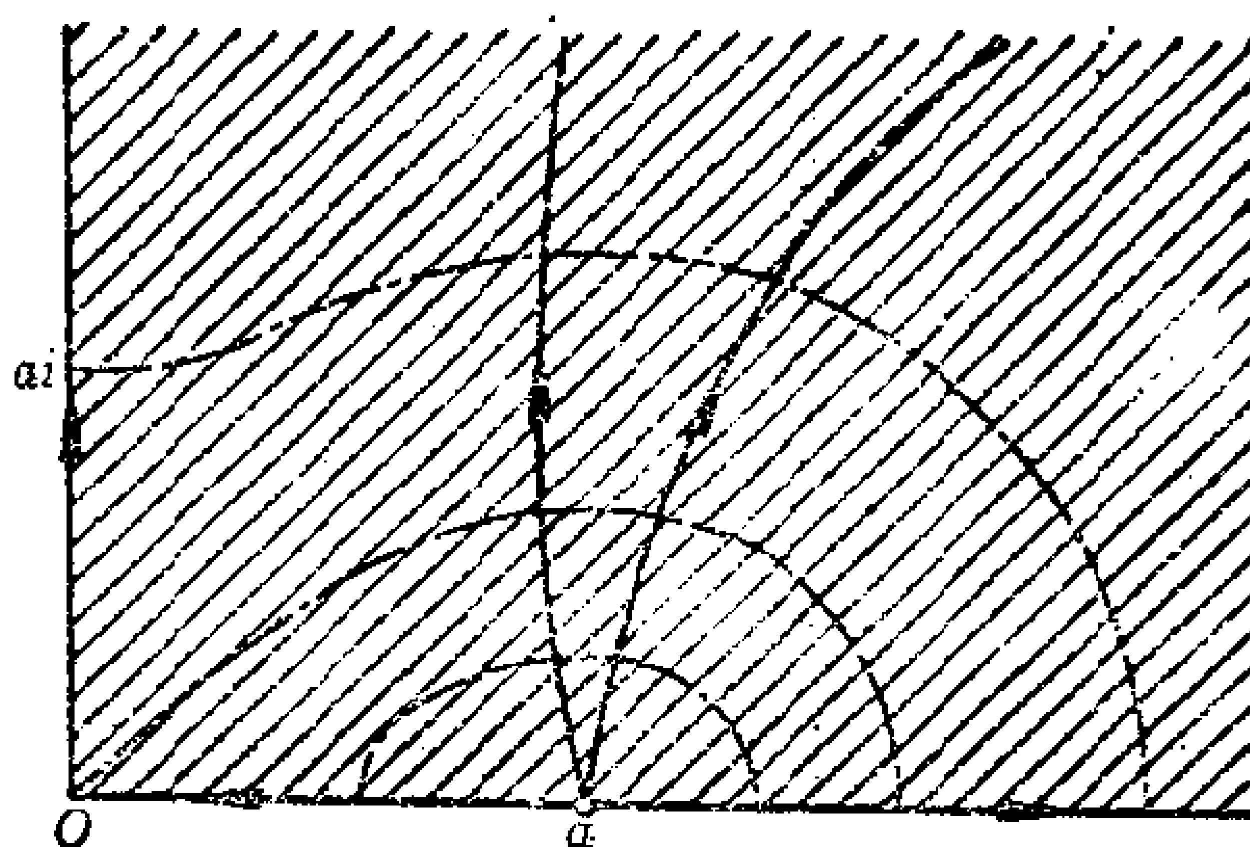


图 113

$V_\infty=0$(图 112)[1]. **1279**. 在点 $\pm a$ 处，有强度为 2π 的源；在∞处，有强度为 -4π 的源. 等势线为双纽线 $|z^2-a^2|=C$，流线为中心在原点且通过点 $\pm a$ 的双曲线 $x^2-\frac{2}{C}xy-y^2=a^2$. $V=\frac{2\bar{z}}{\bar{z}^2-a^2}$, $V_{\pm i_1}=\pm\frac{i}{a}$；原点为临界点(图 113). **1280**. 在点 $\pm a$, $\pm ai$ 处，有源：$(\pm a;\ 2\pi)$, $(\pm ai;\ -2\pi)$；$r^4+Ca^2r^2\cos 2\varphi+a^4=0$ $(|C|>2)$ 为等势线(包括直线 $y=\pm x$)；$r^4+Ca^2r^2\sin 2\varphi-a^4=0$ 为流线(包括坐标轴). $V=\frac{4a\bar{z}^2}{\bar{z}^4-a^4}$, $V_\infty=0$, $z=0$ 为临界点(图 114). **1281** 在点 ± 1, 0 及在 ∞ 处，有源：

1) 在这里以及在别处，凡流动关于坐标轴对称，则仅在第一象限中表示之.

$(\pm 1;\ Q)$, $(0;\ -Q)$, $(\infty;\ -Q)$; $r^2+\frac{1}{r^2}=C+2\cos 2\varphi\,(C>0)$ 为等势线$\left(对于充分大的 C 值，曲线接近于圆 r=\sqrt{C} 与 r=\frac{1}{\sqrt{C}}\right)$; $r=\sqrt{\frac{C+\operatorname{tg}\varphi}{C-\operatorname{tg}\varphi}}$ 为流线（包括坐标轴及圆 $r=1$）. $\boldsymbol{V}=\frac{Q}{2\pi}\overline{\left[\frac{z^2+1}{z(z^2-1)}\right]}$, $\boldsymbol{V}_\infty=0$. 点 $\pm i$ 为临界点(图 115). **1282**. 在点 $\pm i$, 0 处, 有源: $(\pm i;\ 2\pi)$, $(0;\ -4\pi)$; $Cr^4-2r^2\cos 2\varphi-1=0\,(C>-1)$ 为等势线$\left(C=0 时为双曲线 y^2-x^2=\frac{1}{2}\right)$; $r=\sqrt{C\sin 2\varphi-\cos 2\varphi}$ 为流线（$C=0$ 时为伯努利双纽线），且包括坐标轴. $\boldsymbol{V}=-\overline{\frac{2}{z(z^2+1)}}$; $\boldsymbol{V}_\infty=0$(图 116). **1283**. 在点 $\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ 处, 有强度为 2π 的源, 在点 $z=0$ 处, 有强度为 -4π 的源;

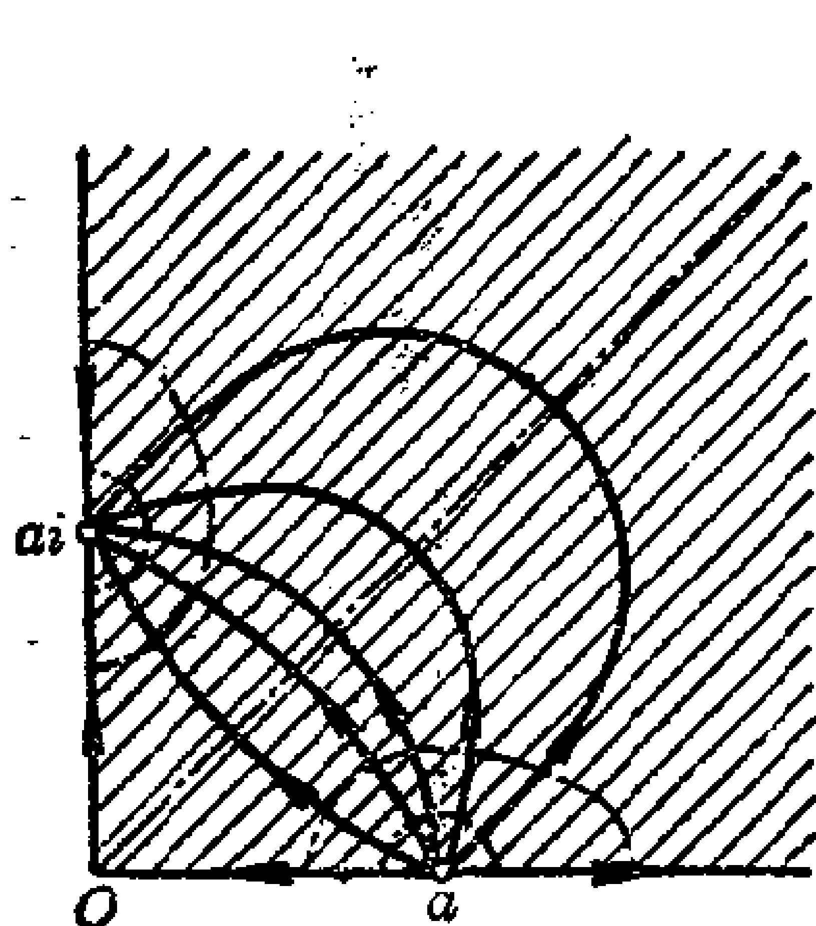


图 114

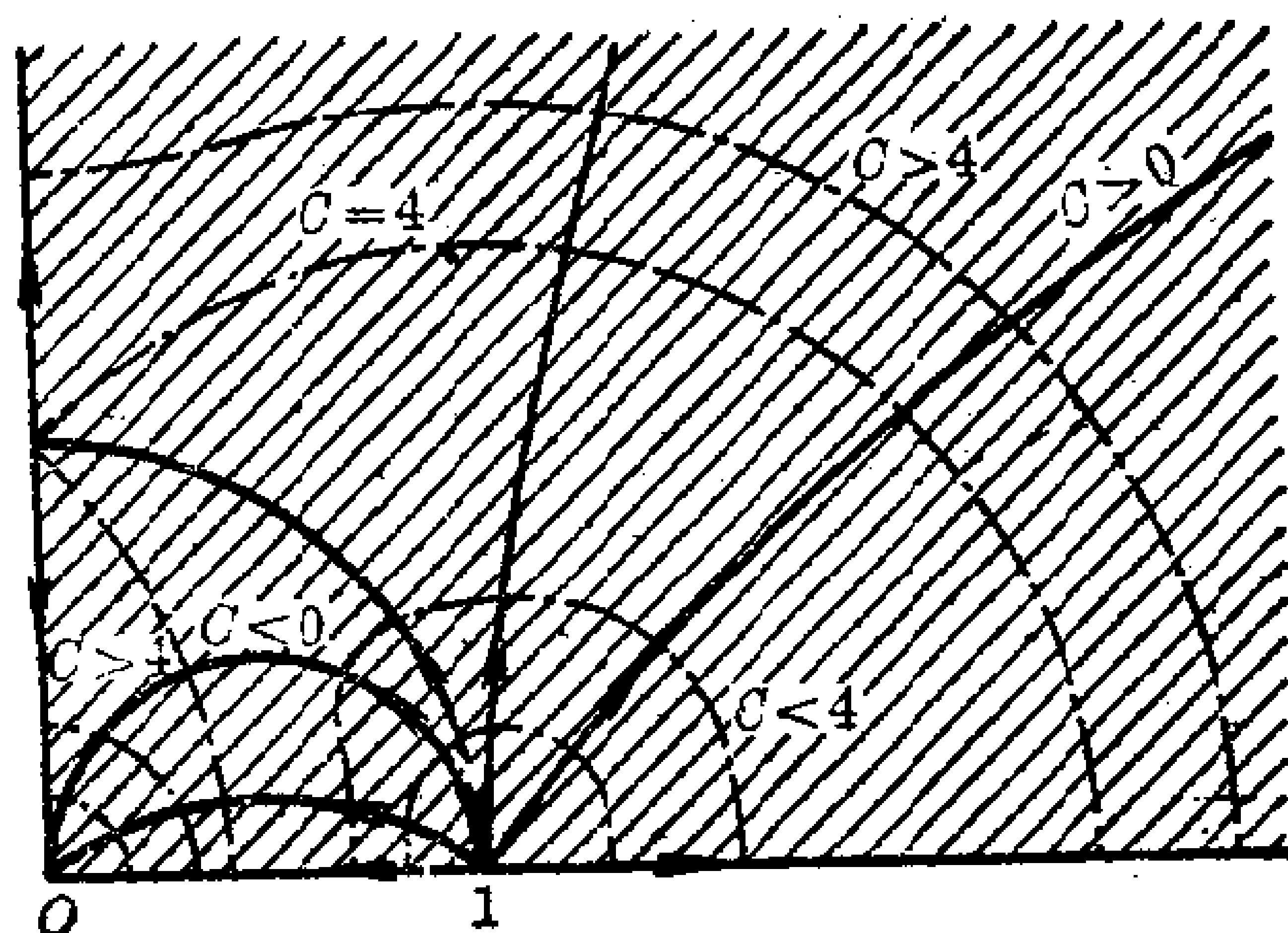


图 115

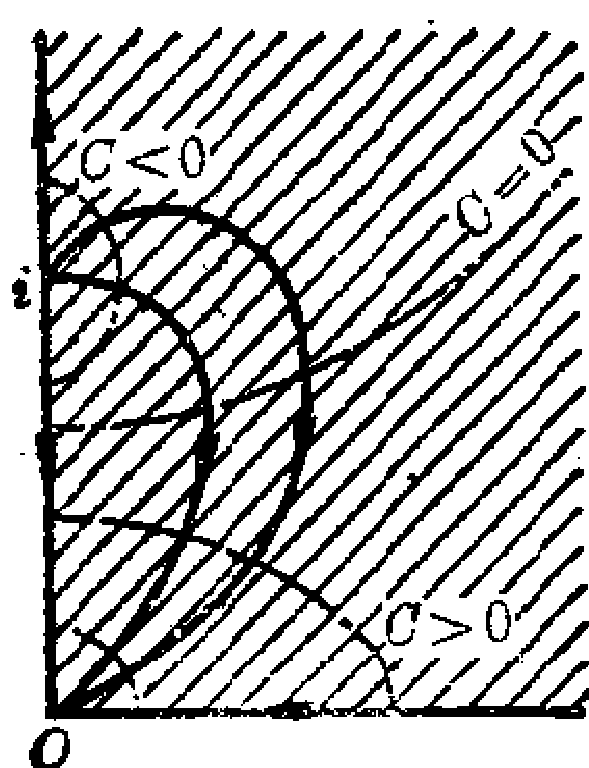


图 116

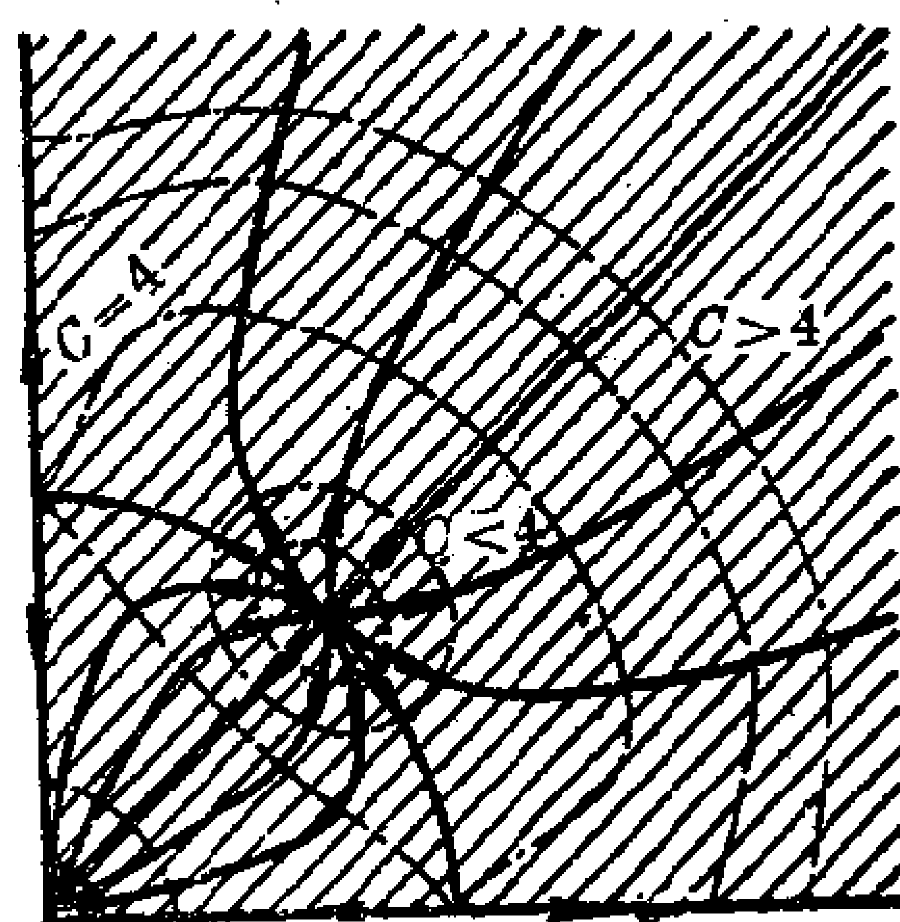


图 117

在 ∞ 处，也有强度为 -4π 的源；$r^4+\frac{1}{r^4}=C-2\cos 4\varphi(C>0)$ 为等势线$\left(C<4\right.$ 时曲线分解为四个部分，$C>4$ 时分解为两个部分；对于充分大的 C 值，它们几乎为圆 $r=\sqrt[4]{C}$ 与 $\left.r=\frac{1}{\sqrt[4]{C}}\right)$；$\operatorname{tg} 2\varphi=C\frac{r^4-1}{r^4+1}$ 为流线（包括坐标轴，坐标轴夹角的平分线及圆 $r=1$）．$V=2\overline{\left[\frac{z^4-1}{z(z^4+1)}\right]}$，$V_\infty=0$．点 $\pm 1, \pm i$ 为临界点（图 117）．**1284**．在点 $z=0$ 处，有源$(0;\ Q)$，在点 $z=\infty$ 处，有一个双重源与源$(\infty;\ -Q)$；$y^2=e^{\frac{4\pi}{Q}(C-ax)}-x^2$（在极坐标系中：$ar\cos\varphi+\frac{Q}{2\pi}\ln r=C$）为等势线；$r=\frac{C-\frac{Q}{2\pi}\varphi}{a\sin\varphi}$ 为流线；流线有水平的渐近线：$y_{x\to+\infty}\to\frac{C}{a}$，$y_{x\to-\infty}\to\frac{C-\frac{Q}{2}}{a}$，$V=a+\frac{Qe^{i\varphi}}{2\pi r}$；$V_\infty=a$；临界点为 $z=-\frac{Q}{2\pi a}$（图 118）．**1285**．在点 $z=0$ 处，有涡旋$(0;\ \Gamma)$；在 ∞ 处，有一双重源与一涡旋$(\infty;\ -\Gamma)$；$r=\frac{C-\frac{\Gamma\varphi}{2\pi}}{a\cos\varphi}$ 为等势线；$x^2=e^{\frac{4\pi}{\Gamma}(ay-C)}-y^2\left(ar\sin\varphi-\frac{\Gamma\ln r}{2\pi}=C\right)$ 为流线；$V=a+\frac{\Gamma}{2\pi r}e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}$，$V_\infty=a$；临界点为 $z=\frac{\Gamma i}{2\pi a}$（图 119）．

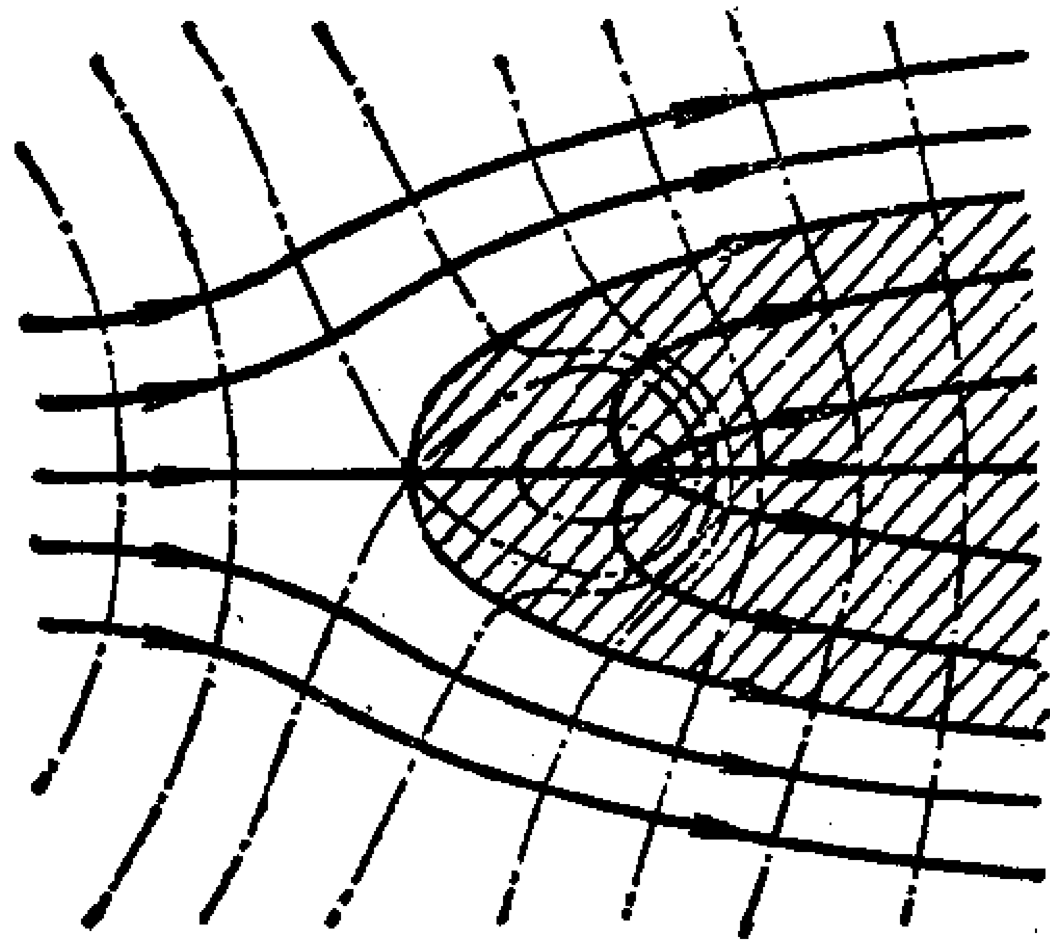


图 118

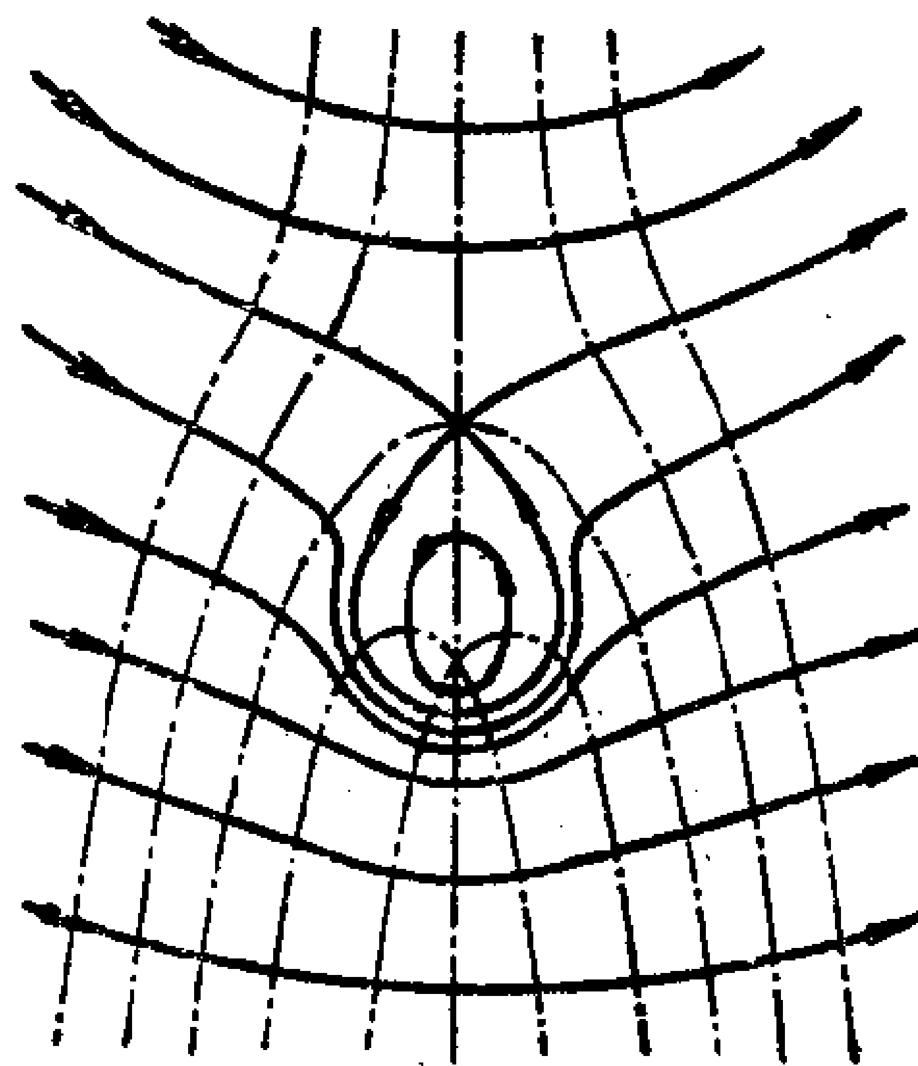


图 119

1286．流体使半径为R的圆流线化；$V_\infty=a$，环流 Γ；临界点由等式$z_{cr}=$

$\frac{1}{4\pi a}(\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 a^2 R^2 - \Gamma^2})$确定．若$\Gamma < 4\pi aR$，则$|z_{cr}| = R$，即两个临界点都位于圆$|z| = R$上；若$\Gamma = 4\pi aR$，则两临界点重合；若$\Gamma > 4\pi aR$，则$|z_{cr}| > R$(此时，第二个临界点位于圆$|z| = R$的内部)．**1287**．$w(z) = Ve^{-i\alpha}z + \sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma_k + iQ_k}{2\pi i}\ln(z - a_k)$．在$\infty$处，有矩为$2\pi Ve^{-i\alpha}$的双重源及源强为$Q_\infty = \sum_{k=1}^{n}Q_k$与旋强为$\Gamma_\infty = -\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k$的涡旋源．**1288**．1) 否；2) 是；3) 是(例如，流动$w = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$有从原点发出的流线)．**1289**．在单叶保形映射下，涡旋源变为有相同旋强与源强的涡旋源．一个多重源变为一组总计为同样阶数的多重源．一个双重源变为一个双重源，其矩的变化规律如下：1) $(a;\ p) \to (\alpha;\ pc_1)$；2) $(\infty;\ p) \to (\alpha;\ pc_{-1})$；3) $(a;\ p) \to \left(\infty;\ \frac{p}{c_{-1}}\right)$；4) $(\infty;\ p) \to \left(\infty;\ \frac{p}{c_1}\right)$．**1290** 在$n$叶保形映射下，涡旋源变为旋强与源强缩小$n$倍的涡旋源．**1291**．涡旋源($a^*$为$a$的对称点)的变化规律为：对于流线，$(a;\ Q,\ \Gamma) \to (a^*;\ Q,\ -\Gamma)$，对于等势线，$(a;\ Q,\ \Gamma) \to (a^*;\ -Q,\ \Gamma)$．双重源的变化规律更为复杂．对于直线形流线，变化规律为：$(a;\ p) \to (a^*;\ p')$，其中图中通过a与a^*的矢量p，p'关于流线对称．对于圆形流线$|z| = R$，若$a \neq 0$，$(a;\ p) \to \left(a^*;\ -\frac{R^2}{\bar{a}^2}\bar{p}\right)$，若$a = 0$，$(a;\ p) \to \left(\infty;\ \frac{\bar{p}}{R^2}\right)$．至于直线形与圆形的等势线，使用同样的记法，分别有$(a;\ p) \to (a^*;\ -p')$，$(a;\ p) \to \left(a^*;\ \frac{R^2}{\bar{a}^2}\bar{p}\right)$，$(0;\ p) \to \left(\infty;\ -\frac{\bar{p}}{R^2}\right)$．**1292**．1) 在所有情形中，流动的奇点必关于圆$|z| = R$对称地分布(参见题**1291**)．特别，双重源的轴线必位于该圆上，它们必与该圆相切．强度的和必等于零，对此$\sum Q_k + \frac{1}{2}\sum Q'_i = 0$，其中$Q_k$为$|z| = R$内部的源的强度，而$Q'_i$为$|z| = R$上的源的强度．在$|z| = R$上必无涡旋；2) 流动的奇点必关于圆$|z| = R$对称地分布．特别，位于圆$|z| = R$上的双重源的轴线必与该圆正交．强度的和必等于零，对此$\sum \Gamma_k + \frac{1}{2}\sum \Gamma'_i = 0$，其中$\Gamma_k$为$|z| = R$内部的涡旋的强度，而$\Gamma'_i$为$|z| = R$上的涡旋的强度；在$|z| = R$上必无源．**1293**．1) $w = Vz + c$ ($c =$ 常数)；2) $w = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z - a}{z - \bar{a}} +$

c; 3) $w=\dfrac{Q}{2\pi}\ln[(z-a)(z-\bar{a})]+c$（在 ∞ 处，有强度为 $-2Q$ 的源）；4) $w=\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{\bar{p}}{2\pi}\dfrac{1}{z-\bar{a}}+c$; 5) $w=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-a_k)+\dfrac{-\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-\bar{a}_k)\right]+\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{\bar{p}}{2\pi}\dfrac{1}{z-\bar{a}}+Vz+c$（在 ∞ 处，有强度为 $-\sum\limits_{k=1}^{n}Q_k$ 的源）；6) 流动仅当 $\Gamma=0$, $\operatorname{Im}p=0$ 时可能；于是，$w=\dfrac{p}{2\pi z}+\dfrac{Q}{2\pi}\ln z+c$. **1294**. 1) $w=\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln\dfrac{z-a}{R^2-\bar{a}z}+c$; 2) 若 $a\neq0$ $\left(a^*=\dfrac{R^2}{\bar{a}},\ p^*=-\dfrac{R^2}{\bar{a}^2}\bar{p}\right)$, $w=\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{p^*}{2\pi}\dfrac{1}{z-a^*}+c$; 若 $a=0$ $\left(p^*=\dfrac{\bar{p}}{R^2}\right)$, $w=\dfrac{p}{2\pi z}+\dfrac{p^*}{2\pi}z+c$. **1295**. 1) 若 $\sum\limits_{k=1}^{n}Q_k=0$, $w=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{Q_k}{2\pi}\cdot\ln[(z-a_k)(R^2-\bar{a}_kz)]+c$; 2) 若 $\sum\limits_{k=1}^{n}Q_k+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m}Q'_i=0$, $w=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{Q_k}{2\pi}\ln[(z-a_k)(R^2-\bar{a}_kz)]+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{Q'_i}{2\pi}\ln(z-a'_i)+c$. **1296**. 1) $w=\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln\dfrac{z-a}{R^2-\bar{a}z}+c$; 2) $w=\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}+\dfrac{p^*}{2\pi}\dfrac{1}{z-a^*}+c$ $\left(a^*=\dfrac{R^2}{\bar{a}},\ p^*=-\dfrac{R^2}{\bar{a}^2}p\right)$; 3) $w=Ve^{-i\alpha}z+\dfrac{R^2Ve^{i\alpha}}{z}+c$; 4) $w=Ve^{-i\alpha}z+\dfrac{R^2Ve^{i\alpha}}{z}+\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+c$. **1297**. $w=\dfrac{\Gamma}{2\pi i}\ln\dfrac{(z-ia)(az+i)}{(z+ia)(az-i)}+c$. **1298**. $w=\dfrac{Q}{2\pi}\ln(z^6+a^6)+c$. **1299**. $w=\dfrac{Q}{2\pi}\ln(z^2-1)+c$. **1300**. 1) $w=\dfrac{Q}{2\pi}\ln\dfrac{z^2-1}{z^2+1}+c$; 2) $w=\dfrac{Q}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{4}{z^4}\right)+c$. **1301**. $w=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-a_k)+\dfrac{\Gamma_k-iQ_k}{2\pi i}\cdot\ln(z-\bar{a}_k)\right]+\dfrac{p}{2\pi}\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{\bar{p}}{2\pi}\dfrac{1}{z-\bar{a}}+Ve^{-i\alpha}z+c$. 当 $\alpha=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时，流动是可能的（若 $\sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma_k\neq0$，则在 ∞ 处，涡旋强度为 $-2\sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma_k$）. **1302**. $w=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(z-a_k)+\dfrac{\Gamma_k-iQ_k}{2\pi i}\ln(R^2-\bar{a}_kz)\right]+Ve^{-i\alpha}z-\dfrac{R^2Ve^{i\alpha}}{z}+c$. 当 $\sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma_k=0$, $a=0$ 及 $p=-2\pi R^2Ve^{i\alpha}$ 时，流动是可能的. **1303**. 设 $t=f(z)$ 将 D 保形映射到单位圆 $|t|<1$ 上，则 $w=$

$\Phi[f(z)]$，其中 $\Phi(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(t-t_k)+\frac{-\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(1-\bar{t}_k t)\right]+c$，$t_k=f(a_k)$，条件 $\sum_{k=1}^{n}Q_k=0$ 必不可少. **1304**．设 $t=f(z)$ 将 D 保形映射到区域 $|t|>1$ 上，规范条件为 $f(\infty)=\infty$，$f'(\infty)>0$．若 $\sum_{k=1}^{n}Q_k=0$，则有 $w=\Phi[f(z)]$，其中 $\Phi(t)=\frac{Ve^{-i\alpha}}{f'(\infty)}t+\frac{Ve^{i\alpha}}{f'(\infty)t}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(t-t_k)+\frac{-\Gamma_k+iQ_k}{2\pi i}\ln(1-\bar{t}_k t)\right]+c$，$t_k=f(a_k)$.
1305．利用题 **1304** 的表示法，$w=\Phi[f(z)]$，其中 $\Phi(t)=\frac{Ve^{-i\alpha}}{f'(\infty)}t+\frac{Ve^{i\alpha}}{f'(\infty)t}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln t+c$．当 $\Gamma=0$ 时，$w(z)$ 将 C 的外部映射到 w-平面的实轴上线段 $\left[-\frac{2V}{f'(\infty)},\frac{2V}{f'(\infty)}\right]$ 的外部，且规范条件为 $w(\infty)=\infty$，$w'(\infty)=Ve^{-i\alpha}$。 **1306**．1) $w(z)=\frac{V}{a-b}[(az-b\sqrt{z^2-c^2})\cos\alpha+i(bz-a\sqrt{z^2-c^2})\sin\alpha]+$常数($V_\infty=Ve^{i\alpha}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$)；2) $w(z)=\frac{V}{a-b}\cdot[(az-b\sqrt{z^2-c^2})\cos\alpha+i(bz-a\sqrt{z^2-c^2})\sin\alpha]+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-c^2})+$常数． **1307**．1) $w(z)=V(z\cos\alpha-i\sqrt{z^2-c^2}\sin\alpha)+$常数 ($V_\infty=Ve^{i\alpha}$)；2) $w(z)=V(z\cos\alpha-i\sqrt{z^2-c^2}\sin\alpha)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z+\sqrt{z^2-c^2})+$常数，其中 $\Gamma=-2\pi cV\sin\alpha$($c$ 为出发点)． **1308**．设茹可夫斯基翼形是圆 $|\zeta-\zeta_0|=|1-\zeta_0|=R>1$ 通过映射 $z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$ 得到的，$\zeta_0=1-Re^{-i\beta}\left(0\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}\right)$． 则 $w(z)=\frac{VR}{2}\left(\frac{z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1}}{R}e^{-i\alpha}+\frac{Re^{i\alpha}}{z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1}}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-\zeta_0+\sqrt{z^2-1})+c$；且具有环流 Γ 与 $V_\infty=Ve^{i\alpha}$，其中 $\Gamma=-2\pi RV\sin(\alpha+\beta)$（按照茹可夫斯基-查普利根假设，从条件 $w'(1)=0$ 可确定 Γ）． **1309**．$w(z)=\sqrt{z-\frac{p}{2}}+c$ 为抛物线从外部的流线化；$w(z)=i\,\mathrm{ch}\frac{\sqrt{2z-p}}{2\sqrt{p}}$ 为抛物线从内部的流线化.
1310．$w(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}[(z+\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\beta}}e^{-\frac{i\pi\alpha}{2\beta}}-(z-\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\beta}}e^{\frac{i\pi\alpha}{2\beta}}]+$常数为双曲线的右枝从外部的流线化 ($\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}$，$\beta=\pi-\alpha$，$c=$

$\sqrt{a^2-b^2}$); $w(z)=\frac{i}{\sqrt{2}}[(z+\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\alpha}}+(z-\sqrt{z^2-c^2})^{\frac{\pi}{2\alpha}}]+$ 常数为双曲线的右枝从内部的流线化. **1311**. $w(z)$ 由方程 $z=e^{\frac{\pi w}{v}}+\frac{\pi w}{v}$ 确定(假定流函数在流线化的半直线上的值取为 $\pm v$). **1312**. $w(z)=\operatorname{Ar\,ch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$(假定流函数在流线化的半直线上的值取为 0 与 π). **1313**. 1) 具有周期 π 的流动;在点 $k\pi$(k 为整数)处, 有强度为 Q 的源;点 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ 为临界点. 在周期带形内的 ∞ 处, 速度为 $V_\infty=V(x\mp i\infty)=\pm\frac{Q}{2\pi}i$. 流线与等势线如图 120 所示; 2) 相同, 但代替源,在点 $k\pi$ 处有强度为 Γ 的涡旋,且 $V(x\pm i\infty)=\mp\frac{\Gamma}{2\pi}$. 欲构造场, 图 120 中所示的流线与等势线应互换. **1314**. 具有周期 π 的流动; 在点 $k\pi$ 处有矩为 p 的双重源; 速度 $V(x\pm i\infty)=0$. 流线如图 121 所示.

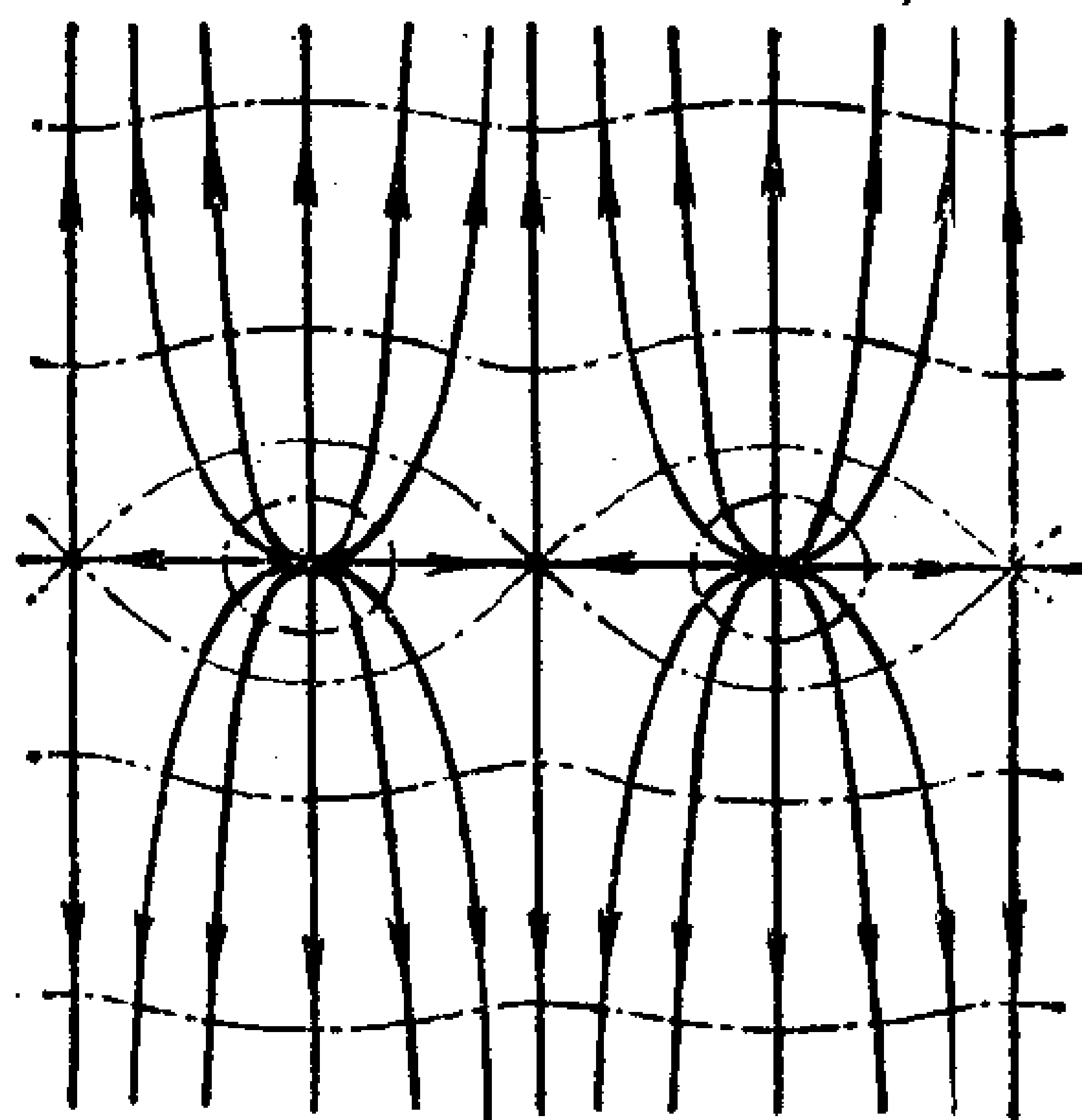


图 120

1315 $V_1=V-\frac{Q}{\omega}$ 时, 解为可能; $w=\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi(z-a)}{2\omega}+\frac{-\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln\sin\frac{\pi(z+\bar{a})}{2\omega}+i\left(V-\frac{Q}{2\omega}\right)z+c$.

1316 $w=\frac{p}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi(z-a)}{2\omega}-\frac{\bar{p}}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi(z+\bar{a})}{2\omega}+iVz+c$. **1317**. 设 $t=f(z)$ 将 S 保形映射到直线带形 S_t 上, 使得 Ω_1 与 Ω_2 变为 S_t 的无穷远点. 若存在非零导数 $f'(\Omega_1)$, $f'(\Omega_2)$, 速度 V_1, V_2 在无穷远点与 S

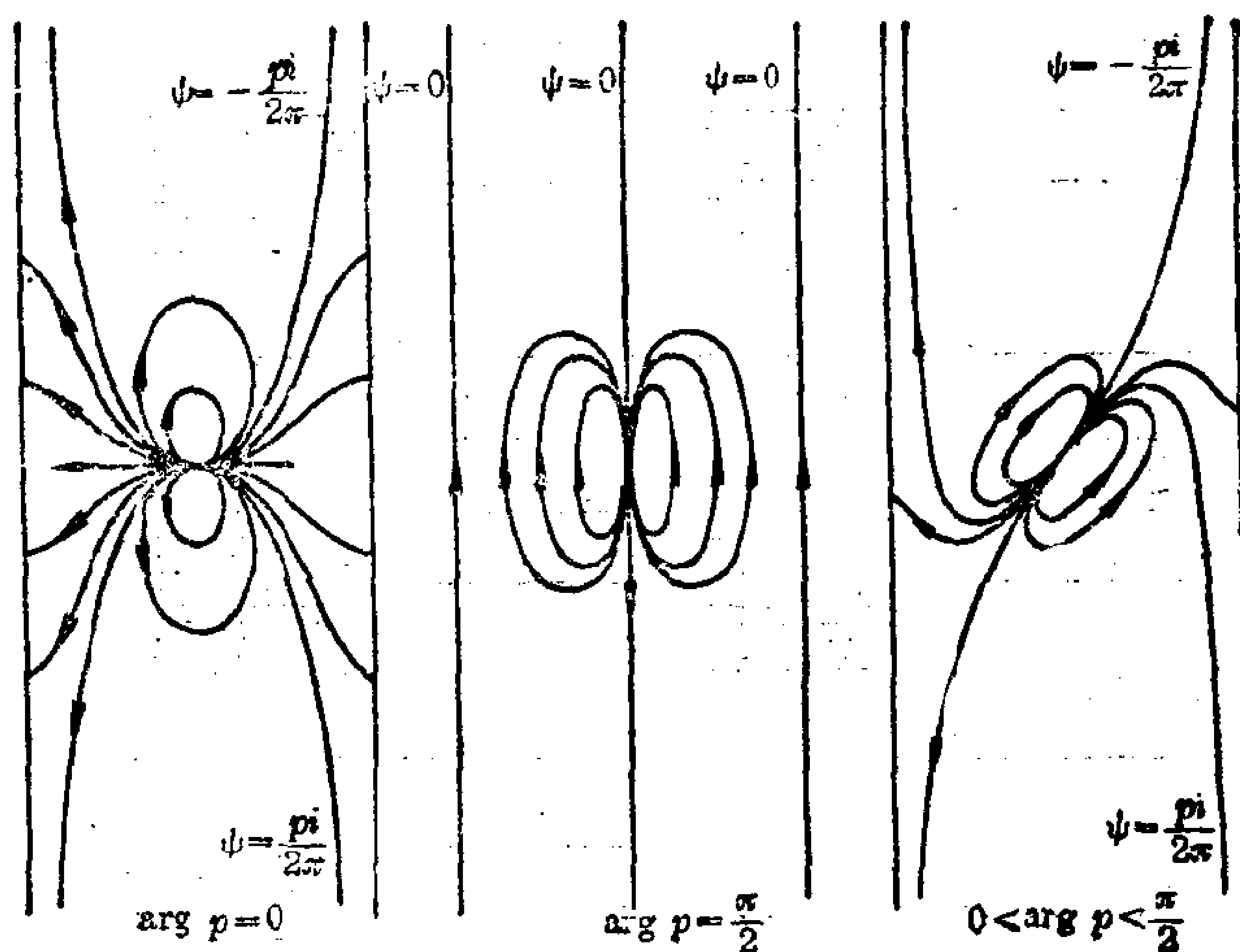


图 121

的边界相切，且其中一个已任意给定，则对于 S_t，问题可归结为题 **1315** ～**1316**；存在唯一的解. **1318**．充要条件为 M 与 C 都是实数．这时，直线 $\mathrm{Re}\,u=\pm\omega$ 也为等势线．图 122 表示了对于不同实数 C 的映射 $t=f(u)=\zeta(u)+Cu$．图 122 对应 $\omega>|\omega'|$ 的情形．按照题 **1264** 的解，有 $e_3<0<e_2<e_1$ 与 $k^2>\frac{1}{2}$； 2) $f(u)=\frac{M}{4\pi\omega}\frac{\theta_1'\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}+c$．对于 $\alpha=0$ 与 $M=2\pi$，映射 $t=f(u)=\zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u=\frac{1}{2\omega}\frac{\theta_1'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}$ 如图 123 所示$\left(注意：e_3<-\frac{\eta}{\omega}<e_2\right)$．**1322**．$f(u)=\frac{M}{2\pi}\zeta(u-\alpha)+\frac{N}{2\pi}\zeta(u-\beta)+Cu+c$．函数 $f(u)$ 为椭圆型的条件是 $f(u)=\frac{M}{2\pi}[\zeta(u-\alpha)-\zeta(u-\beta)]+c$．若 $\mathrm{Im}\,u=\pm\mathrm{Im}\,\omega'$ 为流线，则 M 必为实数，若 $\mathrm{Im}\,u=\pm\mathrm{Im}\,\omega'$ 为等势线，则 M 必为纯虚数．α 与 β 只能取值 0，$\omega_k(k=1,2,3)$．当 $\alpha=0$，

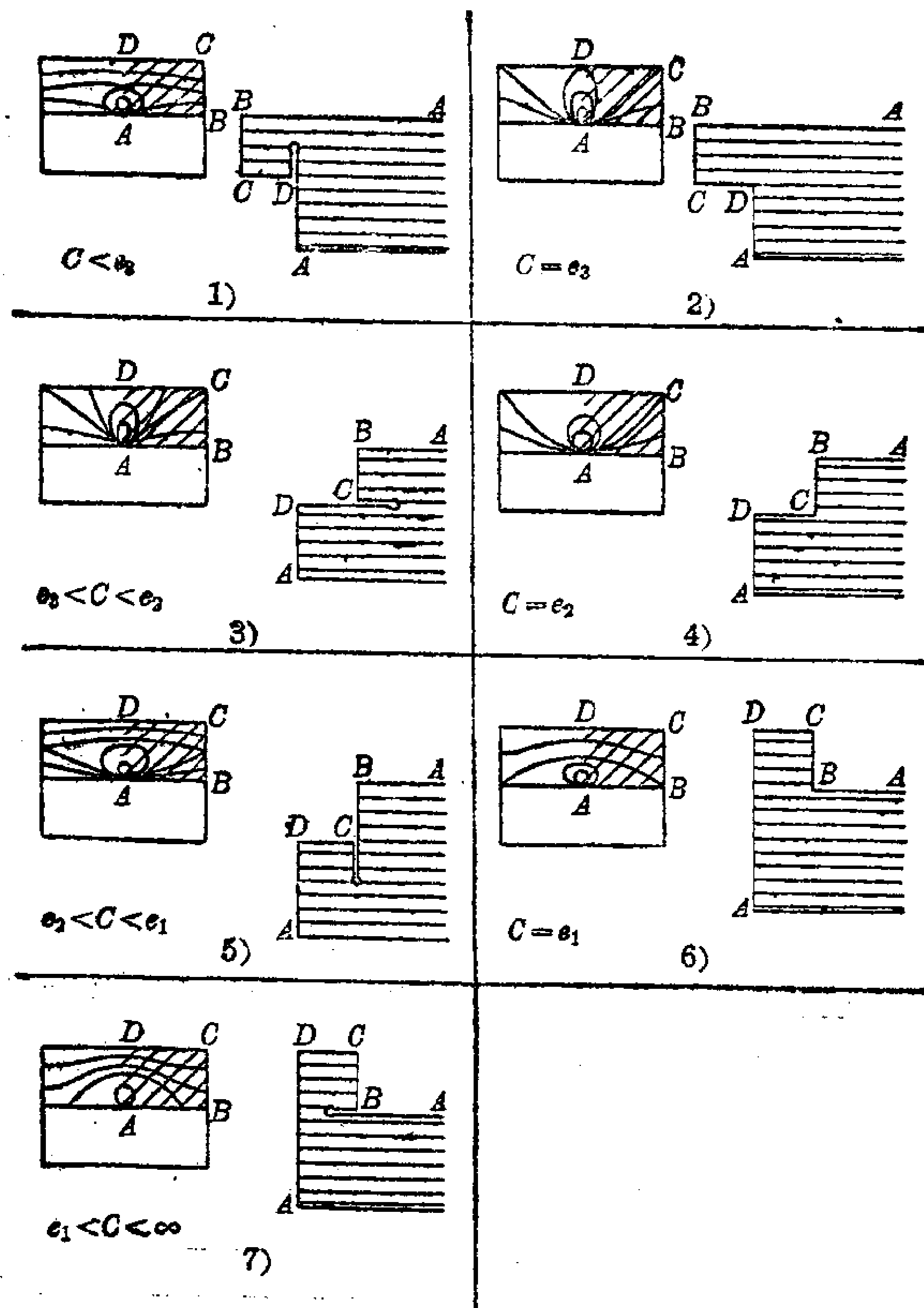


图 122

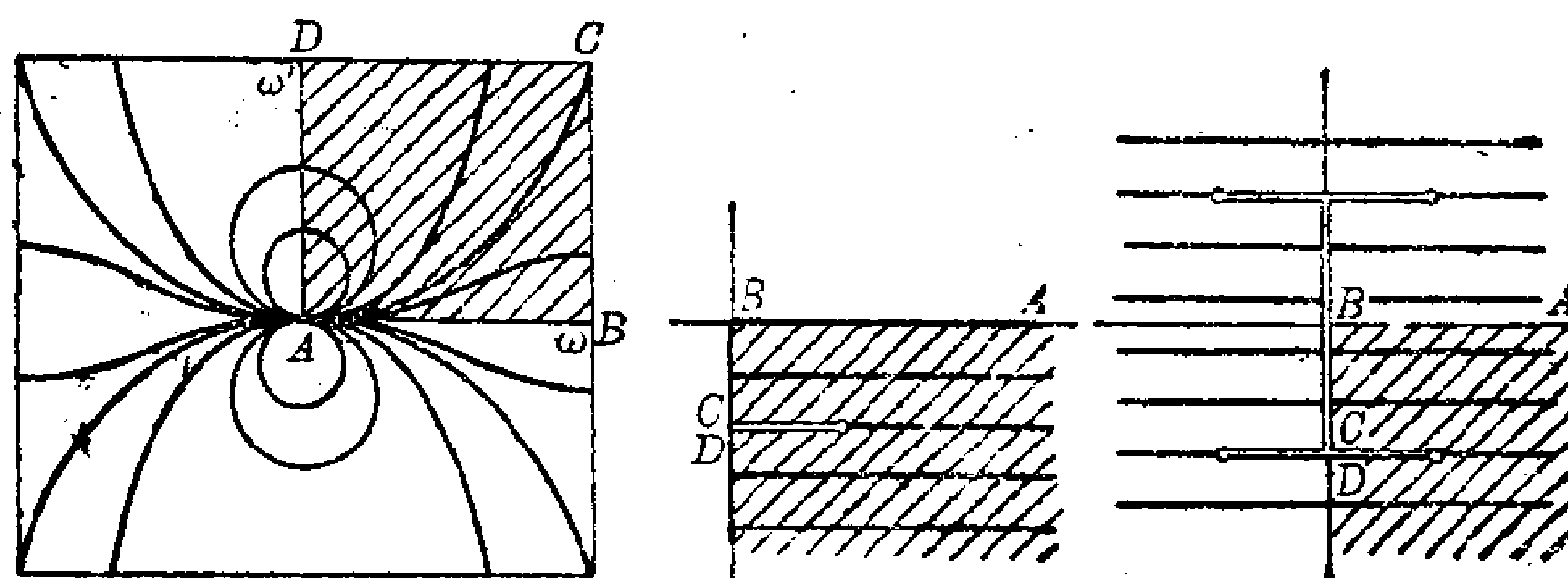


图 123

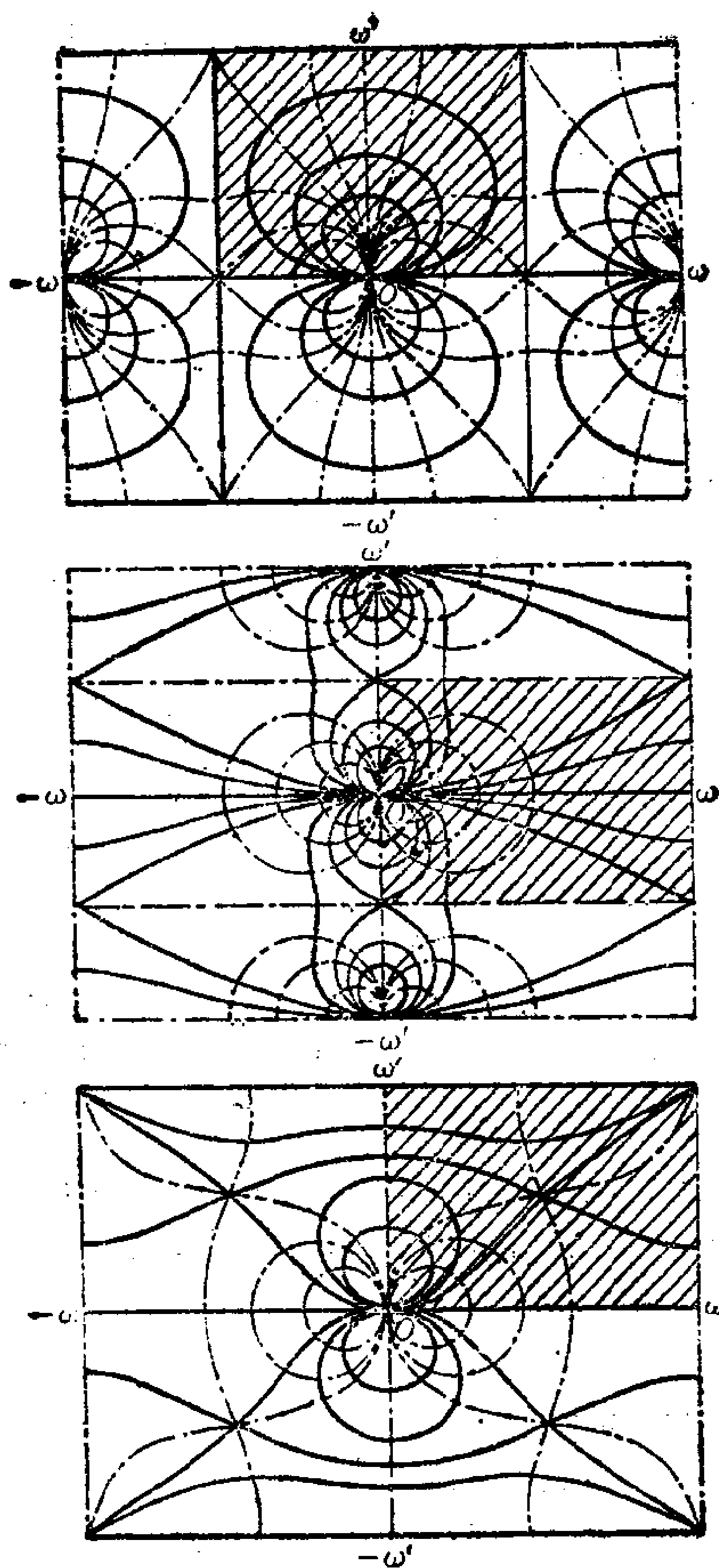


图 124

$\beta=\omega_k$, $M=2\pi$ 时, $f(u)=\zeta(u)-\zeta(u-\omega_k)=\eta_k-\dfrac{1}{2}\dfrac{\wp'(u)}{\wp(u)-e_k}=\eta_k+\dfrac{\sigma_i(u)\sigma_j(u)}{\sigma(u)\sigma_k(u)}$($i$, j, k 为 1, 2, 3 的一个排列). 点 $u\equiv\dfrac{\omega_k}{2}(\mathrm{mod}\,\omega,\ \omega')$ 为临界点, 即在这些点处, $f'(u)=0$. 主要的映射如图 124 所示. 图中绘出的矩形被映射到一个由一条水平直线所界的半平面上 ($k=1$), 一个

由铅垂直线所界的半平面上 ($k=2$)，以及一个沿着一条对应于矩形上的虚线的水平半直线而联接起来的双叶象限上 ($k=3$)．这些映射可以按照对称原理而进行延拓．

1323．流动的周期为 $4\boldsymbol{K}$ 与 $2i\boldsymbol{K}'$，双重源为 $2m\boldsymbol{K}+(2n+1)i\boldsymbol{K}'$，具有矩 $2\pi\left(-\frac{1}{k}\right)^m$，临界点为 $(2m+1)\boldsymbol{K}+ni\boldsymbol{K}'$（$m$、$n$ 为整数）．映射如图 125 所示．**1324**．流动的周期为 $4\boldsymbol{K}$ 与 $2\boldsymbol{K}+2i\boldsymbol{K}'$，双重源与题 **1323** 中相同，具有矩 $2\pi\frac{(-1)^{n+m}}{ik}$，临界点为 $2m\boldsymbol{K}+2ni\boldsymbol{K}'$ 与 $(2m+1)\boldsymbol{K}+(2n+1)i\boldsymbol{K}'$（图 126）．**1325**．流动的周期为 $2\boldsymbol{K}$ 与 $4i\boldsymbol{K}'$，双重源与题 **1323** 中相同，具有矩 $2\pi(-1)^{n+m}i$，临界点为 $m\boldsymbol{K}+2ni\boldsymbol{K}'$．主要的映射如图 127 所示．**1326**．$f(u)=\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln\frac{\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u-\beta)}+Cu+c$．特别，对于 $\alpha=0,\ \omega,\ \omega+\omega'$ 与 $\beta=\omega'$，去掉附加的常数与因子 $\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}$，改变 C 并变换 σ-函数，可分别得到 $\ln\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}+Cu$，$\ln\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}+Cu$，$\ln\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}+Cu$．若 $f(u+2\omega)=f(u)$，则 $f(u)=\frac{\Gamma+iQ}{2\pi i}\ln\frac{\theta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-\beta}{2\omega}\right)}+c$．**1327**．1)，2)，3) 双周期的流动，在函数 $\operatorname{sn}u$，$\operatorname{cn}u$，$\operatorname{dn}u$ 的零点与极点处有强度为 2π 与 -2π 的源（图 128）．**1328**．双周期流动，在 $\wp(u)$ 的零点处有四重源（图 129）．

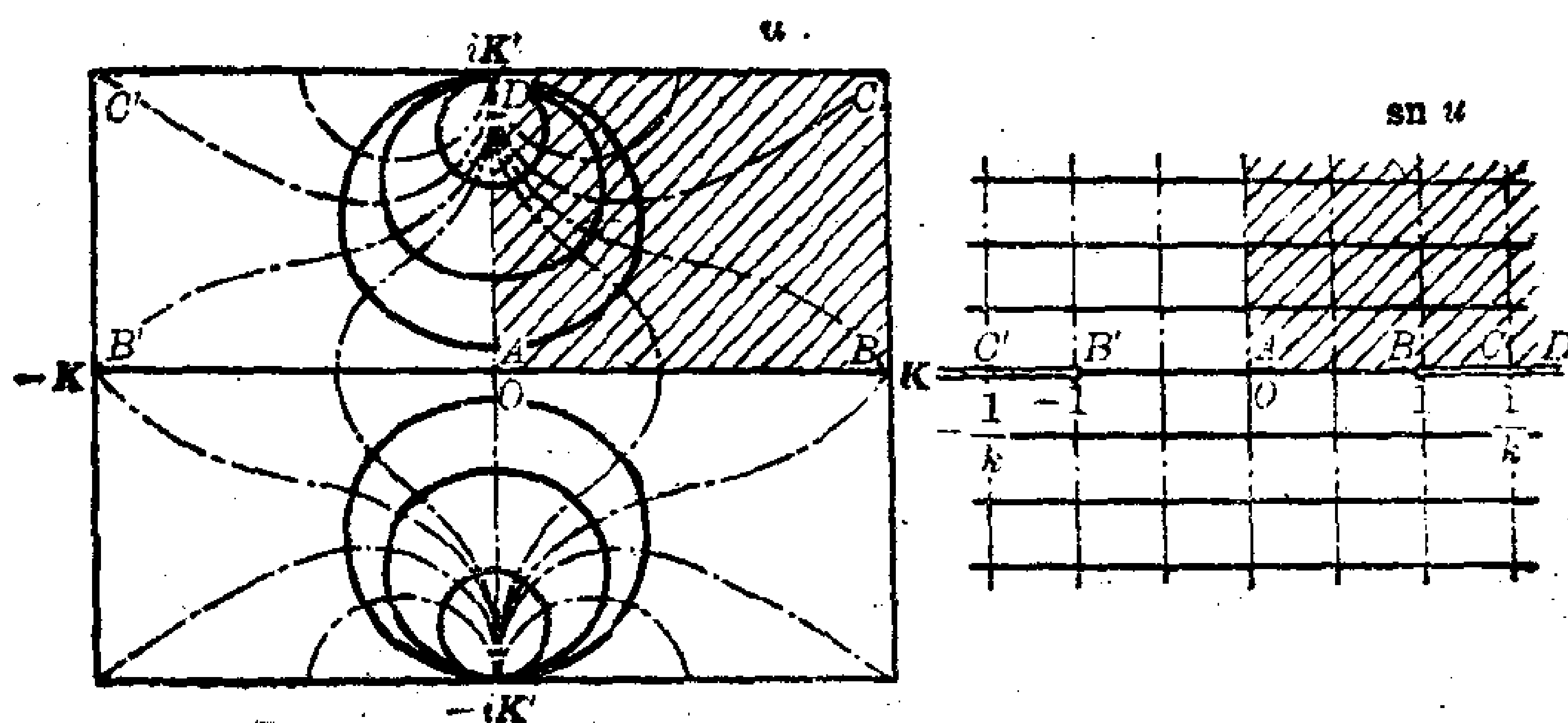


图 125

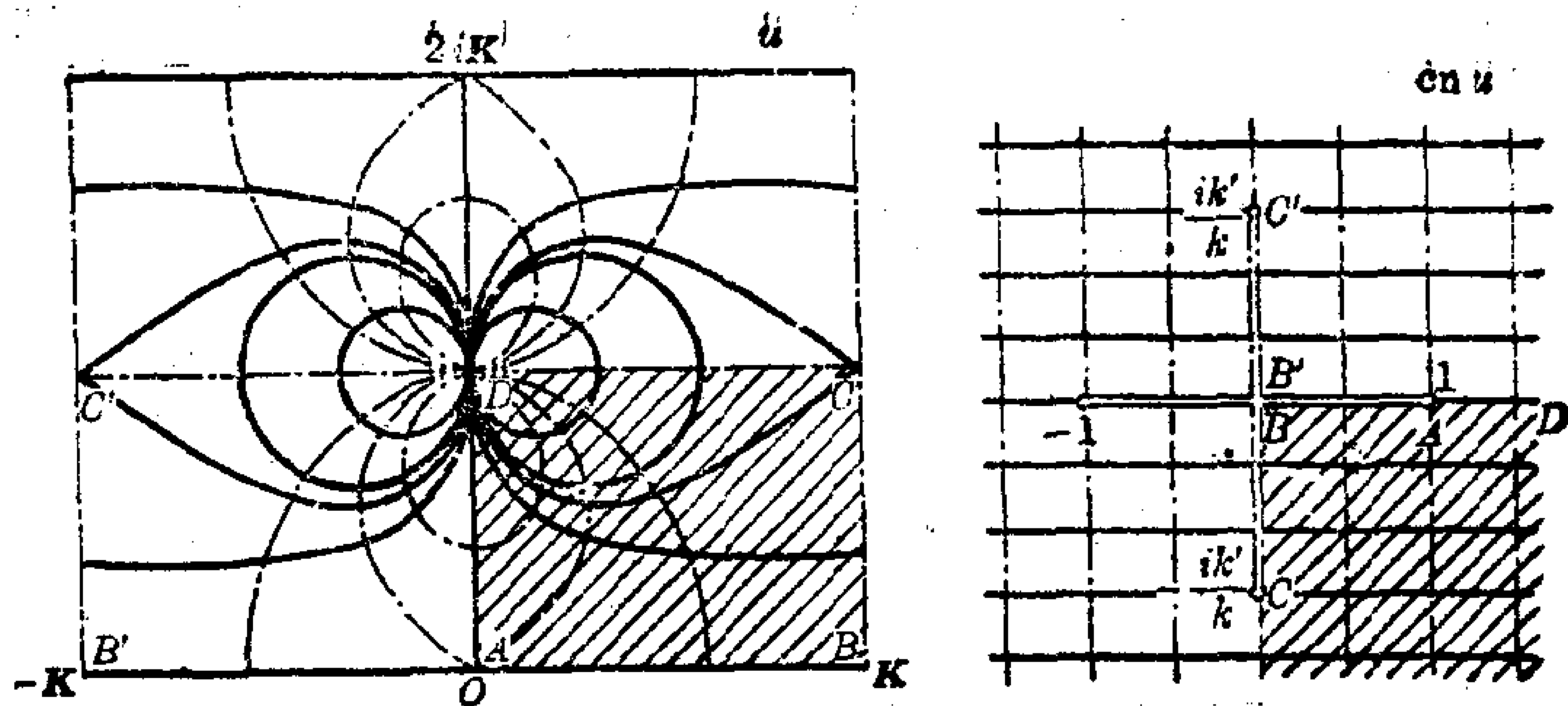


图 126

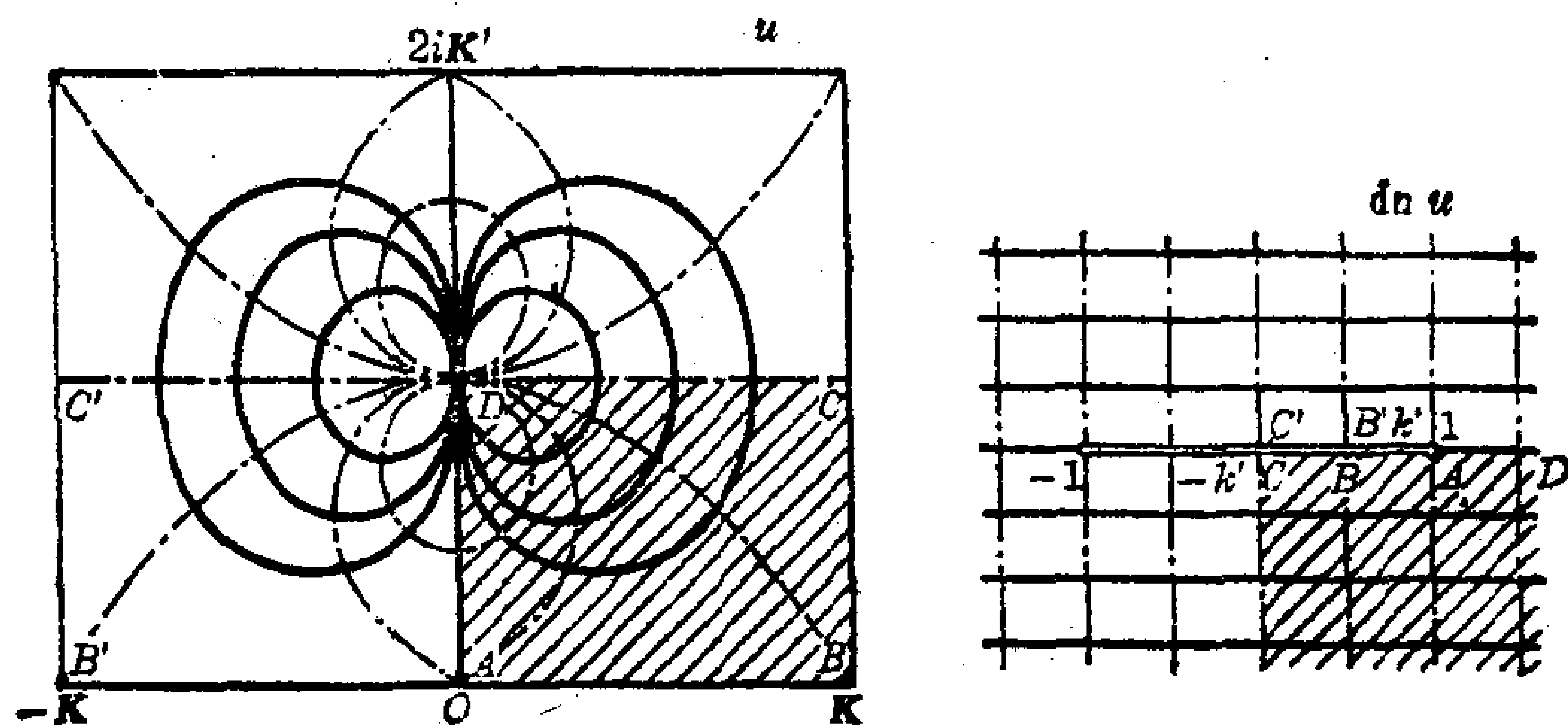


图 127

1329. 周期为 2ω 的周期流动(速度的周期), 在 $\theta_k(v)$ 的零点处有强度为 2π 的源(图 130, 1 为关于 θ_4, 向右移位 $\frac{1}{2}$ 则为关于 θ_3; 图 130, 2 为关于 θ_1, 向右移位 $\frac{1}{2}$ 则为关于 θ_2). **1330**. 1) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z+c$; 2) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln t(z)+c$, 其中 $t(z)$ 将区域 D 映射到圆环上, 使得边界围道的回转方向不变; 3) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z-z_1}{z-z_2}+c$, 其中 z_1, z_2 关于每一个圆都互相对称(即为正交于两已知圆的圆与两已知圆圆心连线的交点), 点 z_1 位于具有环流 Γ 的圆的内部; 4) $f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln t(z)+$

c，其中函数 $t(z)$ 将区域 D 映射到圆环上，且保持具有环流 Γ 的圈道的回转方向.

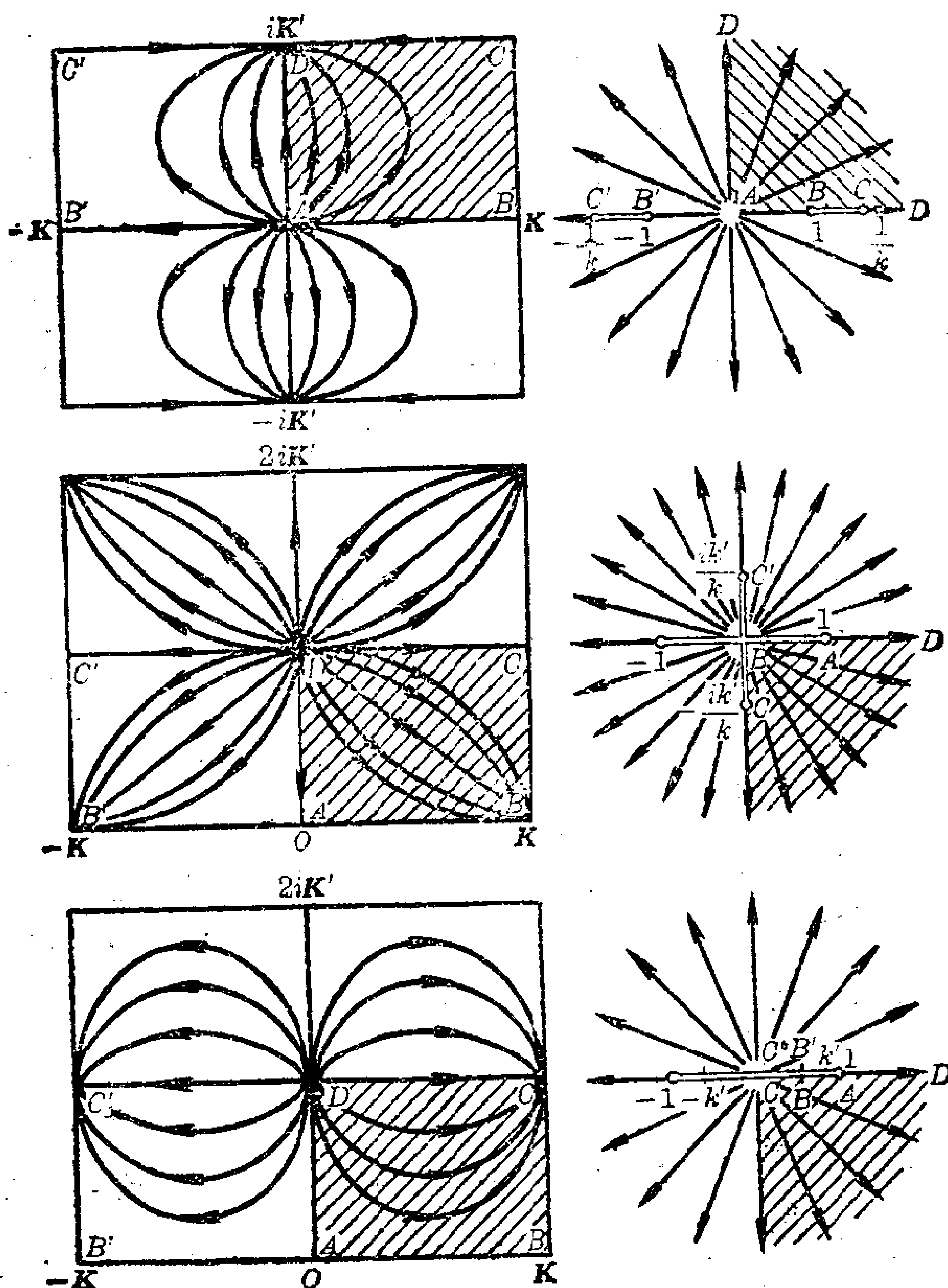


图 128

1331. $f(z)=\Phi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$， 其中 $\Phi(u)=-\frac{1}{4\pi^2 a}\left[p\frac{\theta_1'\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}-\bar{p}\frac{\theta_1'\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)}\right]+c$， $\alpha=\frac{\omega}{\pi i}\ln a$. 函数 $f(z)$ 将 R 映射到两条间隔距

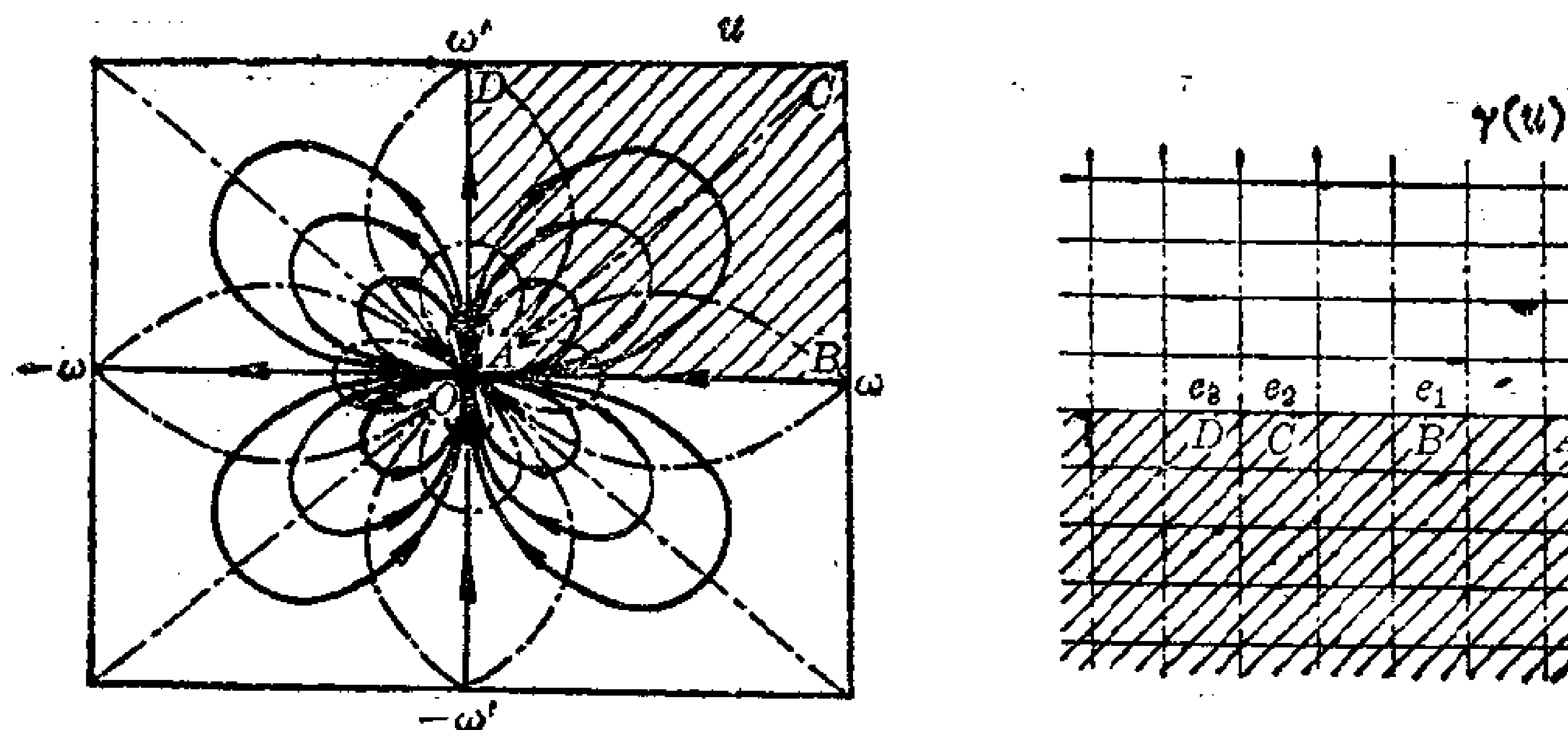


图 129

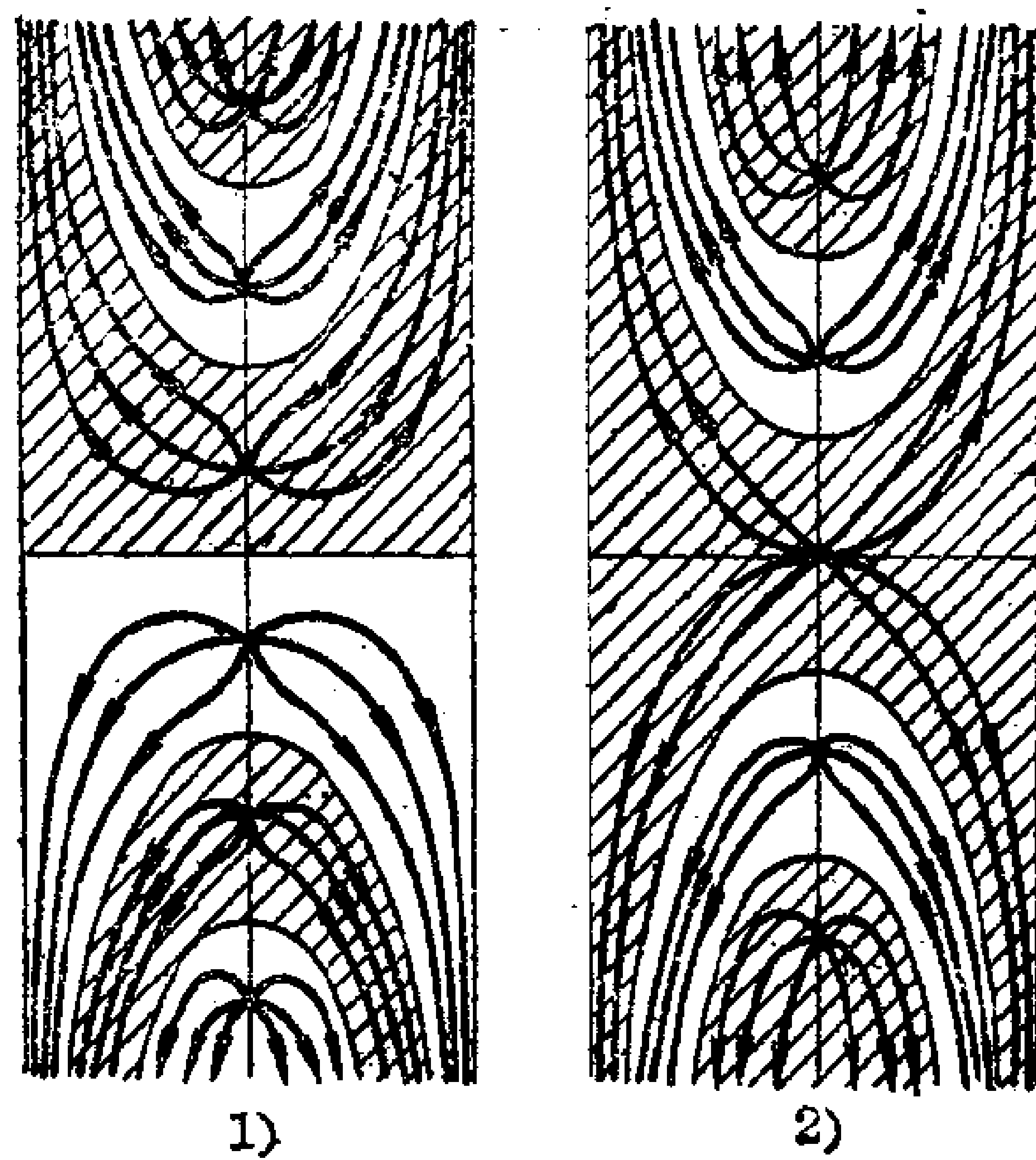


图 130

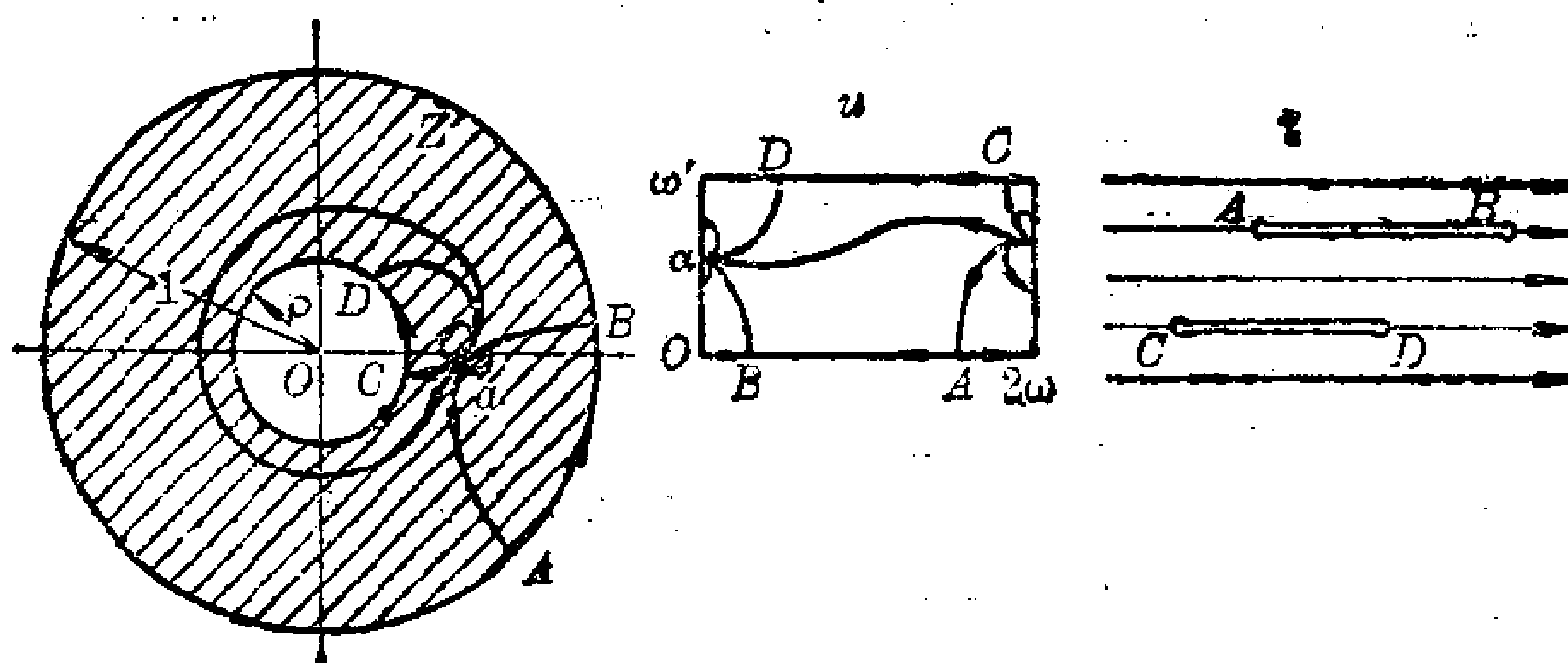


图 131

离为 $\frac{|\mathrm{Re}\, ip|}{2\pi a}$ 的平行线段的外部(图 131). 两线段的端点由条件 $\Phi'(u)=0$ 确定. **1332**. $f(z)=\Phi[u(z)]$, 其中

$$\Phi(u)=\frac{V}{2\omega}\left[ke^{i\alpha}\frac{\theta_1'\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}+\bar{k}e^{-i\alpha}\frac{\theta_1'\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}\right]+c,\ u(z)=a+\frac{k}{z}+$$

$\cdots$为将区域 D 映射到矩形上的函数.

1333. $f(z)=\Phi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$, 其中

$$\Phi(u)=A\wp(u)+\frac{B}{2\omega}\frac{\theta_1'\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}+c,$$

$$A=-\frac{c_{-2}\omega^2}{\pi^2},\ B=\frac{i\omega}{\pi}(c_{-2}-c_{-1}).$$

若 c_{-2} 为实数而差 $c_{-2}-c_{-1}$ 为纯虚数,则问题是可解的. 若 $A\neq 0$,则函数 $f(z)$ 将 R 映射到一条水平射线与一条平行于该射线且间隔距离为 $\frac{|c_{-2}-c_{-1}|}{2}$ 的直线段的外部. 直线段的端点与射线的始点由条件 $\Phi'(u)=0$ 确定(图 132, 1)(图 132, 2 说明 $B=0$ 的情形). 但是, 若 $A=0$,即仅有一个双重源,则 R 被映射到半平面上,该半平面由一条水平直线所界,且沿着一条与该水平直线距离为 $\frac{|c_{-1}|}{2}$ 的水平直线段有一截口(图 132, 3).

1334. 1) 若 $\Gamma_1-\Gamma_2=\Gamma$, 则有解; 在此条件下, $f(z)=\Phi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$, 其中 $\Phi(u)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{\theta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)}+\frac{\Gamma_2}{2\omega}u+c,\ \alpha=\frac{\omega}{\pi i}\ln a$ (应该记住, 当 u 从 0 变化到 2ω 时, $\ln\frac{\theta_1\left(\frac{u-\alpha}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u+\alpha}{2\omega}\right)}$ 的增量等于 $2\pi i$, 而当 u 从 $2\omega+i\omega'$ 变化到 $i\omega'$ 时,增量为 0). 流动的临界点由方程

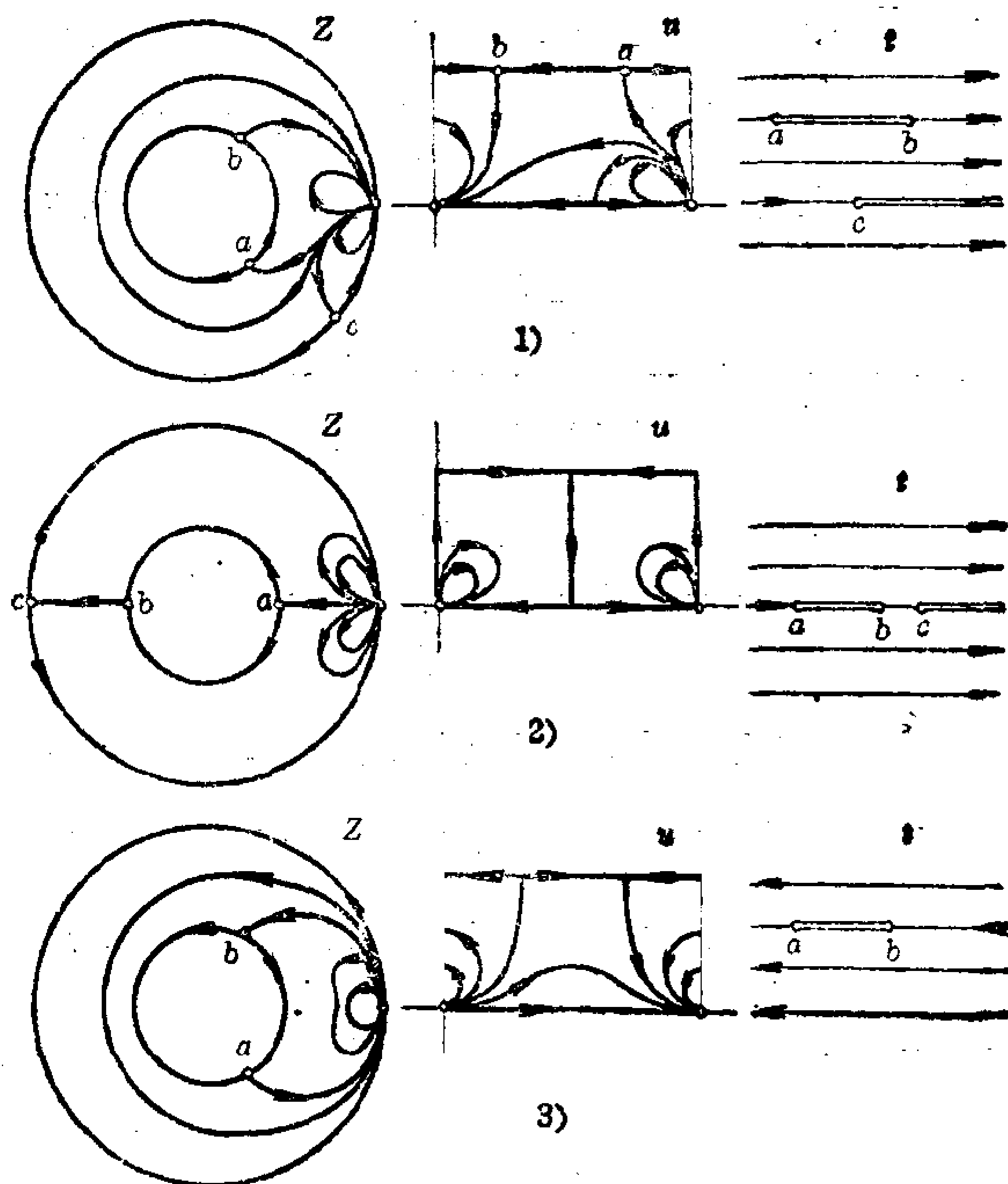


图 132

$$\mathfrak{p}(u)=\mathfrak{p}(\alpha)+\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}'(\alpha)}{\left[\zeta(\alpha)-\frac{\eta}{\omega}\alpha\right]+\lambda\left[\zeta(\omega')-\frac{\eta}{\omega}\omega'\right]}$$ 确定，其中 $\lambda=\frac{\Gamma_2}{\Gamma}$,

且位于以 $(0,\ \omega,\ \omega+\omega',\ \omega')$ 为顶点的矩形及与其对称的矩形的边上. 在 $\Gamma_2=0$ 时，函数 $\mathfrak{Z}(z)$ 将 R 映射到一个沿一段圆弧截开的圆上（图 133; $\Gamma>0$）. 在 $\Gamma_2=-\Gamma_1=-\frac{\Gamma}{2}$ 时，函数 $\mathfrak{Z}(z)$ 将 R 映射到双叶的区域上，该区域由如下方法构成：将圆的外部 $|\mathfrak{Z}|>1$ 与 $|\mathfrak{Z}|>\frac{\rho}{a^2}$ 沿着从 $-\infty$ 到 $\mathfrak{Z}_0=-e^{\frac{4\pi\psi_c}{\Gamma}}$ 的截口联接起来，其中 ψ_0 为 ψ 在临界点的值. 函数 $s(\mathfrak{Z})$ 将这个双叶区域映射到两条双纽线的外部，而 $f(z)=-\frac{\Gamma}{4\pi i}\cdot\ln[(s(z)-s_0)(s(z)+s_0)]$（图 134, $\Gamma>0$, $a^2<\rho$; t-平面内的半带形应

沿着公共的截口联接起来）．在一般情形中，在 u-平面内的矩形下底边上，$\psi=0$，而 φ 从 $-\frac{\Gamma}{2}$ 变化到 $\frac{\Gamma}{2}+\Gamma_2$；在上底边上，$\psi=\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{1}{a}+\frac{\Gamma_2}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho}$，而 φ 从 0 变化到 $\Gamma_2(\Gamma>0)$．2) $f(z)=\Phi[u(z)]$，其中

$$\Phi(u)=\frac{V}{2\omega}\left[ke^{i\alpha}\frac{\theta_1'\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}+\bar{k}e^{-i\alpha}\frac{\theta_1'\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}\right]$$

$$+\frac{\Gamma_1-\Gamma_2}{2\pi i}\ln\frac{\theta_1\left(\frac{u-a}{2\omega}\right)}{\theta_1\left(\frac{u-\bar{a}}{2\omega}\right)}+\frac{\Gamma_2}{2\omega}u+C,$$

而 $u(z)=a+\frac{k}{z}+\cdots$ 将区域 D 映射到圆环域上． **1335**．$u=\alpha x-\beta y$，$v=\beta x+\alpha y$，$\boldsymbol{E}=-i\bar{c}$，偶极子 $(\infty;\ -i\bar{c})$． **1336**．$u=2q\varphi$，$v=2q\ln\frac{1}{r}$；$\boldsymbol{E}=\frac{2q}{r}e^{i\varphi}$；点电荷 $(a;\ 2q)$ 与 $(\infty;\ -2q)$． **1337**．$u=2q\arg\frac{z-b}{z-a}$，$v=2q\ln\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$；$\boldsymbol{E}=\frac{2q(\bar{b}-\bar{a})}{(\bar{z}-\bar{a})(\bar{z}-\bar{b})}$；点电荷 $(b;\ 2q)$ 与 $(a;\ -2q)$．

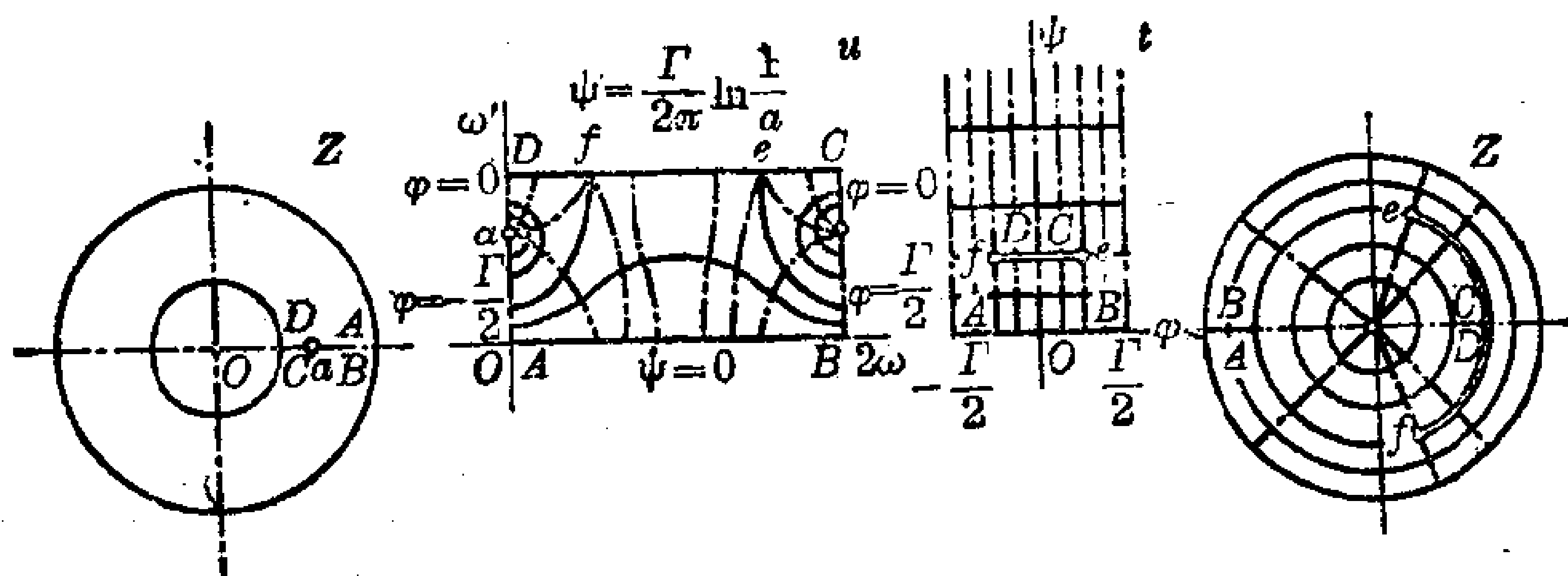


图 133

1338．$u=-2q\arg(z^2-a^2)$，$v=2q\ln|z^2-a^2|$；$\boldsymbol{E}=-\frac{4q\bar{z}}{\bar{z}^2-\bar{a}^2}$；点电荷 $(a;\ -2q)$，$(-a;\ -2q)$ 与 $(\infty;\ 4q)$（参见图 113）． **1339**．$u=\frac{|p|}{r}\sin(\varphi-\alpha)$，$v=\frac{|p|}{r}\cos(\varphi-\alpha)$；$\boldsymbol{E}=\frac{|p|}{r^2}e^{i(2\varphi-\alpha)}$；偶极子 $(0;\ p)$（图 135）． **1340**．$u=\left(r\pm\frac{R^2}{r}\right)\cos\varphi$，$v=\left(r\pm\frac{R^2}{r}\right)\sin\varphi$；$\boldsymbol{E}=-i\Big(1\mp$

$\left.\frac{R^2}{r^2}e^{2i\varphi}\right)$；偶极子(0; $\mp iR^2$)与(∞; $-i$)(参见图 110, 111)．**1341**．$u=-py+2q\varphi$，$v=px+2q\ln\frac{1}{r}$；$\boldsymbol{E}=-p+\frac{2q}{r}e^{i\varphi}$；点电荷 (0; 2$q$)与(∞; $-2q$)；偶极子(∞; p)(参见图 118)．**1342**．$u=-py+\sum_{k=1}^{n}2q_k\varphi_k$，$v=px+\sum_{k=1}^{n}2q_k\ln\frac{1}{r_k}$；$\boldsymbol{E}=-p+\sum_{k=1}^{n}\frac{2q_k}{r_k}e^{i\varphi_k}$，其中 $z-a_k=r_ke^{i\varphi_k}$；点源 (a_k; $2q_k$)；偶极子(∞; p)(参见图 136)．**1343**．1) 点电荷的大小保持不变；偶极矩的变化规律与题 **1289** 中相同；2) 电荷的符号相反；越过流线延拓时，偶极矩的变化规律与题 **1291** 中相同．**1344**．$v=2qg(z, a)$．

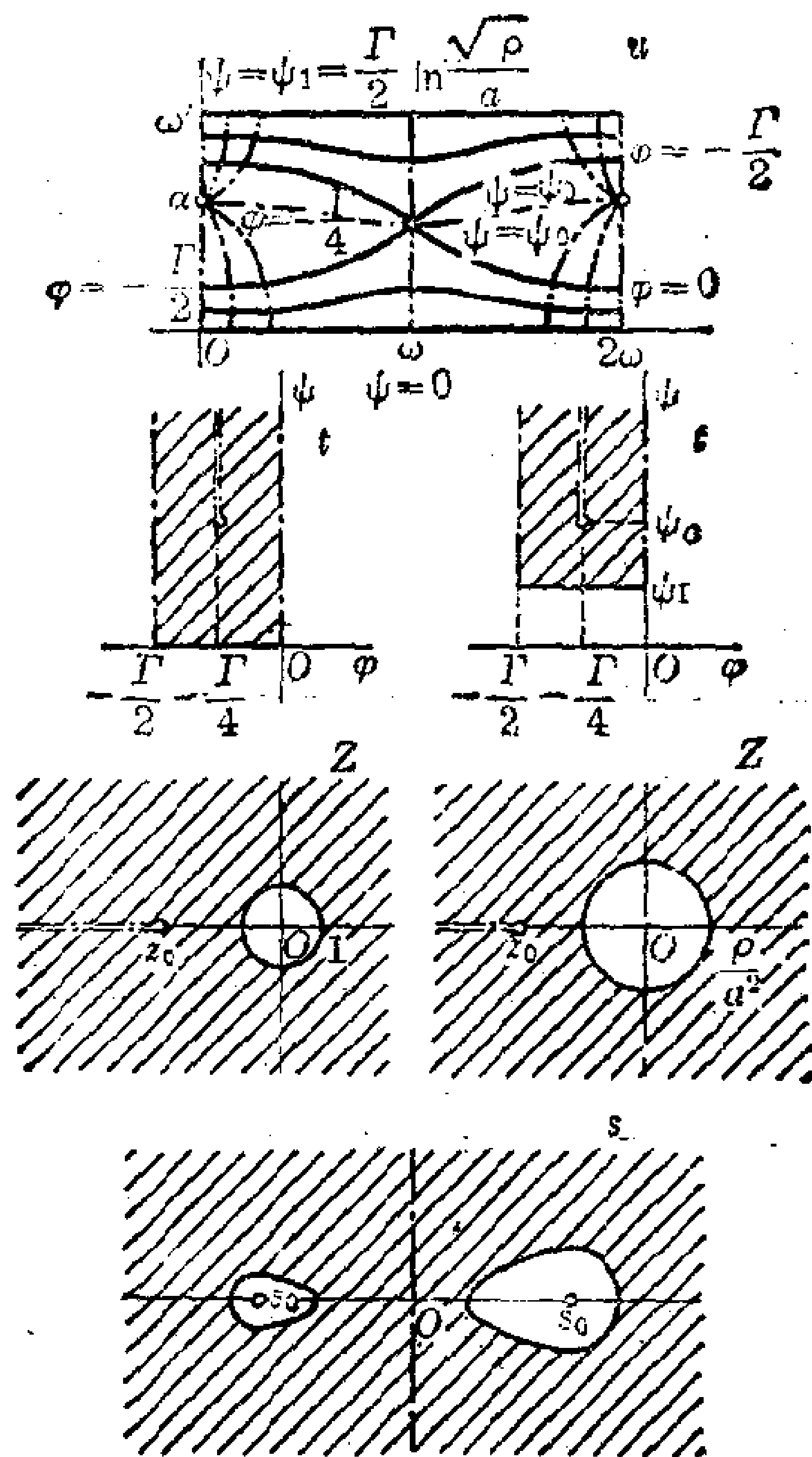


图 134

1345　$w=2qi\ln\frac{z-\bar{z}_0}{z-z_0}+c$．**1346**．1) 与 2) $w=2qi\ln\frac{R^2-\bar{z}_0z}{R(z-z_0)}+c$．**1347**．$w=2qi\ln\frac{1}{f(z)}+$常数，其中 $f(z)=\frac{z-\sqrt{z^2-c^2}}{a-b}$，$c^2=a^2$

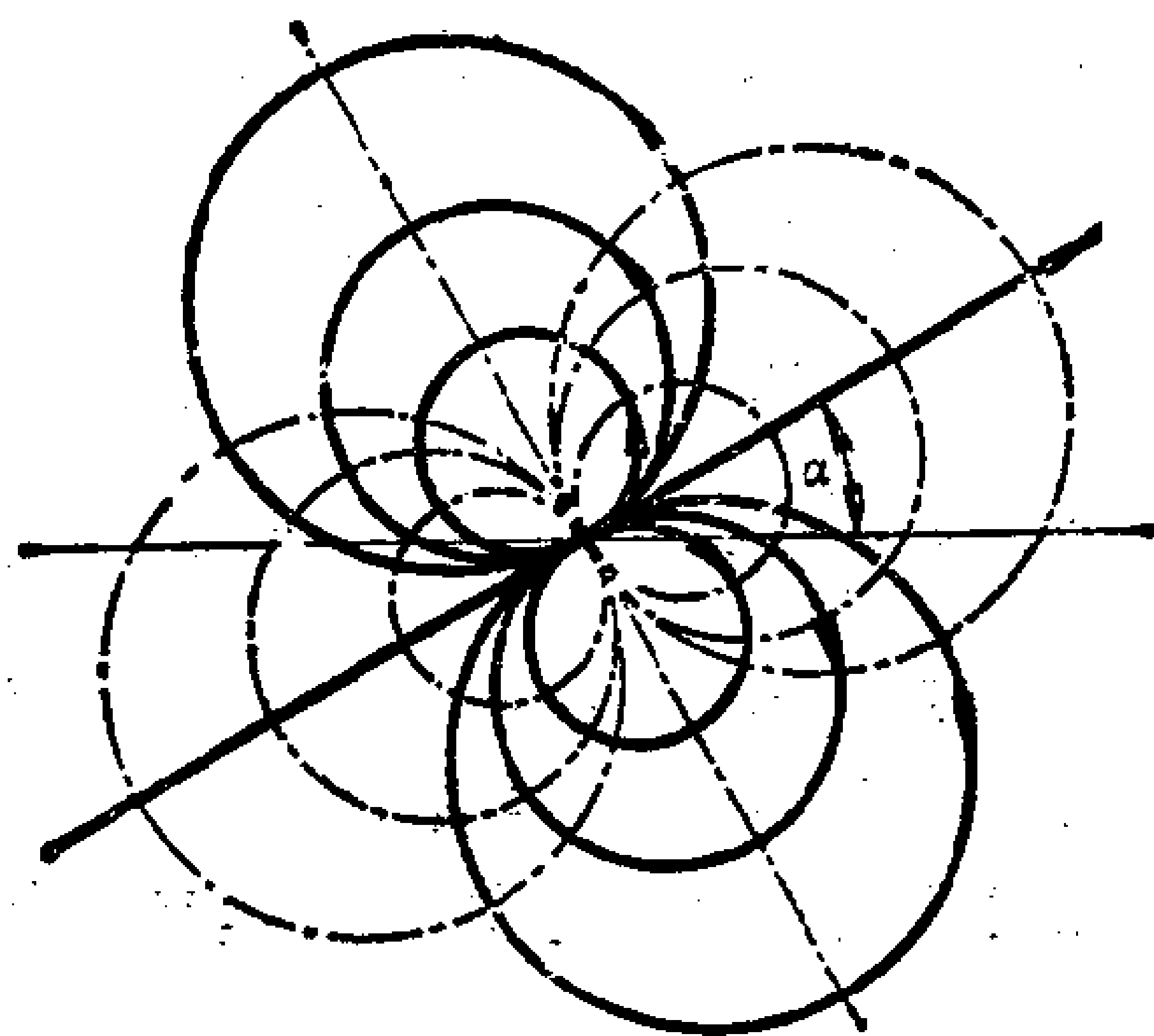


图 135

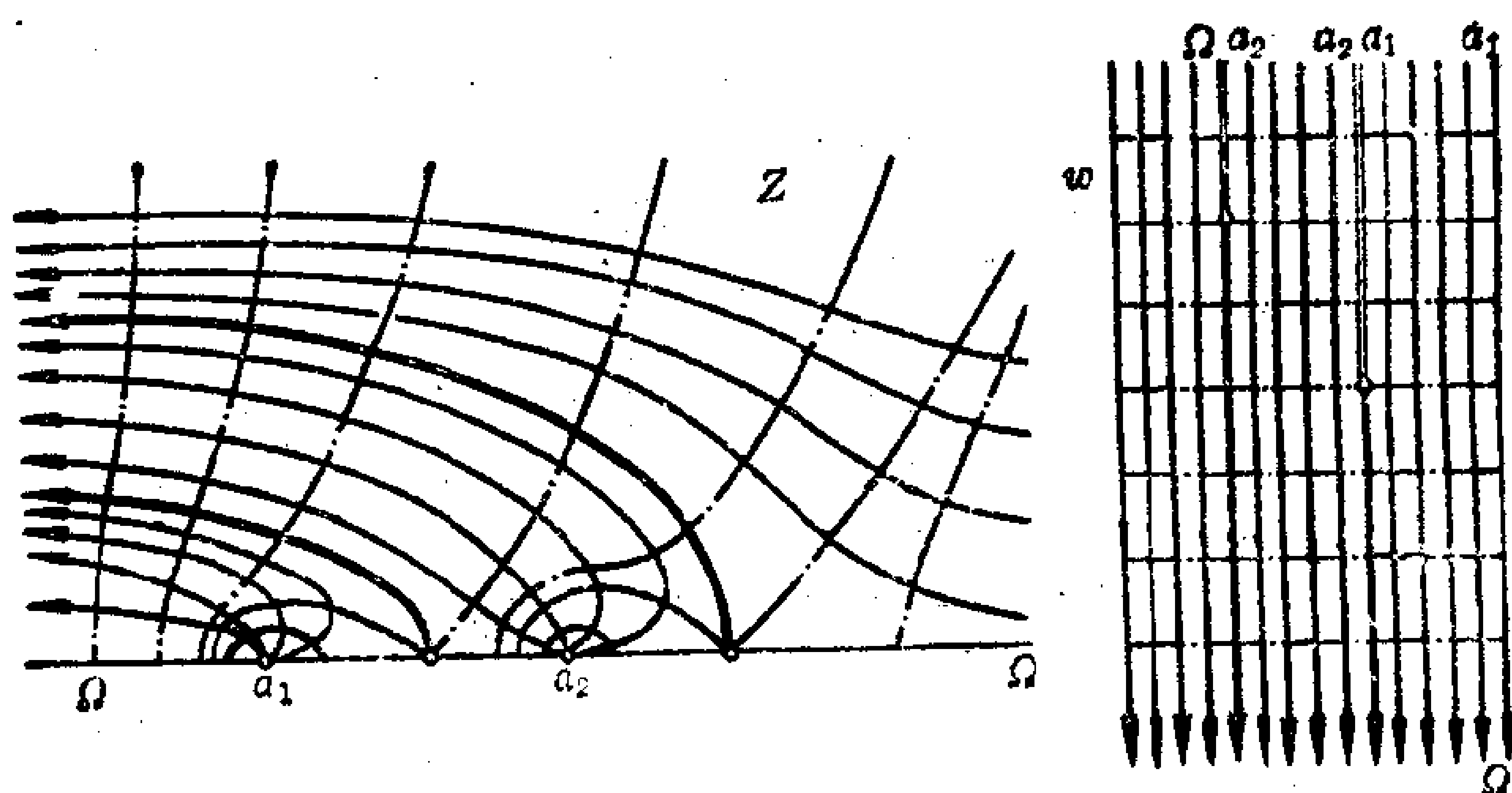


图 136

$-b^2$. **1348**. $w=2qi\ln\dfrac{1}{f(z)}+c$, 其中 $f(z)=\dfrac{z-\sqrt{z^2-R^2}}{R}$. **1349**. $w=2qi\ln\dfrac{1}{f(z)}$, 其中 $t=f(z)$ 由方程 $z=\dfrac{2d}{B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)}\displaystyle\int_t^1\dfrac{\sqrt{1-t^4}}{t^2}dt+\dfrac{d}{2}$ 确定(参见题 **1236** $n=4$ 的情形及题 **1271**). **1350**. $w=2qi\ln\dfrac{1}{f(z)}+c$, 其中 $f(z)=\dfrac{1-\operatorname{cn}\left(\dfrac{\mathbf{K}}{a}z,\ k\right)}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{\mathbf{K}}{a}z,\ k\right)}$, k 由方程 $\dfrac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}=\dfrac{b}{a}$ 确定(参见题 **1268**).

1351. $w=2qi\ln\dfrac{1}{f(z)}+c$, 其中 $f(z)=\dfrac{\theta_1\left(\dfrac{z-z_0}{4a}\right)\theta_1\left(\dfrac{z-z_2}{4a}\right)}{\theta_1\left(\dfrac{z-z_1}{4a}\right)\theta_1\left(\dfrac{z-z_3}{4a}\right)}$, $\omega=$

$2a$, $\omega'=2ib$, $z_1=(4a-x_0)+iy_0$, $z_2=(4a-x_0)+i(4b-y_0)$, $z_3=x_0+i(4b-y_0)$. **1352**. $w=\frac{pi}{z-a}+\frac{p^*i}{z-a^*}+c\left(a\neq 0, a^*=\frac{R^2}{\bar{a}}, p^*=\frac{R^2\bar{p}}{\bar{a}^2}\right)$. $w=\frac{pi}{z}-\frac{\bar{p}i}{R^2}z+c\ (a=0)$, c 为实数. 试与题 **1294**(2) 比较. **1353**. $w=\frac{pi}{z-a}+\frac{p^*i}{z-a^*}+c\left(a\neq\infty,\ a^*=\frac{R^2}{\bar{a}},\ p^*=\frac{R^2}{\bar{a}^2}\bar{p}\right)$, $w=\frac{pi}{z}-\frac{\bar{p}i}{R^2}z+c(a=\infty)$. 参见题 **1296**(2). **1354**. $w=\rho(z\cos\alpha+i\sin\alpha\sqrt{z^2-R^2})$ + 常数. **1355**. $w=\frac{\rho}{a-b}[(az-b\sqrt{z^2-c^2})\cos\alpha-i(bz-a\sqrt{z^2-c^2})\cdot\sin\alpha]$ + 常数, 其中 $c^2=a^2-b^2$. **1356**. $w=\frac{2K\rho}{a\,\mathrm{sn}\,u}(\cos\alpha+i\sin\alpha\,\mathrm{cn}\,u)$, 其中 $u=\frac{K}{a}z$, $\frac{K'}{K}=\frac{b}{a}$(参见题 **1350**). **1357**. 1) 若 $pi=\rho e^{i\alpha}$, 则 $f(z)=\rho t'(a)\left\{\left[\frac{1}{t(z)}+t(z)\right]\cos\alpha+i\left[\frac{1}{t(z)}-t(z)\right]\sin\alpha\right\}+c$; 2) $f(z)=pit(z)-\frac{R^2\bar{p}i}{t(z)}+c=\rho\left\{\left[t(z)+\frac{R^2}{t(z)}\right]\cos\alpha+i\left[t(z)-\frac{R^2}{t(z)}\right]\sin\alpha\right\}+c$, 其中 $pi=\rho e^{i\alpha}$. 方括号内的函数实现了 D 到一条水平线段(或铅垂线段) 外部的规范化的保形映射. **1358**. $w=\sum_{k=1}^{n}2q_ki\ln\frac{1}{f(z,a_k)}+if'(a,a)\left[\frac{p}{f(z,a)}-\bar{p}f(z,a)\right]+c$, 其中 $f(z,a_k)$ 与 $f(z,a)$ 将 D 保形映射到单位圆上, 规范条件为 $f(a_k,a_k)=f(a,a)=0$, $f'(a,a)>0$, c 为实数.

1360. $$v(z,a)=\begin{cases}-\ln\frac{1}{|z-\bar{a}|}, & 若\ \mathrm{Im}\,z\geqslant 0,\\ -\ln\frac{1}{|z-a|}, & 若\ \mathrm{Im}\,z\leqslant 0;\end{cases}$$

$$\rho(x,a)=-\frac{1}{\pi}\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\quad(a=\alpha+i\beta).$$

1361. 1) 在圆内部,

$$v(z,a)=\ln\frac{|R^2-\bar{a}z|}{R}=\begin{cases}-\left[\ln\frac{1}{\left|z-\frac{R^2}{\bar{a}}\right|}+\ln\frac{|a|}{R}\right], & 若\ a\neq 0,\\ \ln R, & 若\ a=0.\end{cases}$$

在圆外部，$v(z, a) = -\ln\frac{1}{|z-a|}$. 密度

$$\rho(Re^{i\theta}, a) = -\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-|a|^2}{R^2-2R|a|\cos(\theta-\alpha)+|a|^2}$$
$$(a=|a|e^{i\alpha}).$$

特别，$a=0$ 时，密度取常数值 $-\frac{1}{2\pi R}$；它在圆内部感生出一个等于常数值 $\ln R$ 的层位势，在圆外部感生出一个等于 $\ln|z|$ 的层位势。

2) $$v(z, a)=\begin{cases}\ln\frac{|R^2-\bar{a}z|}{R}, & a\neq\infty,\ |z|\geqslant R,\\ -\ln\frac{1}{|z-a|}, & a\neq\infty,\ |z|\leqslant R;\end{cases}$$

$$v(z, \infty)=\begin{cases}\ln|z|, \text{若 } |z|\geqslant R,\\ \ln R, \text{若 } |z|\leqslant R;\end{cases}$$

$\rho(Re^{i\theta}, a) = -\frac{1}{2\pi R}\frac{|a|^2-R^2}{R^2-2R|a|\cos(\theta-\alpha)+|a|^2}$ ($a=|a|e^{i\alpha}$，及 $a\neq\infty$)．若 $a=\infty$，则它感生出与上一小题 $a=0$ 时相同的位势．

1362．$v(z, \infty)=\ln\frac{|z+\sqrt{z^2-R^2}|}{2}$，$\rho(x, \infty)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{R^2-x^2}}$ ($|x|<R$)． **1363**．在椭圆外部，$v(z, \infty)=\ln\frac{|z+\sqrt{z^2-c^2}|}{2}$，在椭圆内部，$v(z, \infty)=-\ln 2(\alpha-\beta)$． 密度 $\rho(z, \infty)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{|\zeta^2-c^2|}}$ (ζ 在椭圆上，$c^2=\alpha^2-\beta^2$)． **1364**．$\rho(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g(\zeta, \infty)}{\partial n}$． **1365**．$\rho(\zeta)=\frac{1}{2\pi R}$． **1366**．$\rho(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{R^2-x^2}}$ ($|x|<R$)． **1367**．$\rho(\zeta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{|\zeta^2-c^2|}}$($c^2=a^2-b^2$)． **1368**．$R$． **1369**．$\frac{1}{2R}$． **1370**．$\frac{1}{2(a-b)}$． **1371**．$a$． **1374**．若实轴上的区间 Δ 在点 z 处关于上半平面的调和测度 $\omega(z;\Delta)=\frac{1}{\pi}\int_\Delta\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|t-z|}dt$（参见题 **1065** 与 **1373**），则（去掉附加的实常数）： 1) $w=\frac{\varphi}{\pi}\ln(z-a)$， $v=\varphi\omega(z;\Delta)$， $\Delta=(-\infty,$

a); 2) $\omega=\frac{\varphi}{\pi}\ln\frac{z-b}{z-a}$, $v=\varphi\omega(z;\ \Delta)$, $\Delta=(a,\ b)$; 3) $w=\frac{1}{\pi}\Big[\varphi_1\ln(z-a_1)+\varphi_2\ln\frac{z-a_2}{z-a_1}+\cdots+\varphi_n\ln\frac{z-a_n}{z-a_{n-1}}\Big]$, $v=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\omega(z;\ \Delta_k)$, $\Delta_k=(a_{k-1},\ a_k)$, $a_{-1}=-\infty$; 4) 在 3) 答案的表达式中用 $\varphi_k-\varphi_0$ 代替 φ_k, 并对 w 加上 $i\varphi_0$, 对 v 加上 φ_0, 就得到 w 与 v. 位势也能表示为如下形式: $\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\omega(z;\ \Delta_k)$, $\Delta_0=(a_n,\ \infty)$. **1375**. 1) $w(z)=\frac{id}{\ln\mu}\ln z+$常数, $v(z)=\frac{d}{\ln\mu}\ln r+$常数, 其中 $\mu=\frac{r_2}{r_1}$; 2) $w(z)=\frac{id}{\ln\mu}\ln t(z)+$常数, $v(z)=\frac{d}{\ln\mu}\ln|t(z)|+$常数, 其中 μ 为区域 D 的模(参见题 **254** 前的说明), $t(z)$ 将 D 保形映射到圆环上. **1377**. $w(z)$ 由题 **1376** 中给出的公式定义, 其中: 1) $t(z)=\sqrt{\mu}\frac{z-\sqrt{a^2-R^2}}{z+\sqrt{a^2-R^2}}$, $\mu=\frac{a}{R}+\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^2-1}$; 2) 与 3) $t(z)=\sqrt{\mu}\frac{z-x_1}{z-x_2}$, $\mu=\left(\frac{R-x_1}{R-x_2}\right)^2$, x_1, x_2 由方程 $x^2+\frac{r^2-R^2-a^2}{a}x+R^2=0$ 确定 $(x_1<x_2)$; 4) $t(z)=\frac{1}{c}(z+\sqrt{z^2-c^2})$, $\mu=\frac{a+b}{c}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$; 5) $t=e^{\pi\frac{\boldsymbol{K}+u}{\boldsymbol{K}'}}$, $z=\operatorname{sn}(u,\ k)$, $\mu=e^{2\pi\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{K}'}}$ ($|\operatorname{Re}u|<\boldsymbol{K}$, $|\operatorname{Im}u|\leqslant\boldsymbol{K}'$)[参见题 **1267**(1)]; 6) $t=e^{\pi\frac{\boldsymbol{K}+u}{\boldsymbol{K}'}}$, $z=\frac{2\boldsymbol{K}h}{\pi}\left[Z(u)+\frac{\operatorname{dn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}\right]$, $\mu=e^{2\pi\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{K}'}}$, 其中 k 由方程 $\boldsymbol{K}Z(\mu)=\frac{\pi h}{2a}$, $\operatorname{dn}^2\beta=\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{K}}$ 确定 [参见题 **1267** (15)].

1379. 1) $\omega_1(z)=1-\frac{\ln|z|}{\ln\mu}$, $\omega_2(z)=\frac{\ln|z|}{\ln\mu}$;

$$\rho_1(\zeta)=-\rho_2(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\mu\ln\mu} & \text{到 } |z|=1 \text{ 上},\\ -\dfrac{1}{2\pi\mu\ln\mu} & \text{到 } |z|=\mu \text{ 上};\end{cases}$$

$$p_{11}=p_{22}=-p_{12}=-p_{21}=\frac{1}{\ln\mu};$$

2) $\omega_1(z)=1-\omega_2(z)$, $\omega_2(z)=\frac{\ln|t(z)|}{\ln\mu}$;

$$\rho_1(\zeta)=-\rho_2(\zeta)=\begin{cases}\left|\dfrac{t'(\zeta)}{t(\zeta)}\right|\dfrac{1}{\ln\mu}\ \text{到}\ \Gamma_1\ \text{上},\\ -\left|\dfrac{t'(\zeta)}{t(\zeta)}\right|\dfrac{1}{\ln\mu}\ \text{到}\ \Gamma_2\ \text{上};\end{cases}$$

$$p_{11}=p_{22}=-p_{12}=-p_{21}=\frac{1}{\ln\mu},$$

其中 $t(z)$ 将 B 保形映射到圆环 $1<|t|<\mu$ 上，围道 Γ_1 变为圆 $|t|=1$. **1381**. $v(z)=\operatorname{Im}f(z)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\omega_k(z)$，其中 $f(z)$ 将 D 保形映射到带有水平截口的平面上，

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{pi}{z-a}+\cdots,\ \text{若}\ a\neq\infty,\\ piz+\cdots,\ \text{若}\ a=\infty.\end{cases}$$

1382. $v(z)=2qg(z,a)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\omega_k(z)$，$\omega_k(z)=-\dfrac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\dfrac{\partial g(\zeta,z)}{\partial n}ds$.

1383. 若 $f(a)=\infty$，则场由一偶极子$(a;\ p)$生成，其中 p 由 $f(z)$ 在点 a 邻域内的表达式确定：

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{pi}{z-a}+\cdots,\ \text{若}\ a\neq\infty,\\ piz+\cdots,\ \text{若}\ a=\infty.\end{cases}$$

1384. 1) 若 $f(a)=0$, $f(b)=\infty$，则场由点电荷 $(a;\ 2q)$, $(b;\ -2q)$ 产生，场强矢量通过每一条边界围道的流量都等于零；2) 若 $f(a)=0$，则场由点电荷 $(a;\ 2q)$ 产生；沿关于区域 D 的外法线方向，场强矢量通过对应于圆的边界围道的流量等于 $4\pi q$，而通过其它任何围道的流量都等于零；3) 场处处正则. 沿关于区域 D 的外法线方向，场强矢量通过变为圆的边界围道的流量等于 $\pm4\pi q$（关于变为外圆的围道取－号），而通过其它任何围道的流量都等于零. **1385**. 参见题 **1332** 与 **1334**.

1386. 1) $v(z)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\omega_k(z)+c$，其中 α_k 由方程组 $\sum_{k=1}^{n-1}p_{ik}\alpha_k=2q_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$唯一确定（参见题 **1077**），$c$ 为任意实数. 问题相当于构造一个在 D 内使边界围道 Γ_k 流线化的流动，且若 $\infty\in D$，则在 Γ_k 上有环流 $4\pi q_k(k=1, 2, \cdots, n)$，若 $\infty\,\overline{\in}\,D$，则在 Γ_k 上有环流 $4\pi q_k(k=1, 2, \cdots, n-1)$，以及 $-4\pi q_n$（Γ_n 为外围道）；2) $v(z)=v_0(z)-2qg(z, a)$,

其中 $v_0(z)$ 如同在情形 1) 中，由层的平板电荷 $2q_k+2q_k'$ 定义，其中 $q_k'=-\frac{q}{2\pi}\int_{\Gamma_k}\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial n}ds$. **1387**. 若 $q=0$, $v(z)=2q_1\ln\frac{r_2}{|z|}+c$, 若 $q\neq 0$, $v(z)=2(q_1-\lambda q)\ln\frac{r_2}{|z|}-2qg(z,a)+c$, 其中 $\lambda=\frac{\ln a}{\ln\rho}$, 对于 $\tau=\frac{\ln\rho}{\pi i}$, $g(z,a)=|z|^\lambda\ln\left|\frac{\theta_1\left(\frac{\ln z+\ln a}{2\pi i}\right)}{\theta_1\left(\frac{\ln z-\ln a}{2\pi i}\right)}\right|$, 这里 $\rho<a<1$ (由题 **1334**, 对于 $\Gamma=2\pi$ 与 $\Gamma_2=-2\pi$, 格林函数 $g(z,a)=\operatorname{Im}\Phi\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln z\right)$; 后者从圆环的边界上 $\psi=0$ 这一条件得到). **1388**. 源 $(a;q)$ 变为源 $(a^*;-q)$, 其中 a^* 为 a 的对称点. 函数 $u=\frac{q}{2\pi}\ln\frac{1}{|f(z,a)|}+c$, 其中 $f(z,a)$ 将区域 D 保形映射到单位圆上 (这里及别处，热传导系数 k 都取为 1). **1389**. $u=\frac{q}{2\pi}\ln\left|\frac{z-\bar a}{z-a}\right|+c$. **1390**. $u=\frac{q}{2\pi}\ln\left|\frac{R^2-\bar a z}{R(z-a)}\right|+c$. **1391**. $u=\frac{q}{2\pi}\ln\left|\frac{\sin\frac{\pi z}{2a}+i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{2a}}{\sin\frac{\pi z}{2a}-i\operatorname{sh}\frac{\pi h}{2a}}\right|+c$.

1392 $u=\frac{q}{2k}\ln\left|\frac{t+\frac{i}{\sqrt{k}}}{t-\frac{i}{\sqrt{k}}}\right|+c$, $t=\operatorname{sn}\left[\frac{\mathbf{K}}{a}(z+ib),u\right]$, 其中 k 由比例 $\frac{\mathbf{K}'}{\mathbf{K}}=\frac{2b}{a}$ 确定. **1393**. 1) 当边界上的温度等于零时，区域 D 的格林函数可看作为热源 $(a;2\pi)$ 在 D 内产生的温度. 2) $u(z)=\frac{q}{2\pi}g(z,a)+\sum_{k=1}^{n}u_k\omega_k(z)$, 其中 $\omega_k(z)$ 为 Γ_k 的调和测度. **1394**. $u=\frac{q}{2\pi}g(z,a)+\frac{u_2-u_1}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{|z|}{r_1}+u_1$, 其中 $g(z,a)$ 为格林函数(参见题 **1387** 的答案)。

第十一章

1397. 1) 与 2) $A=\frac{1}{2}[(a_1+b_2)+i(a_2-b_1)]$,

$$B=\frac{1}{2}[(a_1-b_2)+i(a_2+b_1)]$$

$$C=c_1+ic_2,\ A_1=\frac{1}{2\Delta}[(a_1+b_2)+i(b_1-a_2)]$$

$$B_1=\frac{1}{2\Delta}[(b_2-a_1)-i(a_2+b_1)],$$

$$C_1=\frac{1}{\Delta}[(c_2b_1-c_1b_2)+i(c_1a_2-c_2a_1)].$$

5) 映射(2)可化为 z-点到一条直线 $w=\mu e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$ $(-\infty<\mu<\infty)$ 上的投影，关于原点旋转一个角度 β，以及一个系数为 $|A|$ 的相似变换．在这里整个 z-平面变为一条直线 $w=\lambda e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ $(-\infty<\lambda<\infty)$．**1407**．可构造所要求的具有特征 $p\leqslant\frac{R+|a|}{R-|a|}$ 的拟保角变换．**1408**．$u=\frac{x}{\cos\alpha}$，$v=y-x\operatorname{tg}\alpha$，$p=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$．**1409**．解法：借助于函数 $\zeta=\ln\frac{z-a}{z-b}$（值 $z=a$ 与 $z=b$ 对应点 A 与 B），将已知的二角形保形映射到一个宽度为 $\pi+\beta_0$ 的带形上．将这个带形收缩，得到宽度为 π 的带形（具有特征 $p=1+\frac{\beta_0}{\pi}$ 的拟保角映射），再利用逆函数 $z(\zeta)$，将后一带形映射到上半平面．于是长度为 s 的弧 $\widehat{AM}$（图 137）将处于长度为 x 的直线段 AM' 的位置，点 M 沿着关于点 A 与 B 的阿波洛尼厄斯圆（以虚线表示）移动，而且

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\cos^2\frac{\beta_0}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\geqslant\cos^2\frac{\beta_0}{2}\ \text{（试证明此式！）}.$$

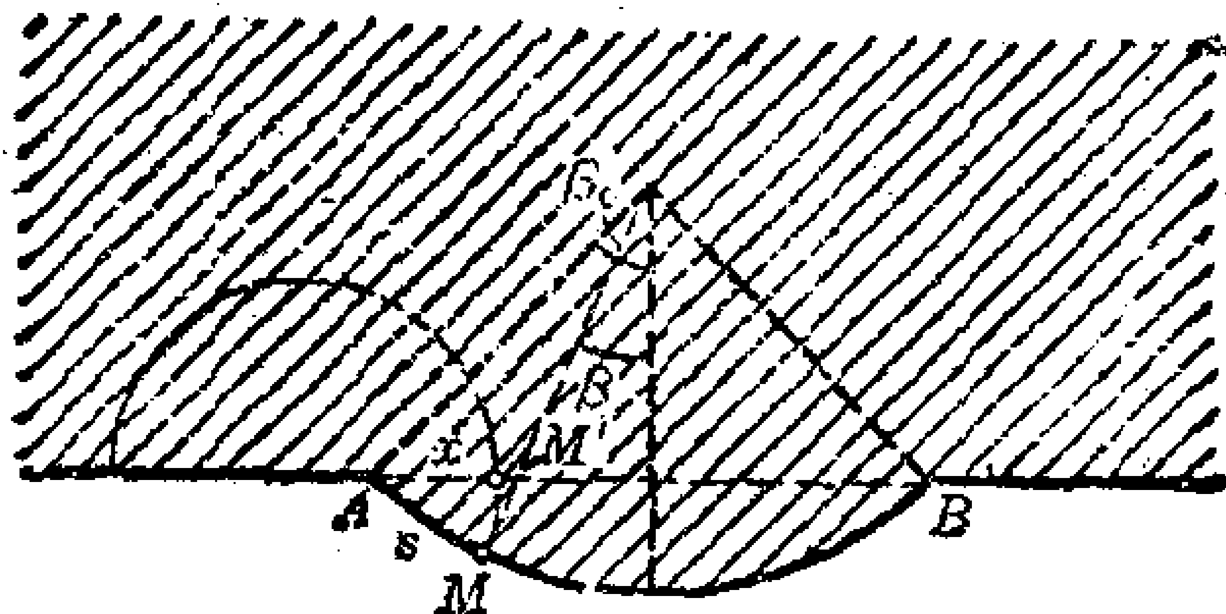


图 137

在所得到的半平面内，将位于线段 AB 上的铅垂半带形扩张到弧 $\widehat{AB}$ 的长度①，并使弧 $\widehat{AB}$ 上的每一弧段都保持长度．这样构成的拟保角映射具有特征

$$p \leqslant \left(1+\frac{\beta_0}{\pi}\right)\sec^2\frac{\beta_0}{2}.$$

1411. $A=\frac{1}{4}[(a-d)+i(c+b)]$, $B=\frac{1}{4}[(a+d)+i(c-b)]$, $F=\frac{1}{2}(f+ig)$. **1412**. $b=q_2(z)\bar{a}$ 或 $b=\frac{1}{\overline{q_2(z)}}\bar{a}$. 特别，可以取 $w=\omega+q_2(z)\bar{\omega}$. 若 $|q_2(z)|\neq 1$, 则变换 $w=a\omega+b\bar{\omega}$ 非退化. **1413**. $b=\lambda\bar{a}$, 其中 λ 由方程 $\bar{q}_2\lambda^2-\lambda(1+|q_2|^2-|q_1|^2)+q_2=0$ 或 $(\lambda-q_2)\left(\frac{1}{\lambda}-\bar{q}_2\right)=|q_1|^2$ 确定. 若 $|q_1|+|q_2|<1$ 或 $||q_1|-|q_2||>1$, 则变换非退化. **1414**. 题中方程的高次项定义了一个具有依赖于 $q_1(z)$ 与 $q_2(z)$ 的两对特征 (p,θ), (p_1,θ_1) 的拟保角映射. 变换 $\zeta(z)$ 为具有一对特征 p, θ 的拟保角映射; $q_1^*=-\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta}$, $q_2^*=\frac{p_1-1}{p_1+1}e^{2i\theta_1}$ (参见题 **1401** 与 **1403**). **1422**. $F(z)=-2z\ln\ln\frac{1}{r}+2z\ln\ln\frac{1}{R}$; $\frac{\partial F}{\partial x}=-2\ln\ln\frac{1}{r}-2\frac{e^{i\varphi}\cos\varphi}{\ln r}+2\ln\ln\frac{1}{R}$; $\frac{\partial F}{\partial y}=-2i\ln\ln\frac{1}{r}-2\frac{e^{i\varphi}\sin\varphi}{\ln r}+2i\ln\ln\frac{1}{R}$; $\frac{\partial F}{\partial z}=-2\ln\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{1}{r}+2\ln\ln\frac{1}{R}$, $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}=\varphi(z)=\frac{e^{2i\varphi}}{\ln\frac{1}{r}}$.

① 此句意指“将位于线段 AB 上的铅垂半带形扩张，使其宽度达到弧 $\widehat{AB}$ 的长度”．——译者注

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝复变函数论习题集
作者＝（苏联）Ｌ．沃尔科维斯　　Ｇ．伦茨　　Ｉ．阿拉马诺维奇
页数＝３６７
ＳＳ号＝１０２３６９９３
出版日期＝１９８１年０７月第１版

前言

目录